Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	10	10	10	36
Získáno					

[6] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{e^z}{(2z+1)^2}.$$

V bodě $z_0 = -\frac{1}{2}$:

a) najděte Laurentovu řadu funkce $f(z)$,

b) spočtěte reziduum,

c) určete typ singularity.

Řešení:

Nejprve spočteme Laurentovu řadu, rozvoj exponenciály v okolí požadovaného bodu je

$$e^z = e^{-\frac{1}{2}+\left(z+\frac{1}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} e^{z+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^k}{k!},$$

jmenovatel $(2z+1)^2$ je již ve vhodném tvaru, celkem

$$\frac{e^z}{(2z+1)^2} = \frac{e^z}{4(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^{k-2}}{k!} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} \sum_{k=-2}^{+\infty} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^k}{(k+2)!}.$$

Z Laurentovy řady v okolí bodu $z_0 = -\frac{1}{2}$ okamžitě vyčteme zbývající charakteristiky, reziduum v bodě $z_0 = -\frac{1}{2}$ je rovno koeficientu u mocniny $\left(z+\frac{1}{2}\right)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{res}_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4},$$

singularita je zjevně pól násobnosti dva.

[10] 2. Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení:

Použijeme standardní substituci,

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \\ \sin x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \\ z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \end{aligned}$$

odkud plyne $\mathrm{d}z = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}x$. Je-li $x \in (0, 2\pi)$, pak $|z| = 1$, a integrace tedy po substituci přejde na integraci přes jednotkovou kružnici. Označme si

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\mathrm{i}z} \frac{\frac{1}{4}(z + z^{-1})^2}{5 + \frac{2}{\mathrm{i}}(z - z^{-1})}$$

Po provedení substituce dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x}\, \mathrm{d}x = \int_{|z|=1} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Stačí tedy spočíst residua $f(z)$ v singularitách, které jsou uvnitř jednotkové kružnice. Funkci $f(z)$ upravíme tak, abychom snadno identifikovali její singularity,

$$\frac{1}{\mathrm{i}z} \frac{\frac{1}{4}(z + z^{-1})^2}{5 + \frac{2}{\mathrm{i}}(z - z^{-1})} = \frac{1}{4z^2} \frac{(z^2 + 1)^2}{5\mathrm{i}z + 2z^2 - 2} = \frac{1}{4z^2} \frac{(z^2 + 1)^2}{(z + 2\mathrm{i})(2z + \mathrm{i})}$$

z čehož okamžite vidíme, že stačí spočíst rezidua v bodech 0 a $-\frac{\mathrm{i}}{2}$, přičemž v bodě 0 má funkce pól násobnosti dva, a v bodě $-\frac{\mathrm{i}}{2}$ má funkce pól násobnosti jedna. (Singularita $z_0 = -2\mathrm{i}$ leží vně jednotkové kružnice.) Jest

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-\frac{\mathrm{i}}{2}} f(z) &= \frac{1}{4z^2} \frac{(z^2 + 1)^2}{2(z + 2\mathrm{i})}\bigg|_{z=-\frac{\mathrm{i}}{2}} = \frac{3}{16}\mathrm{i} \\ \operatorname{res}_0 f(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{1}{4} \frac{(z^2 + 1)^2}{(z + 2\mathrm{i})(2z + \mathrm{i})} \right)\bigg|_{z=0} = -\frac{5}{16}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

kde jsme využili pomocné věty pro výpočt residua, které zní

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{g'(z)}\bigg|_{z=z_0}.$$

a

> Buď $f(z)$ komplexní funkce, která má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše n, pak
>
> $$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z)\right) \right).$$

Dle reziduové věty je tedy

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x}\, \mathrm{d}x = \int_{|z|=1} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \left(\operatorname{res}_{-\frac{\mathrm{i}}{2}} f(z) + \operatorname{res}_0 f(z) \right) = 2\pi\mathrm{i} \left(\frac{3}{16}\mathrm{i} - \frac{5}{16}\mathrm{i} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

[10] 3. Distribuce $T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ byla definována jako

$$\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle =_{\mathrm{def}} \mathrm{p.\,v.} \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

přičemž připomínáme, že Cauchyho hlavní hodnota integrálu je definována následovně

$$\mathrm{p.\,v.} \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x =_{\mathrm{def}} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right). \tag{2}$$

Zaveďme nyní distribuci $S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, která je definovaná jako

$$\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

(Povšimněte si mezí v integrálu.) Ukažte, že definicí (3) je skutečně zavedena distribuce (korektnost definice, linearita, spojitost). Dále ukažte, že definice (3) definuje stejnou distribuci jako definice (1), aneb ukažte, že platí

$$S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}} = T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

