17.3 Temperované distribuce a Fourierova transformace

Nejmenší prostor, na kterém jsme doposud zavedli Fourierovu transformaci, byl Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ není pro Fourierovu transformaci vhodný neboť

1) Je-li $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[\varphi] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

2) jiné: je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\varphi \equiv 0$.

zatímco

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a platí} \quad f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

Připomeňme, že

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{ \varphi \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hladkost}}}{C^\infty}(\mathbb{R}^d) ;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d : \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty}_{\substack{\text{rychlý pokles v } \infty \\ \text{(rychlejší než polynomiální)}}} \}$$

Víme také, že $\boxed{e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$ a $\boxed{\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](s) = e^{-\pi|s|^2}}$

Def. (temperované distribuce) Temperované distribuce jsou spojité lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tzn.

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{ T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C}) ;\ T \text{ je lineární, spojitý} \},$$

přičemž spojitost zavedeme takto:

pokud $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ splňují $pD^\alpha\varphi_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^d$ pro libovolný polynom,

pak $T(\varphi_n) = \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Platí

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

přičemž všechny inkluze jsou vlastní. Třetí inkluze není (jak si někteří všimli) úplně v pořádku neboť porovnávám funkce s funkcionály, které si sice odpovídají, ale jsou to jiné objekty. Je to však analogické situaci

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \text{ kde poslední}$$

inkluze platí za předpokladu, že ztotožníme $x \in \mathbb{R}$ s $(x, 0) = x + i0$.

Bude probírdno v 3. semestru v kurzu Funkcionální analýza pro fyziky

Přesněji: pro separabilní Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ platí Rieszova věta o reprezentaci, která říká
$$(\forall f \in \underset{\substack{\text{množina všech}\\ \text{spoj. lin. funkcionálů}\\ \text{na } H}}{H'})(\exists! a \in H)\left(\langle f, \varphi \rangle = \underset{\text{skalární součin}}{(a, \varphi)_H} \right)$$
Navíc $\|f\|_{H'} = \|a\|_H$

Speciálně: $L^2(\Omega)$ a $(L^2(\Omega))'$ lze ztotožnit

Tedy: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \approx [L^2(\mathbb{R}^d)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Poznámka Víme, že platí Hölderova nerovnost: $(\forall f \in L^p)(\forall \varphi \in L^{p'})$
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$
což lze zapsat
$$\langle T_f, \varphi \rangle \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$
Platí:
$$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega)$$

$p \in [1, \infty]$	p' duální exponent
$L^p(\Omega)$	$L^{p'}(\Omega)$ duální prostor

Zpět k temperovaným distribucím:

- Zatímco $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$
  tak $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \not\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

  Př. $f(x) = e^{x^2}$, pak $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} \varphi(x)\,dx \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))'$,
  a $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Proč? Neboť pro speciální $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a to $e^{-\frac{x^2}{2}}$ platí
  $$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{x^2}{2}} dx = +\infty.$$

Pro distribuce $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ jsme ukázali platnost čtyř duálních (adjungovaných) identit (1)–(4) (viz strana 13/11), které jsou typu

$$\langle OT, \varphi\rangle = \langle T, S\varphi\rangle \quad \forall\, \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Tyto čtyři identity platí i pro $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s jediným dodatkem: pro násobení skalárem m potřebujeme nejen hladkost, $m\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, ale také nejvýše polynomiální růst v ∞:

$$\boxed{(\exists\, N\in\mathbb{N})(\exists\, C>0):\ m(x)\le C|x|^N \text{ pro } |x|\to\infty},$$

neboť teprve pak $m\varphi\in\mathcal{S}$ pro libovolné $\varphi\in\mathcal{S}$.

