Řešení vybraných příkladů
7. sada

1.b) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} z^n, \ a > 0.$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}$$

Poloměr konvergence R řady (1) je tedy

$$R = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a < 1. \end{cases}$$

Pro $a = 1$ má smysl uvažovat konvergenci (1) na kružnici konvergence, tj. na jednotkové kružnici $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Každé $z \in \mathbb{C},\ |z| = 1$ je tvaru $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ pro jednoznačně určené $x \in [0, 2\pi)$. Máme tedy studovat konvergenci řady

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{ix})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx}, \ x \in [0, 2\pi).$$

Platí $|e^{inx}| = 1,\ n \in \mathbb{N},\ x \in [0, 2\pi)$. Není tedy splněna nutná podmínka pro konvergenci řady, tj. není pravda, že $|e^{inx}| \to 0$ pro $n \to +\infty$, a řada (2) tedy nekonverguje.

1.e) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^p}, \ p \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1^{-p} = 1.$$

Zde jsme použili $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$ (viz 5. dú z 5. sady). Poloměr konvergence řady (3) je tedy 1.

Stejně jako v b) má smysl uvažovat konvergenci (3) na jednotkové kružnici. Pišme $z = e^{ix},\ x \in [0, 2\pi)$. Pak (3) je tvaru

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^p}.$$

Platí $\left|\frac{e^{inx}}{n^p}\right| = n^{-p}$. Vidíme, že řada (4) může konvergovat jen pro $p > 0$. Je-li nyní $p > 0$, pak $n^{-p} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$ a současně řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(nx) + i \sin(nx))$$

má omezené částečné součty pro $x \neq 0$ (viz příklad m) z 6. sady). Z Dirichletova kritéria tedy plyne konvergence (4) pro $p > 0$ a $x \neq 0$.

Zbývá probrat případ $x = 0$. Pak $e^{in0} = 1$ a máme tedy studovat konvergenci řady

(5) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Víme, že tato řada konverguje právě tehdy, když $p > 1$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je 1. Na jednotkové kružnici řada konverguje pro $p > 0$ a $z \neq 1$. Je-li $p > 1$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty z a p řada na kružinici nekonverguje.

1.g) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n z^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p,\ p\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Řešení: Označme $a_n := (-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p,\ n=1,2,\cdots$. Pak

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}\right)^p\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+4n+2}{4n^2+10n+6}\right)^p = \frac{1}{2^p}.\end{aligned}$$

Poloměr konvergence je tedy 2^p.

Nechť dále $z = 2^p e^{ix},\ x\in[0,2\pi)$. Zbývá určit, pro která x konveguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 2^{pn}e^{inx}\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{inx}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p. \tag{7}$$

Označme

$$b_n := \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}b_n^p &= \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\\ &= \left(\frac{(2.4.6\cdots(2n))^2}{(2n+1)!}\right)^p\\ &= \left(\frac{2.4.6\cdots(2n)}{3.5\cdots(2n+1)}\right)^p\\ &= \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^p.\end{aligned}$$

Připomeňme, že $(2n)!! := (2n)(2n-2)\cdots 2,\ (2n+1)!! := 3.5\cdots(2n+1)$. Máme $|(-1)^n e^{inx}| = 1$. Je-li $p\le 0$, pak $b_n^p \ge 1$ a řada (7) tedy nemůže konvergovat.

Stačí tedy dále uvažovat $p>0$. Máme $(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{i\pi n}$ a tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in(x+\pi)}.$$

Víme, že tato řada má omezenou posloupnost částečných součtů kdykoliv $x+\pi\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Uvažujeme-li $x\in[0,2\pi)$, pak $x+\pi = 2k\pi$ nastává jen pro $x=\pi,\ k=1$. Jelikož $\frac{b_{n+1}^p}{b_n^p} = (\frac{2n+2}{2n+3})^p < 1$, pak je jasné, že posloupnost $\{b_n^p\}_{n=1}^{+\infty}$ je klesající. Jestliže navíc ukážeme

$$\lim_{n\to+\infty} b_n^p = 0, \tag{8}$$

pak z Dirichletova kritéria plyne, že (7) konverguje pro $x\neq\pi$ a $p>0$. K ověření (8) nám zřejmě stačí ukázat, že $b_n^p \to 0$ pro $n\to+\infty$ pro pevně zvolenou hodnotu $p>0$. Ukážeme si tři postupy, jak (8) dokázat.

1. postup. V příkladě 4.p) z 5. sady (neboli 6. úkol z 5. sady) jsme ukázali, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$$

konverguje pro $p>2$. Nutná podmínka pro konvergenci znamená, že

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p = 0 \tag{9}$$

pro $p>2$. Pak ale zřejmě (9) platí kdykoliv $p>0$. Postup tohoto příkladu funguje beze změny i pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$. Speciálně dostaneme (8) pro $p>0$.

