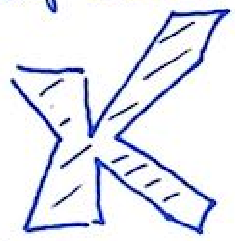
8.6 Věty o spojitém zobrazení na kompaktu, extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme si vlastnosti spojitých fcí jedné reálné proměnné uvažovaných na UZAVŘENÉM intervalu $\langle a,b\rangle$:

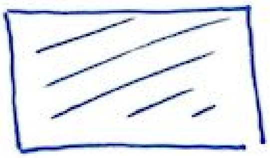
$f \in C(\langle a,b\rangle) \Rightarrow$

- f je na $\langle a,b\rangle$ omezená
- f nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$
- f nabývá v $\langle a,b\rangle$ maxima / minima
- f je stejnoměrně spojitá (Cantorova věta)

Nyní si uvedeme podobné věty pro funkce více proměnných. Uzavřený interval bude nahrazen obecnější množinou – množinou kompaktní



vs.



v $\mathbb{R}^d$: K je kompaktní $\Leftrightarrow$ K uzavřená a omezená

Věta 8.21 Buď $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak $L := f[K]$ (obraz množiny K při spojitém zobrazení) je kompakt (v $\mathbb{R}$) (resp. v $\mathbb{R}^m$)

Speciálně: $f|_K$ je omezená (f je omezená na K)

Dk Využijeme následující charakterizaci kompaktnosti (viz Věta 8.9 (1)$\Leftrightarrow$(2))

$$f[K] \text{ je kompaktní} \Leftrightarrow \left(\forall \{y^n\}_{n=1}^{\infty} \subset f[K]\right)\left(\exists \{y^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{y^n\}_{n=1}^{\infty}\right)$$
$$\text{a } \left(\exists y \in f[K]\right) \quad y^{n_k} \to y \text{ v } \mathbb{R} \ (k \to \infty)$$

Vezměme tedy $\{y^n\}_{n=1}^{\infty} \subset f[K]$ libovolně. Pak dle definice obrazu množiny existují $x^n \in K$ tak, že $f(x^n) = y^n$

Ale K je kompaktní, existuje tedy $x \in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $x^{n_k} \to x$ v $\mathbb{R}^d$ pro $k \to \infty$

Dle Heineho věty $f(x^{n_k}) \to f(x)$ v $\mathbb{R}$ $k \to \infty$

Ale $f(x^{n_k}) = y^{n_k}$ a $f(x)$ je hledané $y \in f[K]$.

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ}}$ Předchozí i následující tvrzení (Věta 8.22) platí i v situacích

(i) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní

(ii) $f: (X, \varrho_X) \to (Y, \varrho_Y)$ kde (X, ϱ_X) a (Y, ϱ_Y) jsou úplné metrické prostory.

$\boxed{\text{Věta 8.22}}$ Buď $f \in C(K)^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, $m \in \mathbb{N}$. Pak f je stejnoměrně spojitá v K.

Dk. Vyjdeme z definice stejnoměrné spojitosti f v K:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in K)\ \boxed{|x - y|_{\mathbb{R}^d} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon}$$

a tvrzení dokážeme sporem. Předpokládáme tedy

$$\boxed{f \in C(K) \wedge f \text{ není stejnoměrně spojitá na } K,\ K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompaktní}}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists \{x^n\}, \{y^n\} \subset K$$

$$(*) \qquad |x^n - y^n|_{\mathbb{R}^d} < \frac{1}{n} \wedge |f(x^n) - f(y^n)|_{\mathbb{R}^m} \geq \varepsilon_0$$

Protože K je kompaktní,

existují: $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{y^n\}_{n=1}^{\infty}$

a $x, y \in K$:

$$x^{n_k} \to x \quad \text{a} \quad y^{n_k} \to y \quad \text{v } \mathbb{R}^d \ (k \to \infty)$$

Avšak dle první části $(*)$: $\boxed{x = y}$

a dle spojitosti

$$f(x^{n_k}) \to f(x) \underset{x=y}{=} f(y) \leftarrow f(y^{n_k})$$

neboli $f(x^{n_k}) - f(y^{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ což dává spor s druhou částí $(*)$.

