

Domácí úkol č. 7

Termín odevzdání: 23.11.2020 poledne

1. Pro reálné konstanty a, R splňující $a \geq R\sqrt{2} > 0$ spočtete objem tělesa ohraničeného plochami

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Předpokládejte, že počátek souřadnic $[x, y, z] = [0, 0, 0]$ je součástí hranice tělesa.

2. Spočtete objem tělesa ohraničeného plochami

$$2x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{9}, \quad 2x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Předpokládejte, že těleso je konvexní a pro všechny body $[x, y, z]$, které do tělesa patří, platí $z \geq 0$.

3. Kvádr se čtvercovou podstavou s délkou strany $a > 0$ je naplněn plynem. Dno kvádrů leží v rovině $z = 0$, výška kvádrů je rovna konstantě $h > 0$. Na dně kvádrů má tlak konstantní hodnotu $p_0 > 0$, hustota konstantní hodnotu $\rho_0 > 0$. Konstanta $g > 0$ značí velikost tíhového zrychlení.

Předpokládejte, že:

- Pro hustotu $\rho = \rho(z)$ a tlak $p = p(z)$ platí

$$p(z) = \int_z^h \rho(\tilde{z})g \, d\tilde{z}.$$

- Pro plyn platí stavová rovnice

$$\frac{p\rho}{\theta} = \text{konst.}$$

- Systém je izotermální, tedy teplota $\theta > 0$ je konstantní.

Úkoly:

- Odvoďte formuli $\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz}$.
- Spočtete hmotnost plynu uvnitř kvádrů.