Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	7	7	7	7	8	36
Získáno						

[7] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right) \,|\, y(0) = 0,\ y(1) = \sinh 1 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(y^2 + yy' + (y')^2\right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y + th)\right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_0^1 \left[(y+th)^2 + (y+th)\,(y'+th') + (y'+th')^2\right] \mathrm{d}x,$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = 2\int_0^1 \left[2\,(y+th)\,h + h\,(y'+th') + (y+th)\,h' + 2(y'+th')h'\right] \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ dostaneme

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\right|_{t=0} = \int_0^1 \left[2yh + hy' + yh' + 2y'h'\right] \mathrm{d}x,$$

a proto

$$D\Phi(y)[h] = \int_0^1 \left[(2y+y')\,h + (y+2y')\,h'\right] \mathrm{d}x.$$

Po integraci *per partes* v členu s h' dostaneme

$$\int_0^1 \left[(2y+y') - (y+2y')'\right] h \mathrm{d}x$$

přičemž využíváme toho, že $h \in \left\{ g \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right) \,|\, g(0) = 0,\ g(1) = 0 \right\}$. Eulerova–Lagrangeova rovnice tedy je

$$-\left(y + 2y'\right)' + (2y + y') = 0$$

a rozderivováním získáme lineární obyčejnou diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$-y'' + y = 0,$$

jejímž obecným řešením je zřejmě funkce

$$y = C_1 \sinh x + C_2 \cosh x,$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty. (Nebo chcete-li funkce $y = D_1 \mathrm{e}^x + D_2 \mathrm{e}^{-x}$, kde D_1 a D_2 jsou integrační konstanty.) Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ C_1 \sinh 1 + C_2 \cosh 1 &= \sinh 1, \end{aligned}$$

odkud $C_2 = 0$, $C_1 = 1$ a tedy

$$y_{\mathrm{ext}} = \sinh x.$$

Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle definice

$$\begin{aligned} D^2\Phi(y)[h,h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\bigg|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 \left[(2(y+th) + (y+th)')\, h + ((y+th) + 2(y+th)')\, h'\right] \mathrm{d}x\right)\bigg|_{t=0} \\ &= 2\int_0^1 \left[h^2 + hh' + (h')^2\right] \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left[h^2 + \frac{1}{2}\left(h^2\right)' + (h')^2\right] \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left[h^2 + (h')^2\right] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že druhá derivace je nezáporná v jakémkoliv bodě y a navíc nezávisí na y. (To není překvapení, funkcionál Φ je “kvadratický” v proměnné y.) Druhá derivace vyčíslená v bodě y_{ext} je

$$D^2\Phi(y_{\mathrm{ext}})[h,h] = 2\int_0^1 \left[h^2 + (h')^2\right] \mathrm{d}x.$$

[7] 2. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = n\left[\cos\left(x+\frac{1}{n}\right) - \cos x\right]\mathrm{e}^x$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, +\infty)$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu K, M a J, kde

a) $K = (\varepsilon, L)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a $L \in \mathbb{R}^+$ a $L > \varepsilon$,

b) $M = (0, L)$, kde $L \in \mathbb{R}^+$,

c) $J = (0, +\infty)$.

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} n\left[\cos\left(x+\frac{1}{n}\right) - \cos x\right]\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} n\left[\cos x\cos\frac{1}{n} - \sin x\sin\frac{1}{n} - \cos x\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\cos x\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)\mathrm{e}^x - \lim_{n\to+\infty} n\sin x\sin\frac{1}{n}\mathrm{e}^x$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin x\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}\mathrm{e}^x - \lim_{n\to+\infty}\sin x\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^x\sin x,$$

kde jsme využili známých limit $\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s} = 1$ a $\lim_{s\to 0}\frac{1-\cos s}{s^2} = \frac{1}{2}$ a součtových vzorců pro funkci $\cos x$. Limitu jsme mohli počítat také s použitím Taylorova rozvoje,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} n\left[\cos\left(x+\frac{1}{n}\right) - \cos x\right]\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} n\left[\cos(x) - (\sin x)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cos x\right]\mathrm{e}^x$$

$$= -\lim_{n\to+\infty} n\left[(\sin x)\frac{1}{n}\right]\mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^x\sin x,$$

přičemž jsme využili Taylorův rozvoj funkce $\cos(x+h) = \cos x - (\sin x)\,h + \cdots$ v okolí bodu x. Bodová limita je tedy pro jakékoliv $x \in I$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = -\mathrm{e}^x\sin x.$$

Označme si

$$f(x) =_{\mathrm{def}} -\mathrm{e}^x\sin x.$$

Zbývá rozhodnout, zda na daných intervalech J a K platí $f_n \rightrightarrows f$. K zodpovězení této otázky použijeme ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence, která říká:

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost reálných funkcí jedné reálné proměnné. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\mathrm{def}} \sup_{x\in M}|f_n(x) - f(x)|.$$

Zabývejme se nyní stejnoměrnou konvergencí. Pro jakékoliv $x \in \mathbb{R}^+$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|n\left[\cos\left(x+\frac{1}{n}\right) - \cos x\right]\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\sin x\right| = \left|n\left[\cos x\cos\frac{1}{n} - \sin x\sin\frac{1}{n} - \cos x\right]\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\sin x\right|$$

$$= \left|n\left[\cos x\cos\frac{1}{n} - \sin x\sin\frac{1}{n} - \cos x\right] + \sin x\right|\mathrm{e}^x$$

$$= \left|\sin x\left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right) + n\cos x\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)\right|\mathrm{e}^x \le \left\{|\sin x|\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1\right| + |\cos x|\left|\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}\right|\right\}\mathrm{e}^x$$

$$\le \left\{\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1\right| + \left|\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}\right|\right\}\mathrm{e}^x.$$

Pokud je x z omezeného intervalu M, můžeme s použitím předchozího učinit poslední krok a psát

$$\forall x \in M\colon\ |f_n(x) - f(x)| \leq \left\{ \left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1 \right| + \left| \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}} \right| \right\} \mathrm{e}^L,$$

odkud je okamžitě vidět, že

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sigma_n \leq \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1 \right| \mathrm{e}^L + \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}} \right| \mathrm{e}^L = 0,$$

kde jsme opět využili známé limity pro goniometrické funkce. Podle zmíněné věty je tedy na intervalu M konvergence *stejnoměrná*, z čehož plyne i stejnoměrná konvergence i na intervalu K. Na itervalu J je situace složitější, nemůžeme totiž využít odhadu $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^L$ neboť x může být nyní libovolně velké. Toto pozorování nás nabádá k ostražitosti. Dokonce nás může napadnout, že pokud budeme moci uvažovat libovolně velká x, nebude platit, že $\sigma_n \to 0$ pro $n \to +\infty$.

Poslední *rovnost*, kterou můžeme využít je

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sin x \left(1 - n \sin \frac{1}{n} \right) + n \cos x \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \right| \mathrm{e}^x.$$

Pojďme se podívat, co se stane pokud volíme $x = 2\pi n$. (To jsou velká čísla a jsou volena tak, aby se nám dobře pracovalo s goniometrickými funkcemi.) Pak je

$$|f_n(x) - f(x)||_{x=2\pi n} = n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \mathrm{e}^{2\pi n} = \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi n}}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty,$$

a zjevně tedy neplatí, že $\sigma_n \to 0$ pro $n \to +\infty$. Na intervalu J tedy konvergence *není stejnoměrná*.

[7] 3. Určete pro která $b \in \mathbb{R}$ je definována funkce

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

(Aneb zjistěte pro která $b \in \mathbb{R}$ uvedený integrál existuje a je konečný.) Pro tato b integrál spočtěte. *Postupy použité při řešení je nutné pečlivě zdůvodnit!*

Řešení:

Funkce $F(b)$ daná přepisem

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

má dva rizikové body $x = 0$ a $x = +\infty$. (Měřitelnost integrandu je zřejmá neboť funkce $f(x,b)$ je pro libovolné b spojitá funkce proměnné x.) Pro $b \neq 0$ platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\frac{1}{\mathrm{e}^x} = b,$$

z čehož okamžitě vidíme, že pro $x = 0$ lze integrand pro $b \neq 0$ pohodlně dodefinovat limitou a integrál tedy bude (na okolí nuly) jistě konečný. Pro $b = 0$ dostaneme přímým dosazením, že $F(b) = 0$. Chování integrandu u nuly tedy neklade žádné omezení na integrovatelnost.

Zbývá zjistit, jak se integrand chová v druhém rizikovém bodě, a sice pro $x \to +\infty$. Pro všechna $b > -1 + \varepsilon$, kde ε je libovolné kladné číslo zřejmě platí

$$\left|\frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x\mathrm{e}^x}\right| \leq \frac{1}{x\mathrm{e}^x} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-(b-1)x} =\leq \frac{1}{x\mathrm{e}^x} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\varepsilon x},$$

cože se součet dvou integrovatelných funkcí (v okolí nekonečna). Integrál bude pro tyto hodnoty b konečný. Definiční obor tedy je tedy zjevně $b \in (-1, +\infty)$.