■

Následující věta je první větou zaručující existenci minimizéru (maximizéru), tj. bodu, ve kterém funkce nabývá svého minima (resp. maxima). Důkaz věty je "blízký" důkazu zákadní věty moderní teorie variačního počtu.

$\boxed{\text{Věta 8.23}}$ Buď $f \in C(K)$, $\boxed{f : \mathbb{R}^d \to \boxed{\mathbb{R}\ !}}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak f nabývá v K minima a maxima.

Dk • Buď $m := \inf_{x \in K} f(x)$. Z Věty 8.21 plyne, že f je omezená a tedy $m > -\infty$.

Z definice m plyne existence $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ tak, že

$$(1) \qquad f(x^n) \searrow m$$

• Protože K je kompaktní: existuje $x \in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že
$$x^{n_k} \to x \quad \text{v } \mathbb{R}^d \ (k \to \infty)$$

• Protože $f \in C(K)$
$$f(x^{n_k}) \to f(x)$$
a porovnáním s (1): $\underline{f(x) = m}$ Tedy infimum se v K nabývá.

Podobně postupujeme v případě $M := \sup_{x \in K} f(x)$. ▨

Nadále uvažujeme $f : \mathbb{R}^d \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$. Pojem globální (lokální) minimum/maximum (extrém) je definován stejně jako pro f jedné reálné proměnné. Uvedeme si nyní nutnou a postačující podmínku existence (lokálního) minima (maxima).

$\boxed{\text{Věta 8.24}}$ (Nutná podmínka existence extrému) Nechť

- $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená;
- $f : M \to \mathbb{R}$ má v $x_0 \in M$ lokální extrém;
- f má v $U_\delta(x_0) \subset M$ první parciální derivace;

Pak
$$\underline{\nabla f(x_0) = 0} \qquad (d \text{ podmínek})$$

Dk Pro $i = 1, 2, \dots, d$ uvažuj fce

$g^i(t) : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ definované $\quad g^i(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}^i) = f(x_0 + te^i)$

Pak g^i mají v 0 lokální extrém

a dle Věty 4.1 (ZS): $(g^i)'(0) = 0$

Avšak

$$(g^i)'(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te^i) - f(x_0)}{t} \overset{\text{definice parciální derivace}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \text{a tvrzení plyne.}$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Věta } 8.25}$ (Postačující podmínka k existenci minima/maxima)

Nechť

(i) • $f \in C^2(U_\delta(x_0))$

(ii) • $\nabla f(x_0) = 0$

(iii) • $d^{(2)} f(x_0)(h, h)$ $\begin{cases} \text{positivně definitivní, tzn. } \boxed{d^{(2)} f(x_0)(h,h) > 0 \ \forall h \neq 0} \Updownarrow \boxed{\exists \alpha > 0 \ d^{(2)} f(x_0)(h,h) \geq \alpha |h|^2_{\mathbb{R}^d}} \\ \text{negativně definitivní,} \end{cases}$

Pak f má v bodě x_0 lokální $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}$

Dk Dle Taylorova rozvoje (s využitím (ii)):

$x = x_0 + h$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)} f(x_0 + \theta h)(h, h)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)} f(x_0)(h, h) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[d^{(2)} f(x_0 + \theta h) - d^{(2)} f(x_0)\right](h, h)}_{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right] h_i h_j}$$

Ze spojitosti druhých derivací: $\left| \quad \vdots \quad \right| \leq \frac{\alpha}{2} |h|^2$

pro $|h|$ dostatečně malé

Tedy

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{\alpha |h|^2 - \frac{\alpha}{2} |h|^2}_{\geq 0} \geq f(x_0) \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

což jsme chtěli ověřit. !!