Pomocí duální identity zavedeme Fourierovu transformaci pro temperované distribuce. Je-li $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pak

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}[f](s)\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot s}\,dx\,\varphi(s)\,ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(s)e^{-2\pi i x\cdot s}\,ds\, f(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathcal{F}[\varphi](x)\,dx$$

neboli

$$\langle\hat f,\varphi\rangle = \langle f,\hat\varphi\rangle \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Definice

Je-li $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, pak definujeme $\mathcal{F}[T]$ dualitou

$$\langle\mathcal{F}[T],\varphi\rangle = \langle T,\mathcal{F}[\varphi]\rangle \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Je-li $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\hat f\in L^\infty(\mathbb{R}^d)\cap C(\mathbb{R}^d)$ a $\boxed{\varphi\mapsto\int\hat f(x)\varphi(x)}\in\mathcal{S}'$ a platí:

$$\langle\hat f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\hat f(x)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\hat\varphi(x)\,dx$$

Tedy $\hat f$ chápané jako Four. transf. pro $f\in L^1$ se shoduje s distribuční Four. transf. f (také distr. Four. transf. je reg. distribuce).

TVRZENÍ

Na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ platí inverzní Fourierův vzorec:

$$\boxed{T = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]] \qquad \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}$$

Dk) Využijeme platnost inverzního Fourierova vzorečku pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pro lib. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]], \varphi \rangle$$

neboli $\underline{T = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]]}$

Příklady ① Buď $T = \delta$. Spočtěme $\hat{T}$.

Řešení: Dle definice
$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \left. \int \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s}\, ds \right|_{x=0}$$
$$= \int \varphi(s)\, ds = \langle 1, \varphi \rangle$$

Tedy $\underline{\hat{\delta} = 1}$

Připomeňme si, že $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = c\,\frac{\sin s}{s}$. Nyní $\mathcal{F}[\delta] = \text{const}$
$\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](s) = e^{-\pi|s|^2}$

f kompaktní nosič $\rightarrow$ $\hat{f}$ ztrácí pořadí, ale $\hat{f}$ hladká
f bodový nosič $\rightarrow$ $\hat{f}$ neklesá v ∞, $\hat{f}$ hladká.

② Buď $T = \delta'$. Spočtěme $\hat{T}$, kde $'$ značí $\frac{\partial}{\partial x_k}$

Platí
$$\langle \hat{\delta'}, \varphi \rangle = \langle \delta', \hat{\varphi} \rangle = -\langle \delta, (\hat{\varphi})' \rangle$$
$$= + \langle \delta, \widehat{2\pi i x_k \varphi} \rangle = 2\pi \langle i x_k, \varphi \rangle \Rightarrow$$

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s}\, ds \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -2\pi i s_k \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s}\, ds$$

$$\boxed{\widehat{\frac{\partial}{\partial x_k} \delta} = 2\pi i x_k}$$

(Př. 3) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $e^{i\alpha|x|^2}$, $\alpha\neq 0, \alpha\in\mathbb{R}$

Řešení: Funkce $e^{i\alpha|x|^2} = \cos\alpha|x|^2 + i\sin\alpha|x|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\cap C(\mathbb{R}^d)$, ale $\notin L^1(\mathbb{R}^d)$ ani $\notin L^2(\mathbb{R}^d)$. Tedy $\widehat{e^{i\alpha|x|^2}}$ nemá smysl v $\mathcal{S}, L^1, L^2$, ale jelikož

$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\alpha|x|^2}\varphi(x) \in \mathcal{S}' \quad \left(\text{je to temperovaná distribuce}\right)$$

jediná možnost jak dát smysl $\mathcal{F}[e^{i\alpha|x|^2}]$ je v $\mathcal{S}'$.

> Obecně pro výpočet Fourierových transformací temperovaných distribucí platí, že je nelze spočítat z definice. Postup je tedy takový, že zkusíme nejdříve heuristicky (nejčastěji úvahou) nalézt vhodného kandidáta na F.T. té dané temperované distribuce, a pak zkusíme ověřit, že tento kandidát splňuje identitu $\langle \text{kandidát}, \phi\rangle = \langle \text{funkce, která byla zadána}, \hat{\phi}\rangle$ $\forall \phi\in\mathcal{S}$

