## Metoda periodizace: počáteční a okrajová úloha pro vlnovou rovnici na úsečce

Uvažujme nejdříve úlohu s "pevnými" konci, tzn. hledáme řešení úlohy

(*)

| | | |
|---|---|---|
| (EQ) | $\Box u = f$ v $(0,+\infty)\times(0,\ell)$ | |
| (PP) | $u(0,\cdot) = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1$ | $x\in(0,\ell)$ |
| $(OP)_a$ | $u(t,0) = u(t,\ell) = 0$ | $t>0$ |

V druhé části cvičení se podíváme i na další okrajové podmínky:

$(OP)_b$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell) = 0$ volné konce

$(OP)_c$ $\quad u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell) = 0$

$(OP)_d$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,\ell) = 0$

} smíšené podmínky

Tyto úlohy umíme v principu řešit Fourierovou metodou separace proměnných a nebo, v případě $\ell=\infty$, metodou odrazu.

Metoda periodizace, kterou si nyní odvodíme, převádí (podobně jako metoda odrazu) počáteční a okrajovou úlohu (*) na počáteční (Cauchyho) úlohu. Tato metoda má odůvodnění v rámci teorie distribucí a využívá Poissonův sumační vzorec, viz minulý semestr (závěr kapitoly 4):

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \quad \text{platí } \forall f\in\mathcal{S} \text{ nebo } \mathcal{D}}$$

nebo $\boxed{\delta_\Sigma = \hat{\delta}_\Sigma}$, kde $\delta_\Sigma := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \delta_m$ $\quad =: \delta_\Sigma^N$

je tzv. vzorkovací distribuce

tzn., že $g$ je buď $u_0$ nebo $u_1$ nebo $f$.

Nechť $\boxed{\ell = \frac{1}{2}}$. Data $g\in\{u_0,u_1,f\}$ z úlohy (*) prodloužíme z $(0,\frac{1}{2})$ nejdříve liše na $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a označíme ji $\tilde{g}_P$. Následně aplikujeme konvoluci $\tilde{g}_P$ se vzorkovací distribucí $\delta_\Sigma$. Tak provedu periodizaci dat, a následně řešíme Cauchyho úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathcal{D}'$, což umíme, viz cvičení 3.

dostanu fci/distribuci $\tilde{g}$

Malinko přesněji: $\tilde{g}_P$ generuje/představuje distribuci $T$ s nosičem v $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Pak $T * \delta_n = T(x-n)$ je posunutí $T$ na interval se středem v $n$ a tedy
$$T * \delta_\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T(x-n) \quad \text{je periodizace } T \text{ a tedy dat } \tilde{g}_P.$$

Pro danou funkci/distribuci $\tilde{g}$ dle cvičení 3 potřebuji spočítat
$$\partial_t (u_F \overset{(x)}{*} \tilde{g}), \quad u_F \overset{(x)}{*} \tilde{g} \quad a \quad H(t) u_F \overset{(t,x)}{*} \tilde{g}$$
viz formule (ŘW$_{cauchy}$) a cvič. 3, kde $u_F := e^{\text{Ⓣ}}$.

Počítejme tedy $\boxed{u_F * \tilde{g}}$. Máme
$$u_F * \tilde{g} = u_F * (\tilde{g}_P * \delta_\Sigma) = \lim_{N\to\infty} u_F * (\tilde{g}_P * \delta_\Sigma^N).$$
Limitu spočítáme pomocí F.T. (tam a zpět):
$$\mathcal{F}(u_F * g) = \mathcal{F}(u_F * \tilde{g}_P * \delta_\Sigma) = \mathcal{F}(u_F)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)\mathcal{F}(\delta_\Sigma)$$
$$= \underbrace{\mathcal{F}(u_F)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)\delta_\Sigma} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{N} \mathcal{F}(u_F)(n)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n)\delta_n\right)$$

Aplikací $\mathcal{F}^{-1}$:
$$(\bullet) \quad \boxed{u_F * g = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \mathcal{F}(u_F)(n)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n)\, e^{2\pi i n x}}$$
(neboť $\mathcal{F}^{-1}$ působí jen na $\delta_n$ a $\mathcal{F}(u_F)(n)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n)$ jsou čísla)

Pro naši úlohu s námi vrašovou vlnovou rovnicí v 1D:
$$(\bullet\bullet) \quad \boxed{\mathcal{F}(u_F)(n) = \begin{cases} \sin \dfrac{2\pi k |n| t}{2\pi k |n|} & n \neq 0 \\ t & n = 0 \end{cases}}$$
a
$$(\bullet\bullet\bullet) \quad \boxed{\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{g}_P(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx.}$$

ZDE VYUŽÍVÁME POZOROVÁNÍ
$h\delta = h(0)\delta$ neboť $\langle h\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, h\varphi\rangle = h(0)\varphi(0) = \langle h(0)\delta_0, \varphi\rangle$
$\uparrow$ fce
TEDY PRO $h = \mathcal{F}(u_F)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)$ a $\delta_\Sigma$ vnímáno jako $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\delta_n$
DOSTÁVÁME POSLEDNÍ ROVNOST

---

Podrobnosti z výkladu (rigorózně důkaz vztahů $(\bullet)$ – $(\bullet\bullet\bullet)$) lze nalézt v Černý, Pokorný IV, Lemma 25.2.22 (o řadách Four. transformací)

**Příklad** Metodou periodizace vyřešme úlohy

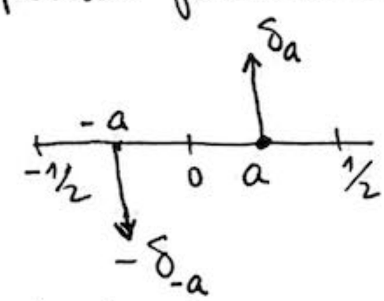
(EQ) $\square u = 0$ v $(0,+\infty)\times(0,\frac{1}{2})$