$\blacksquare$

$\boxed{A = A^T}$

Druhý diferenciál $d^{(2)}f(x)(h,h)$ je kvadratická forma.

Řekneme, že kvadratická forma $Q(h,h) := h \cdot Ah = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} h_i h_j : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je

- positivně definitní $\stackrel{df.}{\equiv}$ $Q(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0$ (PD)
- negativně definitní $\equiv$ $Q(h,h) < 0 \quad \forall h \neq 0$ (PN)

$\left.\right\} h \in \mathbb{R}^d$

- indefinitní $\equiv$ $\exists h^1 \in \mathbb{R}^d \quad Q(h^1,h^1) > 0$ (IN)
  $\exists h^2 \in \mathbb{R}^d \quad Q(h^2,h^2) < 0$

Pozor! $Q(h,h)$ je

- positivně semidefinitní $\equiv$ $Q(h,h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$
- negativně —"— $\equiv$ $Q(h,h) \leq 0$ —"—.

Platí:

$$Q(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0,\ h \in \mathbb{R}^d \iff (\exists \alpha > 0)\left(Q(h,h) \geq \alpha |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d\right)$$

Dk $\boxed{\Leftarrow}$ přímo.

$\boxed{\Rightarrow}$ Množina $\{h \in \mathbb{R}^d;\ |h|_2 = 1\}$ je kompaktní v $\mathbb{R}^d$, $Q(h,h) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, a $Q(h,h)$ nabývá na $\{h \in \mathbb{R}^d;\ |h|_2 = 1\}$ minima, označme jej $\alpha > 0$.

Pak pro $h \neq 0$ libovolné

$$\frac{1}{|h|_2^2} Q(h,h) = Q\left(\frac{h}{|h|_2}, \frac{h}{|h|_2}\right) \geq \alpha > 0,$$

což implikuje $Q(h,h) \geq \alpha |h|_2^2 \quad \forall h \neq 0.$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ}}$ Pro $\boxed{d=2}$ je podmínka $d^{(2)}f(x)(h,h) > 0$ ekvivalentní zápisu

$$(\bullet) \qquad (h_1, h_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} > 0$$

$\left[x = \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2\right.$

Označme $A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \qquad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) \qquad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x)$

Pak $(\bullet)$ je ekvivalentní s

$$A h_1^2 + 2B h_1 h_2 + C h_2^2 > 0 \qquad \forall (h_1, h_2) \neq (0,0)$$

$\stackrel{h_1 \neq 0}{\iff}$ $\qquad\qquad$ $\stackrel{h_2 \neq 0}{\iff}$

$$A + 2B\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + C\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 > 0 \qquad\qquad C + 2B\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + A\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 > 0$$

nastane pokud

$\boxed{A > 0 \ \wedge \ B^2 - 4AC < 0}$ nebo $\boxed{C > 0 \ \wedge \ B^2 - 4AC < 0}$

Obecněji, pro $\boxed{d \geq 2}$ $d^{(2)}f(x)(h,h) > 0 \iff \underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_d > 0}_{\text{vlastní čísla } „D^{(2)}f(x)“}$

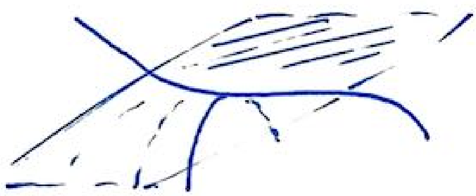
$< 0 \iff \lambda_1,\dots,\lambda_d < 0$