V našem případě vyjdeme z identity

$$(*) \qquad \mathcal{F}\left[e^{-\mu|x|^2}\right](s) = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|s|^2}$$

kde zkusíme vložit za $\mu = -i\alpha$. Pak

$$(\circledcirc) \qquad \mathcal{F}\left[e^{i\alpha|x|^2}\right](s) \overset{(*)}{=} \left(\frac{\pi}{-i\alpha}\right)^{d/2} e^{\frac{\pi^2}{i\alpha}|s|^2} = \left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2 i}{\alpha}|s|^2}$$

Na pravé straně je třeba správně definovat $\left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{1/2}$ pro d liché. Provede se pomocí $z^{1/2}$:

$$\left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{1/2} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \ (\text{pro } \alpha>0) = \left(\frac{\pi}{|\alpha|}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \left(\frac{\pi}{-\alpha}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \ (\text{pro } \alpha<0) = \left(\frac{\pi}{|\alpha|}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \end{cases}$$

S takto upřesněným významem pravé strany v $(\circledcirc)$, stačí ukázat

$$\boxed{(\circledcirc\circledcirc) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\alpha|x|^2}\hat{\phi}(x)\,dx = \left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2 i}{\alpha}|x|^2}\phi(x)\,dx \quad \forall \phi\in\mathcal{S}.}$$

$$\left\langle \text{funkce, která byla zadána}, \hat{\phi}\right\rangle \overset{?}{=} \left\langle \text{kandidát}, \phi\right\rangle$$

K důkazu $(\circledcirc\circledcirc)$ opět vyjdeme z $(*)$ a využijeme hlubokých vlastností komplexní analýzy.

Vztah (*) implikuje

(**) $$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mu|x|^2}\hat{\phi}(x)\,dx = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|x|^2}\phi(x)\,dx \quad \text{s } \mu>0$$

Uvažujme nyní dvě funkce $F, G : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definované

$$F(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mu|x|^2}\hat{\phi}(x)\,dx \qquad G(\mu) := \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|x|^2}\phi(x)\,dx$$

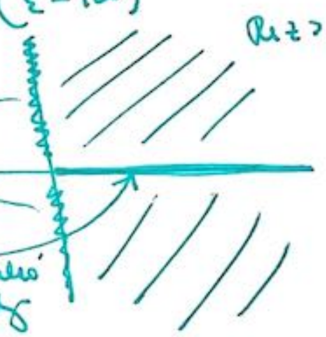
Připomeňme, že $\frac{1}{\mu} = \frac{\overline{\mu}}{|\mu|^2}$ a tedy pro $\operatorname{Re}\mu>0$ jsou

- $F(\mu)$ a $G(\mu)$ konečné (neboli $D_F \supset \{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z>0\} \subset D_G$)
- Navíc, $e^{-\mu|x|^2} = e^{-\mu_1|x|^2}(\cos\mu_2|x|^2 + i\sin\mu_2|x|^2)$ splňuje C-R podmínky
  $\mu=\mu_1+i\mu_2$

  a tak F a podobně G jsou holomorfní v $\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z>0\}$
- Pro $\mu\neq 0$ (počátek) $\quad F(-i\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon - i\alpha)$

  $\qquad G(-i\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon - i\alpha)$

Ale $G(\mu) = F(\mu)$ pro μ typu $(\mu,0)$



[množina, kde také platí rovnost A věty o jednoznačnosti holomorfních fcí]

rovnost na množině, která má hromadný bod

Tedy z věty o jednoznačnosti holomorfních funkcí plyne

$$F(-i\alpha) = G(-i\alpha) \quad \forall \alpha\neq 0,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

což je žádaný vztah (••).

Citát (Paul Painlevé): „Between two truths of the real domain, the easiest a shortest path quite often passes through complex domain."

(Př. 4) Spočtěte Fourierovu transformaci $f(x) = e^{-t|x|}$, $t>0$.

Řešení: V tomto případě $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, klesá v ∞ rychleji než libovolný polynom, ale není v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

neboť $e^{-t|x|} \notin C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (problém je počátek).