(PP) $u(0,\cdot)=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot)=\delta_a$ v $(0,\frac{1}{2})$, kde $a\in(0,\frac{1}{2})$

(OP)
a) $u(t,0) = u(t,\frac{1}{2}) = 0$
b) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{1}{2}) = 0$
c) $u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{1}{2}) = 0$
d) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,\frac{1}{2}) = 0$

$t>0$

<u>Řešení</u> $\boxed{\text{Ad a)}}$ Dirichletovy podmínky ⇒ prodloužím liše (data, kde $u_1=\delta_a$) na $(-\frac{1}{2},0)$ a provedu periodizaci:




Z $u_1=\delta_a$ přiřadím $(\tilde{u}_1)_p = \delta_a-\delta_{-a}$ a

tj. mám $\tilde{u}_1 = (\delta_a-\delta_{-a})*\delta_\Sigma$, $\tilde{u}_0=\tilde{f}=0$.

Řešení
$$\tilde{u} = u_F * \left((\delta_a-\delta_{-a})*\delta_\Sigma\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}\begin{cases}\dfrac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} & (n\neq 0)\\ t & (n=0)\end{cases}$$

$$\text{kde } c_n = \langle \delta_a-\delta_{-a}, e^{-2\pi i n x}\rangle = e^{-2\pi i n a} - e^{2\pi i n a} = -2i\sin(2\pi n a)$$

Odtud
$$\underline{\underline{\tilde{u}(t,x)}} = \underbrace{\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\begin{cases}\dfrac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} & (n\neq 0)\\ t & n=0\end{cases}}_{\text{sudé v } n}(-2i)\underbrace{\sin 2\pi n a}_{\text{liché v } n}}_{\text{liché v } n}\Big(\underbrace{\underbrace{\cos 2\pi n x}_{\text{sudé}}}_{\text{sudé v } n} + i\underbrace{\sin 2\pi n x}_{\text{liché}}\Big)$$

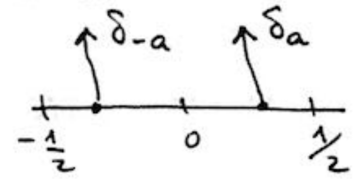
$0$

$$= 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|}\sin 2\pi n a\,\sin 2\pi n x$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi k n t}{2\pi k n}\sin 2\pi n a\,\sin 2\pi n x$$

Hledané řešení $u(t,x)$ je $\tilde{u}(t,x)\big|_{(0,\frac{1}{2})}$ resp. $\tilde{u}(t,x)\big|_{[0,\frac{1}{2}]}$.

$\boxed{\text{Ad b)}}$ Nyní prodloužíme sudě a provedeme periodizaci.



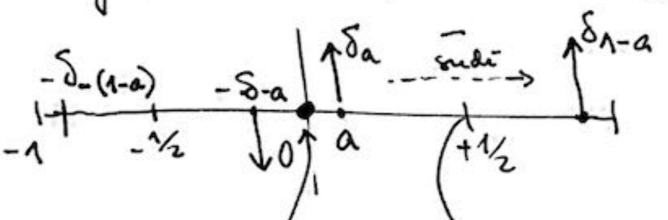

$\Rightarrow$ stejný vztah jako v a) vyjma $c_n$, pro které platí: $c_n = \langle \delta_a + \delta_{-a}, e^{-2\pi i n x} \rangle$
$= 2\cos 2\pi n a$

Tedy

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \dfrac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} & (n \neq 0) \\ t & n = 0 \end{cases} \; 2\cos 2\pi n a \left( \cos 2\pi n x + i \sin 2\pi n x \right)$$

$$= 2\left( t + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k n t}{2\pi k n} \cos 2\pi n a \cos 2\pi n x \right)$$

$\boxed{\text{Ad c)}}$ nejdříve pravý konec prodloužím sudě na $(\frac{1}{2}, 1)$ a pak data z $(0,1)$ prodloužím liše na $(-1,1)$ a periodizuji. Nyní však máme periodu délky 2.




Modifikací postupu, který vedl k odvození $(*)$–$(**)$, viz str. Cv 4/2, pro periodu obecné délky $L$ dostaneme

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(u_F)\left(\frac{n}{L}\right) \mathcal{F}(\tilde{g})\left(\frac{n}{L}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

$$\therefore\; c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \tilde{g}\, e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \, dx = \left\langle \frac{1}{L} \tilde{g}, e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \right\rangle$$

V našem případě $\boxed{L = 2}$ a

$$c_n = \frac{1}{2} \left\langle \delta_a + \delta_{1-a} - \delta_{-a} - \delta_{-(1-a)}, e^{-\frac{2\pi i n x}{2}} \right\rangle = \frac{1}{2}\left( e^{-i\pi n a} - e^{i\pi n a} + e^{-i\pi n(1-a)} - e^{i\pi n(1-a)} \right)$$

$$= -i \sin \pi n a + (-1)^n i \sin \pi n a = \begin{cases} 0 & n \text{ sudé} \\ -2i \sin \pi n a & n \text{ liché} \end{cases}$$

Tedy

$$\underline{\underline{\tilde{u}(t,x)}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \sin \dfrac{2\pi k|n| t}{2} \\ t \end{cases} \cdot \left\{ \quad \right\} \cdot e^{\frac{2\pi i n x}{2}}$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin \pi k (2j+1) t}{\pi k (2j+1)} \sin \pi (2j+1) a \; \sin \pi (2j+1) x$$