, indefinitní $\iff \lambda_1 > 0,\ \lambda_d < 0$

<u>Def.</u> Řekneme, že $x^0 = (x^0_1,\dots,x^0_d) \in \mathbb{R}^d$ je <u>sedlový bod</u> funkce $f \in C^2(U_\delta(x^0))$

pokud
- $\nabla f(x^0) = 0$
- $\exists\, h^1, h^2 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $d^2 f(x^0)(h^1,h^1) > 0$
  a $d^2 f(x^0)(h^2,h^2) < 0$

v $\boxed{d=2}$ nastane pokud $B^2 - 4AC > 0$ (viz str. 8/48)



<u>Pozorování</u> $\boxed{d=1}$
- $f'(x) = 0,\ f''(x) > 0 \implies$ v x lokální minimum $[f(x) = x^2]$
- $f'(x) = 0,\ f''(x) < 0 \implies$ v x lok. maximum $[f(x) = -x^2]$

$\boxed{d=2}$
- $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad \nabla f(x)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = (2x, 2y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0)$

  $Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad d^{(2)}f(0,0)(h,h) = 2h_1^2 + 2h_2^2$

  $\implies$ $\boxed{\text{v } (0,0) \text{ lokální minimum}}$

- $f(x,y) = -x^2 - y^2$ $\quad Hf(x)\Big|_{x=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies$ $\boxed{\text{v } (0,0) \text{ lokální maximum}}$

- $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad \nabla f(x) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

  $Hf(x)\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

  $h^{I} = (1,0) \implies d^2 f(0,0)(h^{I}, h^{I}) > 0$

  $\implies d^2 f(0,0)(\underset{\underset{(h_1,h_2)}{\parallel}}{h},h) = 2h_1^2 - 2h_2^2$ $\quad h^{II} = (0,1) = d^2 f(0,0)(h^{II}, h^{II}) < 0.$

  $\boxed{\text{v } (0,0) \text{ SEDLOVÝ BOD}}$

Pokud $d^2 f(x^0)(h,h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$, nelze nic říci o chování fce v okolí x^0, jak ukazují následující příklady:

(a) $f(x,y) = x^4 + y^4$ v $(0,0)$ minimum

(b) $f(x,y) = -(x^4+y^4)$ v $(0,0)$ maximum

(c) $f(x,y) = x^4 - y^4$ v $(0,0)$ sedlový bod.

Příklady ① Najděte a klasifikujte extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} + xy.$$

Řešení $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 0\}$

v D_f: $\nabla f(x,y) = \left(y + \frac{1}{y^2},\ x - 2\frac{x}{y^3}\right) = (0,0) \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y^3+1 = 0 \ \& \\ x(y^3-2) = 0 \end{array}}$

$\Leftrightarrow (y=-1) \wedge \boxed{x=0}$ $\qquad y^3+1 = (y+1)(y^2+y+1)$

Podezřelý bod: $\boxed{x^0 = (0,-1)}$

Hessián $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1-2y^{-3} \\ 1-2y^{-3} & 6xy^{-4} \end{pmatrix}$ $\overset{(x,y)=x^0}{\Longrightarrow}$ $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Také: ii $d^2 f(0,0)(h,h) = 3(h_1,h_2)\cdot(h_2,h_1) = 6h_1h_2$

$h^I = (1,1) \Rightarrow d^2 f(0,0)(h^I,h^I) > 0$

$h^{II} = (1,-1) \Rightarrow d^2 f(0,0)(h^{II},h^{II}) < 0$ $\Longrightarrow$

i $\boxed{\begin{array}{c} B^2-4AC = 9 > 0 \\ \Rightarrow \text{v } (0,-1) \\ \text{je sedlový bod} \end{array}}$

iii $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ charakteristická rovnice $+\lambda^2 - 1 = 0$

$\mathbb{A} := Hf(0,0)$

$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}}$

② Najděte a klasifikujte extrémy $f(x,y) = -xy\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

Řešení: (cvičení) $\boxed{D_f = \mathbb{R}^2}$ neboť
- $(x,y) \mapsto -\frac{x^2+y^2}{2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $(x,y) \mapsto -xy \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $t \mapsto e^t \in C^\infty(\mathbb{R})$

(a užiji věty o derivování, spojitosti součinu, složeného zobrazení.)