▶ Nejdříve spočteme F.T. $e^{-t|x|}$ přímo pro $\boxed{d=1}$

Výpočet
$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t|x|} e^{-2\pi i x s}\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(t-2\pi i s)x}\, dx + \int_0^{\infty} e^{-(t+2\pi i s)x}\, dx$$
$$= \left[\frac{e^{(t-2\pi i s)x}}{t-2\pi i s} \right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(t+2\pi i s)x}}{(t+2\pi i s)} \right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{t-2\pi s i} + \frac{1}{t+2\pi s i} = \frac{2t}{t^2+4\pi^2 s^2}$$

Vidíme, že pro $\forall t>0$ je $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dle Tvrzení na konci zápisky F.T. platí:
$$f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$$
což implikuje
$$\boxed{e^{-t|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{t^2+4\pi^2 s^2} e^{2\pi i x s}\, ds} \qquad (✿)$$

▶ Ve vyšších dimenzích $\boxed{d>1}$ použijeme jiný obecný postup:

a) Napíšeme $e^{-t|x|}$ (nebo obecně danou funkci f) jako "průměr" Gaussiánů s jistou váhou g, tj.
$$\text{(I)} \qquad \boxed{e^{-t|x|} = \int_0^{\infty} g(t,s)\, e^{-s|x|^2}\, ds}$$

b) Na (I) užijeme F.T., což dává
$$\mathcal{F}[e^{-t|x|}](z) = \int_0^{\infty} g(t,s)\, \mathcal{F}[e^{-s|x|^2}](z)\, ds$$
$$= \int_0^{\infty} g(t,s) \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{s}|z|^2}\, ds$$

c) Zkusíme spočítat (upravit) poslední integrál.

Zkusme aplikovat schéma (a)-(c) na $f(x)=e^{-t|x|}$.

Ad a) Hledejme tedy g tak, že (I) platí. Označme $\lambda=|x|$. Tedy ($\lambda>0$) hledáme $g=g(t,s)$ tak, že

$$(I')\qquad e^{-t\lambda} = \int_0^\infty g(t,s)\, e^{-s\lambda^2}\, ds$$

Vyjdeme ze vztahu (✿) (viz předchozí strana) a pozorování:

$$\int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta(2\pi s)^2}\, d\beta = \int_0^\infty e^{-\beta(t^2+(2\pi s)^2)}\, d\beta = \frac{1}{t^2+4\pi^2 s^2}$$

Tedy dle (✿):

$$e^{-t|x|} = 2t\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta(2\pi s)^2}\, d\beta\, e^{2\pi i x s}\, ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty 2t e^{-\beta t^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(2\pi)^2 s^2} e^{2\pi i x s}\, ds\right) d\beta$$

strana 17/21 → (*), $\mu = +\beta 4\pi^2$, $d=1$

$$= \int_0^\infty 2t\, e^{-\beta t^2}\left(\frac{\pi}{\beta 4\pi^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4\beta}x^2}\, d\beta$$

$$= \frac{t}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}}\, e^{-\frac{1}{4\beta}\cdot x^2}\, d\beta$$

neboli

$$\boxed{e^{-t\lambda} = \int_0^\infty \frac{t\, e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\pi\beta}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\, d\beta}$$

a (I') je vyřešena.

Ad b) Aplikujeme-li na (I') Four. transformaci (opět s $\lambda=|x|$), máme

$$\mathcal{F}[e^{-t|x|}](s) = \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}}\, \mathcal{F}\left[e^{-\frac{|x|^2}{4\beta}}\right](s)\, d\beta \overset{(*)}{=} \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\beta\pi}}(4\beta\pi)^{d/2} e^{-4\beta\pi^2|s|^2} e^{-\beta t^2}\, d\beta$$

substituce $y=\beta(t^2+4\pi^2|s|^2)$, $d\beta = \frac{dy}{t^2+4\pi^2|s|^2}$

$$= \frac{2^d t \pi^d}{(t^2+4\pi^2|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}\underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{d-1}{2}} e^{-y}\, dy}_{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} = \frac{(2\pi)^d\, \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+4\pi^2|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\, dx$$

Pozorování

(i) $\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|x|}](s) = \mathcal{F}[e^{-t|x|}](-s) = (2\pi)^d \dfrac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+4\pi^2|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$

(ii) f klesá rychle v ∞ $\longrightarrow$ $\hat f$ hladká

f není hladká v 0 $\longrightarrow$ $\hat f$ klesá jen polynomiálně.