Řešení:

Korektnost definice je jasná, funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je definicí (3) skutečně přiřazeno reálné číslo. Toto přiřazení je zjevně lineární neboť

$$\begin{aligned}\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}, \alpha\varphi+\beta\psi \right\rangle &= \int_{x=0}^{+\infty} \frac{[\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)]-[\alpha\varphi(-x)+\beta\psi(-x)]}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x + \beta \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\psi(x)-\psi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \alpha \left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}, \varphi \right\rangle + \beta \left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}, \psi \right\rangle\end{aligned}$$

platí pro každou dvojici $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a libovolná reálná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abychom ukázali spojitost, je nutné ukázat, že pro každou posloupnost funkcí $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ konvergující k nule $\varphi_k \to 0$ ve smyslu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}, \varphi_k \right\rangle \to 0,$$

což po rozepsání znamená, že chceme ukázat

$$\lim_{k\to+\infty} \left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}, \varphi_k \right\rangle = \lim_{k\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

Protože je $\varphi_k \to 0$ ve smyslu konvergence v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, tak víme, že existuje kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}$, taková, že pro každou funkci φ_k platí $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ a dále, že také platí $\varphi_k \rightrightarrows 0$ na množině K. (Stejnoměrná konvergence.) Rovněž pro libovolnou derivaci $l \in N$ platí $\frac{\mathrm{d}^l\varphi_k}{\mathrm{d}x^l} \rightrightarrows 0$ na množině K.

Důkaz požadovaného tvrzení (5) je jednoduchý, pokud se posloupnost funkcí $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ vyhýbá nule, aneb pokud platí $K \cap \{0\} = \emptyset$. V integrálu vypadne singularita, a stejnoměrná konvergence k nule stlačí integrál do nuly. Pokud bude $K \cap \{0\}$ neprázdná množina, budeme se muset opatrně vypořádat se singularitou. Integrál tedy rozdělíme na bezproblémové části mimo singularitu a malé okolí singularity,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \left(\int_{x=0}^{\epsilon} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{x=\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x \right),$$

kde ε je libovolné, ale pevné kladné reálné číslo. Zjevně platí

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{x=\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 0,$$

a dále s použitím Taylorova rozvoje s Lagrangeovým tvarem zbytku dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{\epsilon} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{\epsilon} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(0)+\varphi_k(0)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\epsilon} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\epsilon} \frac{\varphi_k(0)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\epsilon} \frac{\varphi_k(0)+\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}x}(\xi)\Big|_{\xi\in(0,\varepsilon)} x - \varphi_k(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\epsilon} \frac{\varphi_k(0)-\varphi_k(0)-\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}x}(\zeta)\Big|_{\zeta\in(-\varepsilon,0)} x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \varepsilon \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}x}(\xi)\Big|_{\xi\in(0,\varepsilon)} - \frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}x}(\zeta)\Big|_{\zeta\in(-\varepsilon,0)} \right),\end{aligned} \tag{6}$$

kde ζ a ξ jsou nějaké body z příslušných intervalů. Derivace funkcí φ_k ovšem stejnoměrně konvergují k nule, a proto dostaneme

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{x=0}^{\epsilon}\frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to+\infty}\varepsilon\left(\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}x}(\xi)\right|_{\xi\in(0,\varepsilon)}-\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}x}(\zeta)\right|_{\zeta\in(-\varepsilon,0)}\right)=0$$

a tvrzení o spojitosti je dokázáno.

Abychom ukázali, že platí $S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}=T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}$, musíme ukázat, že pro každou funkci $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}},\varphi\right\rangle=\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}},\varphi\right\rangle, \tag{7}$$

což po rozepsání znamená, že musíme ukázat, že pro každou funkci $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\int_{x=0}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{x=\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Začneme upravovat levou stranu, přičemž si opět hlídáme singularitu v nule,

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x&=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{x=0}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{x=\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{x=0}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{x=\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{x=\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

V posledním integrálu provedeme jednoduchou substituci

$$-\int_{x=\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x=\begin{vmatrix}y=-x\\\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x\end{vmatrix}=-\int_{y=-\varepsilon}^{-\infty}\frac{\varphi(y)}{y}\,\mathrm{d}y=\int_{y=-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(y)}{y}\,\mathrm{d}y,$$

čímž jsme ukázali, že platí

$$\begin{aligned}\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}},\varphi\right\rangle&=\int_{x=0}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{x=0}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{x=\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{x=0}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x+\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}},\varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

Abychom ukázali platnost požadovaného tvrzení (7), zbývá ukázat, že první člen na pravé straně předchozí rovnosti je roven nule, aneb chceme ukázat, že $\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{x=0}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x=0$. Opět si vzpomeneme na Taylorův rozvoj s Lagrangeovým tvarem zbytku a okamžitě vidíme, že platí