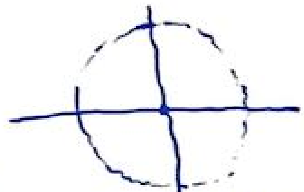
Nutná podmínka na extrém

$$0 = \nabla f(x,y) = \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left[-y + x^2 y\right],\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left[-x + xy^2\right] \right)$$

$$\iff \boxed{y(x^2-1)=0} \wedge \boxed{x(y^2-1)=0}$$

$$[y=0 \vee x=1 \vee x=-1] \wedge [x=0 \vee y=1 \vee y=-1]$$

Podezřelé body $[0,0], [1,1], [1,-1], [-1,-1], [-1,1]$



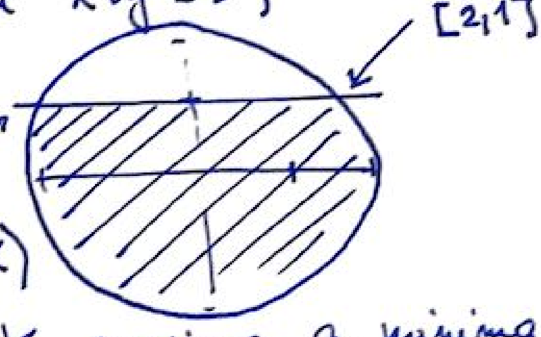
Hessián

$$H_f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} 2xy + yx - x^3y & x^2-1+y^2-x^2y^2 \\ y^2-1+x^2-x^2y^2 & 2xy+xy-xy^3 \end{pmatrix} = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \begin{bmatrix} 3xy - x^3y & x^2+y^2-1-x^2y^2 \\ x^2+y^2-1-x^2y^2 & 3xy - xy^3 \end{bmatrix}$$

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (0,0) je sedlový bod (neb $\underbrace{B^2-4AC}_{=1} > 0$) | $f(0,0) = 0$
- $H_f(1,1) = e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (1,1) je lokální minimum $\quad f(1,1) = -\frac{1}{e}$
- $H_f(1,-1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (1,-1) je bod lok. maxima $\quad f(1,-1) = \frac{1}{e}$
- $H_f(1,-1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (-1,1) —"— $\quad f(-1,1) = \frac{1}{e}$
- $H_f(-1,-1) = H_f(1,1) \Rightarrow$ (-1,-1) je lokální minimum $\quad f(-1,-1) = \frac{1}{e}$

Globální extrémy v $[-1,-1]$ a $[1,1]$ jsou globální minima
v $[1,-1]$ a $[-1,1]$ jsou globální maxima
neboť $|f(x,y)| \to 0$ pro $\|(x,y)\| \geq r$ a $r \to \infty$

③ Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x-y$ na množině $K := \{(x,y);\ y \leq 1 \ \text{ a } \ x^2+y^2 \leq 5\}$



Řešení
- K je uzavřená, omezená v $\mathbb{R}^2$ tedy kompaktní
- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ speciálně $f \in C(K)$

Tedy dle Věty 8.21 f nabývá na K maxima a minima.

Dále $\nabla f(x,y) = (1,-1) \neq (0,0)$ v $\mathbb{R}^2$

a tedy f nabývá maxima a minima na ∂K, kde

$$\partial K = \underbrace{\{(x,y);\ x \in (-2,2),\ y=1\}}_{\partial K_1} \cup \{[2,1],[-2,1]\} \cup \underbrace{\{(x,y);\ x^2+y^2=5 \wedge y<1\}}_{\partial K_2}$$

$\boxed{\text{Na } \partial K_1}$ $\left.\begin{aligned} f(x,y) &= x-1 =: g(x) \\ g'(x) &= 1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ podezřelé body $[2,1]$ a $[-2,1]$