Příklad 5) Spočtěte Fourierovu transformaci $f(x)=|x|^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{C}$, kde $\operatorname{Re}\alpha\in(-d,0)$, tzn. $|x|^\alpha\in L^1_{loc}$.

Řešení: Ačkoliv $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, tak $f\notin L^1(\mathbb{R}^d)$, ale f "neroste" (pro $\alpha>-d$) příliš rychle v ∞, tedy $T_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

$$\langle T_f,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}}|x|^\alpha\phi(x)\,dx$$

▷ K určení Fourierovy transformace $\hat{T}_f$ použijeme obecný postup z předchozího příkladu, tedy hledáme g tak, že

$$(\mathrm{I}'')\qquad |x|^\alpha=\int_0^\infty g(\alpha,s)\,e^{-s|x|^2}\,dx$$

Platí:

$$\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-s|x|^2}\,ds \underset{\substack{y=s|x|^2\\ s=\frac{y}{|x|^2}\\ ds=\frac{1}{|x|^2}}}{=} \int_0^\infty |x|^\alpha\, y^{-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-y}\,dy=\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)|x|^\alpha$$

přičemž integrál nalevo je konečný pokud $\boxed{\alpha<0}$

Tedy pro $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(-d,0)$ (I'') má tvar

$$(✿)\qquad \boxed{|x|^\alpha=\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-s|x|^2}\,ds}$$

▷ Nyní k (✿) aplikujeme F.T.

$$\mathfrak{F}\left[|x|^\alpha\right](z)=\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1}\,\mathfrak{F}\left[e^{-s|x|^2}\right](z)\,ds$$

(*)

$$\overset{(*),\ p\ 17|21}{=}\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2}e^{-\frac{\pi^2}{s}|z|^2}\,ds$$

$$=\frac{(\pi)^{d/2}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha+d}{2}-1}e^{-\frac{\pi^2|z|^2}{s}}\,ds$$

$$\boxed{\begin{aligned} y&=\frac{\pi^2|z|^2}{s}\\ s&=\pi^2|z|^2\frac{1}{y}\\ ds&=-\frac{\pi^2|z|^2}{y^2}dy\\ &(y \text{ od } +\infty \text{ do } 0)\end{aligned}}$$

$$=\frac{(\pi)^{d/2}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\left[\pi|z|\right]^{-(\alpha+d)}\cdot\underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{\alpha+d}{2}-1}e^{-y}\,dy}_{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})}$$

$$=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}+\alpha}}\,\frac{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\,\frac{1}{|z|^{\alpha+d}}$$

Pozor:

- pro $\boxed{\alpha\in(-d,0)}$ je $\boxed{-\alpha-d\in(-d,0)}$
- Výpočet provedem pro $\alpha\in\mathbb{R}$, rozšíření pro $\alpha\in\mathbb{C}$ možné pomocí věty jednoznačnosti
- Speciálně $\boxed{d=3}$

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{|x|}\right](z)\underset{\substack{\alpha=-1\\ d=3}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(1)}{\underbrace{\Gamma(\frac{1}{2})}_{=\sqrt{\pi}}}\,\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{|z|^2}\Rightarrow\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^2}\right]=\frac{\pi}{|x|}$$

Úloha Najděte fundamentální řešení Laplaceova operátoru v $\mathbb{R}^d$

tzn. hledáme $-\Delta u = \delta$ v $\mathcal{D}'$

Řešení: řešme $-\Delta u = \delta$ v $\mathcal{S}'$ pomocí F.T.