K výpočtu funkce $F(b)$ využijeme větu o derivaci integrálu podle parametru, která říká

> Buď $f(x,b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí
>
> - Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
> - Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
> - Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $|\frac{\partial}{\partial b} f(x,b)| \leq g(x)$.
> - Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x,b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.
>
> Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x,b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce
>
> $$F(b) = \int_I f(x,b)\mathrm{d}x$$
>
> je diferencovatelná na I a platí
>
> $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\partial}{\partial b} f(x,b)\mathrm{d}x.$$

V našem případě volme $I = (0, +\infty)$, $J = (-1 + \varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné číslo. Diferencovatelnost funkce $f(x,b) = \frac{1-\mathrm{e}^{-bx}}{x\mathrm{e}^x}$ podle proměnné b je zřejmá, měřitelnost podle proměnné x jsme diskutovali v úvodu, bod $b_0 \in J$, ve kterém má být funkce $f(x,b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I, nepochybně existuje, protože výše jsme dokonce zjistili, že $f(x,b)$ je lebesgueovsky integrovatelná pro libovolné b z definičního oboru.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu pro derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b) = -\mathrm{e}^{-(b-1)x},$$

což je snadné neboť platí

$$\forall x \in I, \forall b \in (-1 + \varepsilon, +\infty) : \left|-\mathrm{e}^{-(b-1)x}\right| \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon x}$$

kde funkce na pravé straně je ovšem lebesgueovsky integrovatelná.
Pro funkci $F(b)$ jsme tedy obdrželi

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b+1)x}\mathrm{d}x,$$

z čehož plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \frac{1}{b+1},$$

odkud integrováním podle proměnné b dostaneme

$$F(b) = \ln(b+1) + C,$$

kde C je integrační konstanta. Hodnota funkce $F(b)$ v bodě $b = 0$ je zřejmě $F(0) = 0$, odkud $C = 0$, celkem tedy

$$F(b) = \ln(b+1),$$

kde $b \in (-1, +\infty)$.

[7] 4. Spočtěte plošný obsah množiny M, aneb spočtěte integrál

$$\int_M \mathrm{d}\lambda,$$

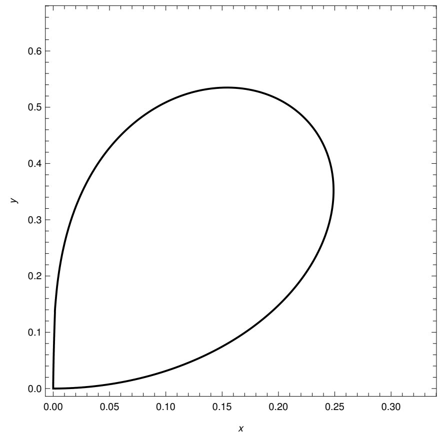
a dále spočtěte integrál

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} \, \mathrm{d}\lambda,$$

kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina definovaná vztahem

$$M =_{\mathrm{def}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)^{\frac{5}{4}} \leq x^{\frac{1}{2}} y \right\}.$$

(Zápis $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}} \, \mathrm{d}\lambda$ je jen jiné značení pro $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.) Množina je načrtnutá na Obrázku 1.



Obrázek 1: Množina $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)^{\frac{5}{4}} \leq x^{\frac{1}{2}} y \right\}$.

Řešení:

Implicitně zadaná křivka

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{1}{2}} y,$$

která tvoří hranici množiny M zjevně prochází bodem $\mathbf{x} = [0, 0]$. Křivka protíná osu $x = 0$ pouze v bodě $\mathbf{x} = [0, 0]$. Zavedeme-li "polární" souřadnice vztahem

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sqrt{3}\sin\varphi,$$

vidíme, že implicitní rovnice pro křivku přejde na rovnici

$$r^{\frac{5}{2}} = r^{\frac{3}{2}} \sqrt{3} \left(\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi.$$

Pro daný úhel $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ má tato rovnice jedinné řešení, a sice

$$r = \sqrt{3} \left(\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi.$$

Použijeme-li "polární" souřadnice navržené výše, je jasné, že determinant Jacobiho matice je

$$\det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sqrt{3}\sin\varphi & r\sqrt{3}\cos\varphi \end{bmatrix} = r\sqrt{3}.$$

Nyní můžeme přejít k výpočtu integrálů. Jest

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{3}(\cos\varphi)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi} \frac{1}{r} r\sqrt{3} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = 3 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 3 \left[-\frac{\left(\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

a dále

$$\int_M \mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{3}(\cos\varphi)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi} r\sqrt{3}\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sqrt{3}\,(\cos\varphi)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi\right)^2}{2} \sqrt{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

kde jsme v obou jednorozměrných integrálech použili jednoduchou goniometrickou substituci.