3 podezřelé body

$\boxed{\text{Na } \partial K_2}$ $\begin{aligned} x &= \sqrt{5}\cos\varphi \\ y &= \sqrt{5}\sin\varphi \quad (<1) \end{aligned}$

$$h(\varphi) = \sqrt{5}(\cos\varphi - \sin\varphi)$$
$$h'(\varphi) = -\sqrt{5}(\sin\varphi + \cos\varphi) = 0 \iff \operatorname{tg}\varphi = -1$$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2},\ y = -\sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ & $y<1$

$x = -\frac{\sqrt{10}}{2},\ y = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1,$

VIZ DOKONČENÍ NA STRANĚ 8/54.

Vidíme, že výpočet není jednoduchý ani pro snadné funkce: potřebuji znát popis a parametrizaci hranice a vypočítat intervaly parametrizace.

$$\boxed{\text{Úkol: } \min_{(x,y)\in A} f(x,y) \quad \text{kde } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x,y) = 0\} \text{.... vazba}}$$

je tzv. úloha na vázané extrémy. K řešení takovýchto úloh lze využít s úspěchem metodu tzv. Lagrangeových multiplikátorů (značených λ ... Lagrange).

$\boxed{\text{Věta 8.26}}$ (Lagrangeova věta o multiplikátorech o vázaných extrémech)

Buď $f, g \in C^1(M)$, $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $d \geq 2$.

Buď $A := \{x \in M;\ g(x) = 0\}$. (VAZEBNÍ PODMÍNKA)

Buď $z^0 \in M$ takový, že $f(z^0) = \min_{z \in A} f(z)$ nebo $f(z^0) = \max_{z \in A} f(z)$

Buď $\nabla g(z^0) \neq 0$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\nabla f(z^0) = \lambda \nabla g(z^0)$.

„Dk" Dnes jen pro $\boxed{d=2}$

V okolí $z^0 = (x^0, y^0)$ si parametrizujeme body vazební podmínky parametrizací: $t \longmapsto (x(t), y(t))$ pro $t \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$,

tak, že $(x(0), y(0)) = (x^0, y^0)$.

Máme tedy

$$(*) \qquad g(x(t), y(t)) = 0 \quad \text{pro } t \in (-\delta, \delta)$$

Derivováním (*) dostáváme:

$$\nabla g(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$$

Speciálně pro $t = 0$:

$$(1) \qquad \nabla g(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0$$

Avšak (x^0, y^0) je extrém funkce f vzhledem k vazbě respektive její parametrizaci. Tedy

$$h(t) := f(x(t), y(t)) \text{ má v } t = 0 \text{ extrém,}$$

což implikuje

$$(2) \qquad 0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0))$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme

$$\nabla f(x^0, y^0) \parallel \nabla g(x^0, y^0)$$

Oba vektory jsou kolmé na $(x'(0), y'(0))$ a jsou tedy kolineární!

Tedy $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x^0, y^0) = \lambda \nabla g(x^0, y^0)$.

Ad Příklad (3) $\quad f(x,y) = x - y$
$\quad\quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 \quad \Longrightarrow$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ na $g(x,y) = 0$.

Nutné podmínky optimality:

$$\begin{aligned}
&\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \Longrightarrow \\
&\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad \Longrightarrow \\
&\bullet \quad g(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow
\end{aligned}
\quad
\boxed{\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x \\ -1 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}}$$

soustava rovnic pro x, y, λ.

což implikuje

$$\begin{aligned} 2\lambda(x+y) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \lambda = 0 \vee \boxed{y = -x} \\ \boxed{x^2 + y^2 = 5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x^2 = 5$$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \;\wedge\; y_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\qquad$ $y < 1$ jen pro $y_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

Podmínky $y = -x$ a $y < 1$ splňuje jen bod $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