Pak

$$4\pi^2|z|^2\,\hat{u}(z) = 1 \implies \hat{u}(z) = \frac{1}{4\pi^2|z|^2}$$

$\boxed{\text{Cíl: INVERTOVAT}}$

Z (*) plyne, že pro $\boxed{\alpha\in(-d,0)} \iff \boxed{-\alpha-d\in(-d,0)}$

$$\mathcal{F}\left[|x|^{\alpha}\right](z) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}+\alpha}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+d}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{1}{|z|^{\alpha+d}} \qquad |x|$$

$$\Updownarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^{\alpha+d}}\right](x) = \pi^{\frac{d}{2}+\alpha}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+d}{2}\right)}\,|x|^{\alpha}$$

chceme použít pro $\boxed{\alpha+d=2} \implies \alpha = 2-d$ a $2-d\in(-d,0) \iff \boxed{d>2}$

Pak

$$u(x) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}+2-d}}{4\pi^2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma(1)}\,\frac{1}{|x|^{d-2}} = \frac{1}{4\pi^{d/2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{|x|^{d-2}}$$

Připomeň: $\Gamma(m) = (m-1)!$ $\quad \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}+m-1\right)\sqrt{\pi}$

Speciálně pro $\boxed{d=3}$ $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\qquad \boxed{u(x) = \frac{1}{4\pi|x|}}$

Obecněji či jinak:
je-li ω_d označení pro objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$, pak

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{d(2-d)\omega_d}\,\frac{1}{|x|^{d-2}}}$$

$(x\neq 0)$

Pro $d=2$ je F. řešení $-\Delta u=\delta$ dáno vztahem

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2\omega_2}\ln|x| = \frac{1}{2\pi}\ln|x|}$$

což si ukážeme přímo z definice následujícím výpočtem.

$\boxed{\text{Buď } d=2}$ Ukažte, že $u_F(x) := \frac{1}{4\pi}\ln|x|^2$ řeší $-\Delta u = \delta$ v $\mathcal{D}'$.

<u>Řešení</u> každý fyzik ví, že Δu v polárních souřadnicích má tvar

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)(r,\theta)$$

$\boxed{\text{Chceme ukázat, že } \langle -\Delta u_F, \phi\rangle = \phi(0) \quad \forall \phi\in\mathcal{D}}$

Dle definice derivace distribuce

$$\langle -\Delta u_F, \phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} u_F(x)\,\Delta\phi(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\varepsilon(0)} u_F(x)\,\Delta\phi(x)\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\ln r^2}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right)(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

Protože $\int_\varepsilon^\infty\int_0^{2\pi} g(r)\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\,d\theta\,dr = \int_\varepsilon^\infty\left[g(r)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right]_0^{2\pi}dr = 0$,

tak $\langle -\Delta u_F,\phi\rangle = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\int_0^{2\pi} r\ln r\,\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \ln r\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\,d\theta\,dr$

$$\overset{\text{per partes}}{=} +\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\phi - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\ln r)}_{=\frac{\partial}{\partial r}(\ln r+1) = \frac{1}{r}}\phi \;-\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{2\pi}\left[\ln r\,\phi + r\ln r\frac{\partial\phi}{\partial r} - (\ln r+1)\phi\right]_\varepsilon^\infty d\theta$$

$$= +\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{2\pi}\left(\varepsilon\ln\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial r}(\varepsilon,\theta) + \phi(\varepsilon,\theta)\right)d\theta = \phi(0,0) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Vyřešení počáteční úlohy pro rovnici vedení tepla (tedy $u(t,x) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t (f(\tau,\cdot)*G_{t-\tau})(x)$) a nalezení fundamentálních řešení pro Poissonovu/Laplaceovu rovnici, získáváme pocit, že teorie distribucí a teorie PDR (parciálních dif. rovnic) budou úzce propojeny. Je tomu tak. Přidejme ještě dvě další ochutnávky pro partie příštího semestru.