[8] 5. Uvažujte Hilbertův prostor $H =_{\mathrm{def}} L^2((0,2\pi))$ vybavený standardním skalárním součinem

$$(u,v)_{L^2((0,2\pi))} =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{2\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uvažujte podprostor V, $V \subset H$, který je generován jako lineární obal funkcí

$$g_1(x) =_{\mathrm{def}} \sin x,$$
$$g_2(x) =_{\mathrm{def}} \cos x + \sin(3x),$$

aneb

$$V =_{\mathrm{def}} \{ w \in H | \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \colon w(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) \},$$

a dále uvažujte funkci $f_m \in H$ definovanou předpisem

$$f_m(x) =_{\mathrm{def}} \sin(mx),$$

kde $m \in \mathbb{N}_0$. (Množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ pro tyto účely tohoto příkladu chápeme včetně nuly, k symbolu $\mathbb{N}$ tedy přidáváme index nula, aby nedošlo k mýlce.)

a) Ukažte, že funkce g_1 a g_2 jsou na sebe v daném skalárním součinu kolmé. Spočtěte normy funkcí $\|g_1\|_H$ a $\|g_2\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.)

b) Zjistěte, pro která $m \in \mathbb{N}_0$ je $f_m \in V$.

c) Pro dané $k \in \mathbb{N}_0$ najděte nejlepší aproximaci funkce $f_k \in H$ v podprostoru V, aneb najděte funkci $h_k \in V$ takovou, že platí $\|f_k - h_k\|_H = \min_{l \in V} \|f_k - l\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.)

Řešení:

Všechny otázky zodpovíme pomocí skalárního součinu. Z teorie Fourierových řad si připomeneme, že pro $n, m \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, n \neq 0, \\ 2\pi, & n = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Spočteme skalární součin dle definice

$$(g_1, g_2)_{L^2((0,2\pi))} =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{2\pi} g_1(x)g_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2\pi} \sin x\,(\cos x + \sin(3x))\ \mathrm{d}x = 0,$$

kde jsme využili výše uvedené vzorce. Ukázali jsme tedy, že funkce g_1 a g_2 jsou na sebe kolmé. (Jejich skalární součin je nulový.) Spočteme normy. Dle definice je

$$\|g\|_H =_{\mathrm{def}} \left[(g,g)_{L^2((0,2\pi))} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{x=0}^{2\pi} (g(x))^2\ \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}},$$

v našem případě tedy

$$\|g_1\|_H = \left[\int_{x=0}^{2\pi} (\sin x)^2\ \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}}$$

a dále

$$\|g_2\|_H = \left[\int_{x=0}^{2\pi} (\cos x + \sin(3x))^2\ \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{x=0}^{2\pi} \left(\cos^2 x + 2\cos x \sin(3x) + \sin^2(3x) \right)\ \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{1}{2}},$$

kde jsme využili výše uvedených vzorců pro výpočet integrálů ze součinů goniometrických funkcí.

Odpověď na druhou otázku získáme v rámci hledání odpovědi na třetí otázku. (Bude-li nejlepší aproximací f_k z prostoru V funkce f_k samotná, je jasné, že $f_k \in V$.) Bez dlouhého rozmýšlení ovšem můžeme okamžitě říci, že $f_0 \in V$. (Nulový prvek patří do jakéhokoliv podprostoru hodného svého jména.)

Z přednášky víme, že nejlepší aproximaci získáme ortogonální projekcí f na podprostor V. Ortogonální projekci lze znadno spočíst, pokud máme v prostoru V k dispozici ortonormální bázi. Vzhledem k výše uvedeném ovšem ortonormální bázi tvoří patřičně normované vektory g_1 a g_2, aneb $V = \operatorname{span}\{\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}\}$, kde

$$\widetilde{g_1} =_{\mathrm{def}} \frac{g_1}{\pi^{\frac{1}{2}}},$$
$$\widetilde{g_2} =_{\mathrm{def}} \frac{g_2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},$$

a kde platí

$$(\widetilde{g_i}, \widetilde{g_j})_{L^2((0,2\pi))} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Funkci h tedy hledáme jako ortogonální projekci, což znamená, že

$$h_k(x) = (f_k, \widetilde{g_1})_{L^2((0,2\pi))}\, g_1(x) + (f_k, \widetilde{g_2})_{L^2((0,2\pi))}\, g_2(x)$$
$$= \left[\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) \frac{\sin x}{\pi^{\frac{1}{2}}}\, \mathrm{d}x\right] \frac{\sin x}{\pi^{\frac{1}{2}}} + \left[\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) \frac{\cos x + \sin(3x)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\, \mathrm{d}x\right] \frac{\cos x + \sin(3x)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \sin x, & k = 1, \\ \frac{1}{2}\frac{\cos x + \sin(3x)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, & k = 3, \\ 0, & k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\}. \end{cases}$$

Celkem tedy

$$h_k(x) = \begin{cases} \sin x, & k = 1, \\ \frac{1}{2}\frac{\cos x + \sin(3x)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, & k = 3, \\ 0, & k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\}. \end{cases},$$

a $h_k = f_k$, aneb $f_k \in V$, platí pro $k = 0, 1$.