Tedy celkově porovnáním hodnot v podezřelých bodech získáme odpověď na náš úkol:

$$f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \sqrt{10} > 3, \quad f(2,1) = 1, \quad f(-2,1) = -3$$

Tedy f nabývá globálního minima v bodě $[-2,1]$
a globálního maxima v bodě $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

8.7 O čtyřech hlubších (krásných) větách

(1) Banachova věta o pevném bodě

(2) Věta o implicitních funkcích

(3) Věta o inverzním zobrazení

(4) Lagrangeova věta o vázaných extrémech

8.7.1 BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODĚ A JEJÍ DŮSLEDKY.

Připomenutí: X je Banachův ≡ úplný normovaný vektorový prostor $(X, \|\cdot\|_X)$

$\forall$ cauchyovská $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v $(X, \|\cdot\|_X)$.

Definice Buď X množina. Řekneme, že zobrazení $T: X \to X$ má pevný bod pokud existuje $x_0 \in X$: $\boxed{Tx_0 = x_0}$

Věta 8.27 (BANACHOVA)

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův prostor a $T: X \to X$ kontrakce, tzn.

(K) $\exists\ \theta \in (0,1)$ tak, že
$$\|Tx - Ty\|_X \leq \theta\, \|x-y\| \quad \text{pro } \forall x, y \in X$$

Pak T má právě jeden pevný bod.

Pozorování
- Kontraktivní zobrazení je lipschitzovské zobrazení s konstantou lipschitzovskosti menší než 1.
- Lipschitzovské zobrazení je lipschitzovsky spojité zobrazení, tedy spojité.
- Tedy kontrakce nebo kontraktivní zobrazení je spojité zobrazení.

POZNÁMKA Věta platí v úplném metrickém prostoru (X, ϱ). Tvrzení sami přeformulujte !!

Dk Banachovy věty [1] $T: X \to X$ je spojité (neboť je kontraktivní)

[2] Jednoznačnost Kdyby T měl dva různé pevné body $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$, pak $Tx_1 = x_1$ a $Tx_2 = x_2$ a z podmínky (K) plyne

$$\|x_1 - x_2\|_X = \|Tx_1 - Tx_2\|_X \leq \theta \|x_1 - x_2\|$$

což implikuje

$$(1-\theta)\|x_1 - x_2\|_X \leq 0.$$

[3] Existence Volme $x_1 \in X$ libovolně a definujme

$$x_n := Tx_{n-1} \qquad n \geq 2.$$

Ukážeme, že takto definovaná posloupnost je cauchyovská. Protože X je úplný, tak existuje $x_0 \in X$ tak, že

$$x_n \to x_0 \quad v\ X$$

Ze spojitosti

$$\boxed{Tx_n \to Tx_0 \quad v\ X} \qquad (*)$$

Ale

$$\boxed{Tx_n = x_{n+1} \to x_0 \quad v\ X} \qquad (**)$$

z jednoznačnosti limity $Tx_0 = x_0$, což jsme chtěli ukázat.

[4] Zbývá ověřit, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská.

Avšak:

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \overset{(K)}{\leq} \theta \|x_n - x_{n-1}\|_X$$

$$\text{------} \leq \theta^{n-1}\|x_2 - x_1\|_X$$

Odsud: pro $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\|x_n - x_m\|_X = \|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \dots + x_{m+1} - x_m\|$$

(Δ-nerovnost)

$$\leq \|x_n - x_{n-1}\|_X + \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_X + \dots + \|x_{m+1} - x_m\|_X$$

$$\leq \underbrace{(\theta^{n-1} + \dots + \theta^{m-1})}_{\text{část konvergentní geometrické řady}} \|x_2 - x_1\|$$

(B-C podmínka pro geom. řadu)

$$\leq \varepsilon \|x_2 - x_1\| \Rightarrow \{x_n\} \text{ je cauchyovská.}$$