$\boxed{\text{Vlnová rovnice pro } d=1}$ Uvažujme vlnovou rovnici v jedné prostorové dimenzi:

$$\Box u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$\boxed{k>0 \text{ (rychlost šíření)}}$

- Snadno ověříme, že je-li $f\in C^2(\mathbb{R})$, pak $f(x-kt)$ řeší $\Box u = 0$.
- Ukážeme, že je-li $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, pak $f(x-kt)$ řeší $\Box u = 0$ v $\mathcal{D}'$ (tj. ve smyslu distribucí)

Řešení $\langle \Box u, \varphi\rangle \overset{(3)}{=} \langle u, \Box\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-kt)\,\Box\varphi(t,x)\,dx\,dt$

u generuje regulární distribuci

Substituce
$z = x-kt$
$s = x+kt$
implikuje $x = \frac{z+s}{2}$, $t = \frac{s-z}{2k}$ a $J = \det\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2k} & \frac12 \\ -\frac{1}{2k} & \frac12 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{2k}}}$

Označíme-li
$$\tilde\varphi(s,z) = \varphi\left(\frac{s-z}{2k}, \frac{s+z}{2}\right)$$
pak $\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial s} = \frac{1}{2k}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac12\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ a
$$\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial z\partial s} = -\frac{1}{4k^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{4k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} - \frac{1}{4k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} + \frac14\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
$$= -\frac{1}{4k^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t} - k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{4k^2}\Box\varphi$$

Tedy
$$\langle \Box u,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(z)\left(-4k^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial s}(z,s)\right)dz\,ds$$
$$= -4k^2\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)ds}_{=0 \text{ neb } \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ má kompaktní nosič.}}\Big)dz = 0$$

Schrödingerova rovnice Kvantová teorie jediné částice je popsána "vlnovou fcí" φ definovanou v $\mathbb{R}^3$. Jediný požadavek na φ je konečnost $\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(x)|^2$, tj. $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Označíme-li $u(t,x)$ "vlnovou fci" v čase t, pak u splňuje

Počáteční úloha pro Schrödingerovu rovnici.
$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - ik\Delta_x u_x = 0. \quad \text{v } (0,t)\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{array}\right.$$

Rovnice obecně obsahuje další členy (potenciál, interakční mechanismy)

Řešení lze nyní provést v $\mathcal{S}'$, aplikací F.T.:
$$\boxed{\frac{\partial\hat u}{\partial t} + (2\pi)^2 ik|s|^2\hat u = 0 \quad \text{a} \quad \hat u(0,\cdot)=\hat\varphi}$$

Odtud $\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat u(t,s)\, e^{(2\pi)^2 ik|s|^2 t}\right)=0 \Rightarrow \boxed{\hat u(t,s) = \hat\varphi(s)\, e^{-(2\pi)^2 ik|s|^2t}}$ (***)

a dle (Př. 3), viz strana 17/21: $\left(\frac1\alpha = 4kt\right)$
$$\boxed{\hat u(t,s) = \hat\varphi(s)\left(\frac{i}{4\pi kt}\right)^{3/2} \widehat{e^{\frac{i|x|^2}{4kt}}}(s)} \quad \left(u(t,x) = \frac{e^{\pm\frac34\pi i}}{(4\pi kt)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)\,dy\right)$$

Pokud platí vzorec pro konvoluci distribucí, a F.T. konvoluce distribucí, tak

VZOREC (***) $\Rightarrow |\hat u(t,s)| = |\hat\varphi(s)|$

$\boxed{\text{Poissonův sčítací vzorec}}$ Víme, že $\mathcal{F}[\delta]=1$. Pomocí translačního vztahu nebo z definice také platí

$$\mathcal{F}[\delta_y](s) = e^{-2\pi i y\cdot s}$$

$\boxed{\text{Nechť pro jednoduchost nejdříve}}\ \boxed{d=1}$ Uvažme předchozí vztah pro $y=k$, $k\in\mathbb{Z}$ a provedeme součet přes k:

$$\mathcal{F}\Big[\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k}\Big](s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i ks}$$

tento součet definuje legitimní temperovanou distribuci představující nekonečný "hřeben" rovnoměrně umístěných hmotných bodů.