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{x=0}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0+}\varepsilon\left(\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(\xi)\right|_{\xi\in(0,\varepsilon)}-\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(\zeta)\right|_{\zeta\in(-\varepsilon,0)}\right),$$

kde jsme postupovali stejně jako výše, viz rovnice (6). (Zkušený počtář samozřejmě ihned vidí ve výrazu $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ diferenční podíl, $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\approx2\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, což motivuje zdlouhavější, ale přesnější použití Taylorova rozvoje.) Funkce φ patří do $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, což mimo jiné znamená, že $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|\leq L$, kde L je nějaké reálné číslo. V předchozí rovnosti proto můžeme bez potíží spočíst limitu a vidíme, že

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{x=0}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x=0,$$

čímž je požadované tvrzení (7) dokázáno.

[10] 4. S pomocí Fourierovy transformace vyřešte pro $x \in \mathbb{R}$ parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u,$$

kde k a γ jsou kladné konstanty, a počáteční podmínka je

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x).$$

Nejprve odvoďte obecný vzorec pro řešení úlohy. (Obecné řešení je dáno prostřednictvím konvolučního integrálu.) Pro speciální počáteční podmínku

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

pak najděte explicitní předpis pro funkci $u(x,t)$. Přípomínáme, že pro $a > 0$ platí $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Řešení:

V řešení příkladu je použita konvence

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\text{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{x}\bullet\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme. Výsledek (řešení rovnice) samozřejmě na definici Fourierovy transformace nezávisí.

Zkušený počtář samozřejmě může původní rovnici nejprve vhodnou substitucí převést na standardní rovnici vedení tepla. Stačí si uvědomit, že rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u$$

lze přenásobením $\mathrm{e}^{\gamma t}$ upravit do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u\mathrm{e}^{\gamma t}\right) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u\mathrm{e}^{\gamma t}\right).$$

Následující postup je však založen na použití hrubé síly.

Provedeme Fourierovu transformaci vůči proměnné x. Z tabulky pro Fourierovu transformaci víme, že

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\xi) = -\xi^2\mathcal{F}[u](\xi),$$

což můžeme úsporně zapsat jako

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = -\xi^2\widehat{u}.$$

Toto značení použijeme při výpočtu. Fourierova transformace dané rovnice je tedy

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t} = -k\,\xi^2\widehat{u} - \gamma\widehat{u}.$$

Tuto diferenciální rovnici v proměnné t řešíme s počáteční podmínkou

$$\widehat{u}\big|_{t=0} = \widehat{f}.$$

Řešením diferenciální rovnice s příslušnou počáteční podmínkou je funkce

$$\widehat{u} = \widehat{f}\mathrm{e}^{\left(-k\xi^2-\gamma\right)t}.$$

Pokud dokážeme spočíst zpětnou Fourierovy transformaci $\widehat{u}$, získáme řešení původní parciální díferenciální rovnice. Potřebujeme spočíst

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\left(-k\xi^2-\gamma\right)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

V ideálním případě se nám podaří zpětnou Fourierovu transformaci vyjádřit jako konvoluční integrál zahrnující počáteční podmínku f. V tabulce Fourierových transformací dohledáme, že platí

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-ax^2}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[g]\,\mathcal{F}[h]\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[g\star h](x),$$

kde hvězdička značí operátor konvoluce, který je definován jako

$$[g \star h](x) =_{\mathrm{def}} \int_{y\in\mathbb{R}} g(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Vrátíme se zpět ke vztahu pro inverzní Fourierovu trasformaci, a vidíme, že

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\left(-k\xi^2-\gamma\right)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\xi\in\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f \star \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right](x) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{d}y,$$

přičemž v druhém členu v integrálu rozeznáváme fundamentální řešení pro rovnici vedení tepla. (To není náhoda, původní rovnice přejde po přechodu k nové neznámé $\widetilde{u} =_{\mathrm{def}} u\mathrm{e}^{\gamma t}$ na standardní rovnici vedení tepla pro funkci $\widetilde{u}$, viz poznámka v úvodu řešení.) Můžeme tedy prohlásit, že obecné řešení zadané diferenciální rovnice s příslušnou počáteční podmínkou je dáno vzorcem

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{d}y.$$

Pokud je počáteční podmínka daná vztahem

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2},$$

pak řešení spočteme dosazením do právě odvozeného vzorce. Jest

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{1+4kt}}}{\sqrt{1+4kt}},$$

kde jsme použili standardní úpravu s doplněním na čtverec a integrál z nápovědy.