Jméno a příjmení: ____________________

| Příklad | 1 | 2 | 3 | Celkem bodů |
|---|---|---|---|---|
| Bodů | 8 | 8 | 8 | 24 |
| Získáno | | | | |

[8] 1. Buď $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ omezená funkce, přičemž $-\infty < a < b < \infty$.

1,5b (1) Zadefinujte horní a dolní Riemannův součet $S(D; f)$ a $s(D; f)$ a vysvětlete, proč jsou tyto součty vždy konečné.

2b (2) Zadefinujte poté horní a dolní Riemannův integrál a ukažte, že tyto integrály za předpokladu na omezenost $F$ uvedenou výše vždy existují.

1,5b (3) Uveďte definici Riemannova integrálu a zformulujte přesně podmínku pomocí horních a dolních Riemanových součtů, která je ekvivalentní existenci Riemannova integrálu.

1b (4) Uveďte příklad omezené funkce na intervalu $(0, 1)$, která nemá Riemannův integrál. Vysvětlete, proč tato funkce Riemannův integrál nemá.

2b (5) Uveďte přesně (dvě různé) podmínky na funkci $f$, které zaručují existenci Riemannova integrálu funkce $f$. Naznačte důkaz pro jeden případ.

**Řešení** (1) $D$ … dělení $\langle a,b\rangle$ $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \to$ konečný počet

$m_i := \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$, $\quad M_i := \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$ $\quad i=1,\dots,N$ → konečná čísla

Horní R. Σ: $S(D;f) := \sum_{i=1}^{N} M_i (x_i - x_{i-1}) < +\infty$ } konečný součet reálných čísel.

Dolní R. Σ: $s(D;f) := \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_{i-1}) < +\infty$

(2) Protože platí: je-li $D_1$ zjemnění $D_2$ $\Rightarrow$ $m(b-a) \le s(D_2;f) \le s(D_1;f) \le S(D_1;f) \le S(D_2;f) \le M(b-a)$

tak • $\sup_D s(D;f)$ existuje a je konečné (ozn. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$)

• $\inf_D S(D,f)$ —"— (ozn. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$)

(3) $\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx \text{ existuje} \overset{\text{df}}{\equiv} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists D \text{ dělení}: S(D;f) - s(D;f) < \varepsilon}$

(4) Dirichletova funkce: $D(x) = \begin{cases} 0 & x\in\langle 0,1\rangle \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\underline{\int_0^1} D(x) = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} D(x)\,dx.$

(5) [a] $\boxed{f \in C(\langle a,b\rangle)}$ (Dk) $\Rightarrow$ $f$ stejn. spojitá na $\langle a,b\rangle$ $\Rightarrow$ ekvidistantní dělení takové, že $\forall x',x''$ $|x'-x''| < \frac{b-a}{N}$ $\Rightarrow$ $|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow S(D,f) - s(D,f) \le \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\frac{b-a}{N}\cdot N = \varepsilon$

[b] $\boxed{f \text{ omezená a monotónní na } \langle a,b\rangle}$ (Dk) $f$ neklesající

$S(D,f) - s(D,f) = \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{b-a}{N}} = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{b-a}{N} = [f(b)-f(a)]\frac{b-a}{N} < \varepsilon$

pro $N$ dost velké.

[8] 2. Uvažujte posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(1) Zadefinujte pojmy *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* a *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *osciluje*.

(2) Zadefinujte pojmy *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně* a *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně*. Uveďte příklad řady, která konverguje neabsolutně, ale nekonverguje absolutně. Charakterizujte absolutní a neabsolutní konvergenci pomocí konvergencí řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Zadefinujte symboly $x^+$ a $x^-$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(3) Zadefinujte pojem *přerovnání řady*.

(4) Jaká tvrzení platí pro přerovnání absolutně konvergentních řad a neabsolutně konveregentních řad. Tvrzení zformulujte.

2

2,5

1,5

2

Řešení $\boxed{\text{Ad (1)}}$ $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ 0.5

posl. n-tých částečných součtů

0.5 $\cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ KONV $\equiv \lim_{n\to\infty} S_n$ existuje a je vlastní

0.5 $\cdot \sum a_i$ DIV $\equiv \lim_{n\to\infty} S_n = +/-\infty$

0.5 $\cdot \sum a_i$ OSCILUJE $\equiv \limsup S_n \neq \liminf S_n$

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ $\sum a_n$ konverg absolutně $\equiv$ 0.5

0.5 $\sum |a_n|$ KONV. $\iff \sum a_n^+ < +\infty \wedge \sum a_n^- < \infty$ 0.5

$\sum a_n$ konverguje neabsolutně $\equiv \sum_1^{\infty} a_n$ KONV, a $\sum_1^{\infty} |a_n| = +\infty$. 0.5

$\iff \sum a_n^+ = +\infty \wedge \sum a_n^- = +\infty$

$x^+ = \max\{x, 0\}$ 0.5

$x^- = \max\{-x, 0\}$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Buď $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$ prosté. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ je přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1,5

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ 1 $\{ \sum a_n$ KONV. ABSOLUTNĚ $\Rightarrow \sum a_{\varphi(n)}$ KONV. ABSOLUTNĚ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1 $\{ \sum a_n$ KONV. NEABSOLUTNĚ $\overset{\text{Riemann}}{\Rightarrow} \forall A \in \mathbb{R}^* \; \exists \varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$ prosté

takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = A$

[8] 3. (1) Zadefinujte pojem parciální derivace prvního a druhého řádu pro skalární funkci $f$ více proměnných. 1 0.5 1,5b

(2) Zformulujte a dokažte tu Lagrangeovu větu o střední hodnotě, pomocí které lze dokázat implikaci: 1,5b

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in M \subset \mathbb{R}^d \implies \exists C \in \mathbb{R} : f(x) = C \quad \text{pro všechna } x. \qquad (*)$$

(3) Za jakých předpokladů na $M$ tvrzení (*) platí? Uveďte definice pojmů, které ve formulaci předpokladů použijete. otev. , souvislé 2b

(4) Dokažte (*). 1,5b

(5) Pro funkci $f \in C^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^d$ napište Taylorův polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku. 1,5b

Řešení (1) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he^i) - f(x)}{h}$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$, kde $g^{(x)} := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ existuje v okolí $x$.

(2) $\boxed{\text{LVOSH}}$ $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $g(t) := f(x + t(y-x))$

(4) Dk $f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \nabla f(x + \theta(y-x)) \cdot (y-x)$

(3) kde $\nabla f(z)$ existuje v $\Omega$ otevř., souvislé ($\forall x, y \in \Omega$ existuje lom. čára, která je spojuje a leží v $\Omega$)

$\forall x \in \Omega\ \exists B_\varepsilon(x)$ $(\exists \varepsilon) \cdot B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ otevřené $\varepsilon$ okolí

(5) $f(y) - f(x) = g'(0) + g''(\theta) = \nabla f(x) \cdot (y-x) + \nabla^2 f(x + \theta(y-x))(y-x) \cdot (y-x)$

$f(y) = f(x) + df(x)(y-x) + d^2 f(x + \theta(y-x))(y-x, y-x).$