Řada vpravo vypadá komplikovaně, ale uvážíme, že tomu tak není. Naopak dostaneme stejnou sumu jako vlevo, tedy:

$$\text{(P)}\qquad \underline{\mathcal{F}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\Big] = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k \quad v\ \mathcal{S}'} \qquad \boxed{\text{Poissonův sumační vzorec}}$$

Součet $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i ks}$ neexistuje v klasickém smyslu.

Odvození: K odvození využijeme metodu periodizace: pro $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nebo $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definujme

$$(\star)\qquad Pf(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-k)$$

Pak Pf je 1-periodická fce. Klíčová otázka, která vede k vzorci (P), jest: jaký je vztah mezi $\boxed{\text{koeficienty } c_k \text{ Fourierovy řady fce } Pf}$ a $\boxed{\text{Fourierovou transformací } f}$?

Víme (viz vzorce na začátku kapitoly 16), že

$$c_k = \sqrt{2\pi}\int_0^1 Pf(x)\, e^{-2\pi i kx}\,dx \qquad \text{a} \qquad Pf(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{2\pi i kx}}{\sqrt{2\pi}}$$

Dosazením $(\star)$:

$$c_k = \sqrt{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 f(x-j)\, e^{-2\pi i kx}\,dx$$

substituce $y=x-j$ $\qquad k,j\in\mathbb{Z}$, $e^{+2\pi i kj}=1$

$$= \sqrt{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{-j}^{-(j-1)} f(y)\, e^{-2\pi i ky}\,dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\pi i ky}\,dy = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k).$$

Tedy $Pf(x)$ je dána jednak součtem $(\star)$ a také $\underline{Pf(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\, e^{2\pi i kx}}$

Dosazením $x=0$ do obou řad dostaneme

$$\boxed{(*) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)}$$

což lze zapsat takto

pravidlo pro práci F.T. na $\mathcal{S}'$

$$\left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k , \hat{f} \right\rangle = \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k , \hat{f} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \widehat{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k} , f \right\rangle}_{\text{pokud } f\in\mathcal{S} \text{ (nelo } \not\in \mathcal{D})},$$

což dává slibovaný Poissonův vzorec P.

$\boxed{\text{Pro } d>1}$ lze postupovat velmi podobně a získat vztahy pro periodické mřížky (svazy, lattice)

$$\boxed{\sum_{\underset{\text{d-tice celých čísel}}{k\in\mathbb{Z}^d}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(k)} \qquad a \qquad \boxed{\widehat{\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k}$$

tento vztah bohužel neplatí univerzálně (pro $f\in\mathcal{S}$ a $\mathcal{D}$ o.k.)

! Existují funkce, kdy obě řady konvergují absolutně, ale k jinému číslu.

Aplikace
- teorie čísel
- krystalografie (kvazi periodické mřížky) $\boxed{\delta_k \text{ atom v } k,\ \hat{f} \text{ výstup záření}}$
- pozoruhodné vztahy, pokud $\hat{f}$ lze explicitně spočíst.

např.

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 t k^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{e^{-4\pi^2 t x^2}}(k) \underset{\mu=4\pi^2 t}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{4t}}}$$

LITERATURA K TEORII DISTRIBUCÍ

(1) Příklady z matematiky pro fyziky [V], str. 1-20. dále kapitola 3, 4, jednoduché přík
Matfyzpress 2002
Čihák, Čerych, Kopáček

(2) Pavel Čihák a kol.
Matematická analýza nejen pro fyziky (V), str. 1-72, Matfyzpress 2016

(3) J. LUKEŠ a JAN MALÝ: Measure and integral, Matfyzpress, 2005

(4) Robert S. Strichartz: A guide to Distribution theory and Fourier transform
World Scientific, 1993.

(5) V.S. Vladimirov: Generalized functions in mathematical physics,
Mir Publishers, Moscow, 1979

(6) A. Friedman: Generalized functions and partial differential equations, 1963, Prentice-Hall