2. postup. Použijeme Stirlingovu formuli. Máme

$$
\begin{aligned}
b_n &\cong \frac{2^{2n}\left((\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}\right)^2}{(\frac{2n+1}{e})^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} \\
&= \frac{(2n)^{2n+1}e\pi}{(2n+1)^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} \\
&= \frac{e\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{(1+\frac{1}{2n})^{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},\ n\to+\infty.
\end{aligned}
$$

Odsud je pak jasné, že $b_n \to 0$ pro $n\to+\infty$ a tedy i (8) pro $p>0$.

3. postup. (Analogie postupu k příkladu 4.p) z 5. sady). Zkusme dokázat (8) pro $p=2$, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} b_n^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\right)^2 = 0.$$

Platí

$$b_{n+1}^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^2 b_n^2 < \frac{n+1}{n+2}b_n^2.$$

Indukcí dle n,

$$b_{n+1}^2 < \frac{n+1}{n+2}b_n^2 < \frac{n}{n+2}b_{n-1}^2 < \cdots < \frac{2}{n+2}b_1^2 = \frac{2}{n+2}(\frac{2}{3})^2 = \frac{8}{9(n+2)}$$

a tedy (8) skutečně platí.

Zbývá určit, pro která p řada (7) konverguje, jestliže $x=\pi$. To je to samé jako konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$. Analogicky jako v příkladě 4.p) z 5. sady dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$ konverguje (absolutně) právě tehdy, když $p>2$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je 2^p. Na kružnici konvergence o poloměru 2^p řada konverguje pro $p>0$ a $z\neq -2^p$. Je-li $p>2$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty z a p řada na kružnici konvergence nekonverguje.

3.a) Ukažte, že funkce $\sin^2 x$ je analytická a najděte její Taylorovu řadu se středem v nule.

Řešení: Funkce $\sin x$ je reálně analytická a platí

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ x\in\mathbb{R}.$$

Množina reálně analytických funkcí na $\mathbb{R}$ je uzavřená na součin funkcí, $\sin^2 x$ je tedy taky reálně analytická. Pro určení její Taylorovy řady využijeme vzorec

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2x)^{2k}}{2(2k)!},\ x\in\mathbb{R}.$$

3.b) Ukažte, že funkce $\sqrt{1+x^2}$ je analytická a najděte její Taylorovu řadu se středem v nule.

Řešení: Funkce $\sqrt{1+x}$ je reálně analytická pro $x>-1$. Dále víme, že

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n,\ x\in(-1,1).$$

Tudíž

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{x^4}{2!}+\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{x^6}{3!}+\cdots,\ x\in(-1,1).$$

4.b) Najděte součet řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n. \tag{10}$$

Řešení: Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (10) konverguje pro $|x| < 1$. Dle Leibnizova kritéria konverguje řada i pro $x = -1$. Pro ostatní $x \in \mathbb{R}$ řada diverguje. Platí

$$\begin{aligned}
\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n &= \frac{1.3. \cdots (2n-1)}{2.4 \cdots 2n} x^n \\
&= \frac{1.3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n \\
&= \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{-(2n-1)}{2} \frac{(-x)^n}{n!} \\
&= \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n.
\end{aligned}$$

Jelikož platí

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} (-x)^n, \ x \in [-1, 1),$$

pak vidíme, že (10) lze sečíst na

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1, \ x \in [-1, 1).$$

5.a) Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}. \tag{11}$$

Řešení: Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n. \tag{12}$$

Z limitního odmocninového kritéria plyne, že (12) konverguje pro $|x| < 2$. Podle věty o derivování mocninných řad máme:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} x^n\Big)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} (x^n)' \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^{n-1} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \\
&= \frac{1}{x} \Big(\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - 1\Big) \\
&= \frac{1}{x} \Big(\frac{2}{2-x} - 1\Big) \\
&= \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{2-x}.
\end{aligned}$$

Tedy (12) je primitivní k $\frac{1}{2-x}$ na $(-2,2)$. Na druhou stranu:
$$\int \frac{dx}{2-x} = -\ln(2-x) + c,\ x \in (-2,2).$$
To znamená, že
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = -\ln(2-x) + c.$$
Porovnáním obou stran pro $x = 0$ vidíme, že $c = \ln(2)$. Tedy
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = -\ln(2-x) + \ln 2,\ x \in (-2,2).$$
Tudíž
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln(2-1) + \ln 2 = \ln 2.$$

5.c) Najděte součet řady

(13)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Řešení: Uvažujme

(14)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (14) konverguje pro $|x| < 1$. Z Dirichletova kritéria plyne, že konverguje i pro $x = 1$. Máme:
$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}\Big)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} (x^{2n-1})' \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (x^2)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n} \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$
Ukázali jsme, že (14) je primitivní k $\frac{1}{1+x^2}$ na $(-1,1)$. Tudíž
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1} = \arctan x + c,\ x \in (-1,1).$$
Dosadíme za $x = 0$ a vidíme, že $c = 0$. Tudíž
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1}\Big|_{x=1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

5.e) Najděte součet

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{15}$$

Řešení: Platí:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &= \sum_{n=1}^{+\infty}x^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Bigg|_{x=-1}\\ &= \lim_{x\to-1^+}\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}-1\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}-1.\end{aligned}$$

Zde jsme využili cvičení 4.b).