

Pro $x \in \mathbb{R}$ umíme odpovědět otázku, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje, diverguje či osciluje.

Srovnání, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ konverguje dle kritéria d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{|x|^n} < 1,$$

což je ekvivalentní pořadovce $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, dohodně,

dle **Kritéria AK \Rightarrow K**, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje pro $x \in (-1, 1)$ (dozorce absolutně)

Dále víme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n}$ neklesne nebo není nulové pro $x \in \mathbb{R}$ taková, že $|x| > 1$.
 (Pro $x > 1$, postupně $\left\{ \frac{x^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje
 Pro $x < -1$, $-\infty$ $\left\{ \frac{x^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje)

Tedy, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pro $x > 1$ diverguje a pro $x < -1$ nekonverguje (osciluje). Zbývají body $x = \pm 1$.
 Pro $x = 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad 11), takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (ale ne absolutně), viz Příklad 12.

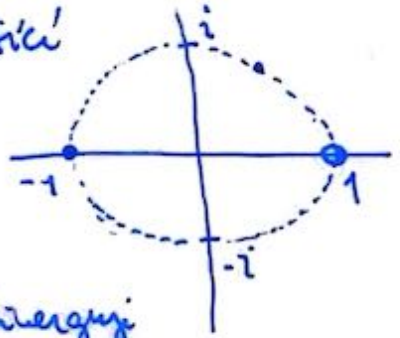
Motivací pro další výsledek bude otázka: Pro jaká $z \in \mathbb{C}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje, diverguje, osciluje?

Protože pro $z \in \mathbb{C}$: $z = |z|e^{i\varphi}$ $\varphi \in (0, 2\pi)$
 a $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \cos n\varphi + i|z|^n \sin n\varphi$

tak stejnými metodami jako pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$, zjistíme, že

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (dozorce absolutně) pro $|z| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ diverguje, nebo osciluje pro $|z| > 1$.

Zbývá vyšetřit $\{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$ tzn. z ležící na jednotkové kružnici neboli z tvaru $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.



Přitom víme, že na jednotkové kružnici je bod ($z=1$), kdy řada diverguje a bod ($z=-1$), kdy řada konverguje.

jednoduché
zvrstvení

Zajímá nás tedy co se děje v ohraničených bodech řady.
Připomeňme si, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ je ekvivalentní řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$.

Všimněme si, že tyto řady lze psát ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = e^{in\varphi}$ či $\sin n\varphi$ nebo $\cos n\varphi$.

Řadami typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ se nyní budeme zabývat. Začneme jedním technickým tvrzením, které lze interpretovat jako diskrétní verzi integrace per-parses.

Lemma (Diskrétní verze integrace per-parses) Pro $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$

platí: $\sum_{k=1}^m a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$ kde $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$.

(Dě) Protože $b_1 = B_1$ a $b_k = B_k - B_{k-1}$ pro $k \geq 2$, píšeme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k b_k &= \sum_{k=2}^m a_k (B_k - B_{k-1}) + a_1 B_1 \\ &= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \dots + a_m B_m - a_m B_{m-1} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \square \end{aligned}$$

Stejně, když sčítáme v Lemmatu od $k=1$, nehleďme v daném řádku roli; máme tedy také: } pro $m > n \in \mathbb{N}$ oť:

(6) $\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$ kde $B_k = \sum_{i=n+1}^k b_i$

Věta 6.11 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)

Bud' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ monotónní. Bud' $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Dále uvažt:

[DİR] $a_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezenou posloupnost číselných součtů,

[ABEL] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezené a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Pat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Dě Chceme ukázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje B.-C. podmínku: K danému $\varepsilon > 0$ hledáme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m \geq n \geq n_0: \sum_{k=n}^m a_k b_k < \varepsilon$.

Definujeme-li $B_k := \sum_{i=1}^k b_i$, tak z předchozí lemmy a (6) dostáváme:

$$(*) \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| \leq |a_m| |B_m| + \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |B_k| \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k|$$

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, tak $|a_{k+1} - a_k| = \begin{cases} a_{k+1} - a_k & \text{je-li } \{a_k\} \text{ roste} \\ a_k - a_{k+1} & \text{je-li } \{a_k\} \text{ klesá} \end{cases}$
 resp. $\begin{cases} \text{roste} \\ \text{klesá} \end{cases}$

Tedy $\{|a_{k+1} - a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ je klesající a platí:
 $\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = |a_m - a_{n+1}|$

Tedy odhad a z (*):

$$(**) \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| \leq 3 \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |a_k| \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |B_k|$$

K vyjádření danému $\varepsilon > 0$, za předpokladu (DİR), $\exists M > 0$ tak, že $\forall k \geq 1 \quad |B_k| \leq M$, a také existuje n_0 tak, že $\forall m \geq n \geq n_0: \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Tedy z (**): $\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| < \varepsilon$

Za předpokladu (ABEL), $\exists L > 0$ tak, že $\forall k \geq 1 \quad |a_k| < L$ a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme A B.-C. podmínky pro konvergující řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tak, že pro $m \geq n \geq n_0: |B_k| < \frac{\varepsilon}{3L}$.
 Tedy opět A (**): $\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| < \varepsilon$. ▣

Příklady 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ první konverguje, neboť dle Dirichletova kritéria posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a splňuje posloupnost číselných součtů posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $b_n = e^{in\varphi}$ je omezená. Avšak A Gaussova věta pro součet geometrické řady máme

$$S_n := \sum_{k=1}^n e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

$$\text{Tedy } |S_n|_C \leq |e^{i\varphi}|_C \frac{|1 - e^{i(n+1)\varphi}|_C}{|1 - e^{i\varphi}|_C} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|_C} =: M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{zde jsme využili: } |1 - \cos\varphi - i\sin\varphi|_C^2 = (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \geq (1 - \cos\varphi)^2$$

Speciálně jsme tak učinili, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$.

14) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \arctg k$ konverguje neboť:

• $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} := \{\arctg k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená a monotónní

• pro $b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konverguje dle Leibnizova kritéria.

15) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje, neboť $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$

$$\text{a tedy } \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos 2k}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k} \right] \quad (*)$$

protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ konverguje dle Dirichletova kritéria. Ověřte.

Kdyby $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ konvergovala, tak z (*) by plynilo, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konverguje;

což je spor a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje.

6.3 Mohutnost (cardinalita) čísel. Přerovnáni řád.

Bud $M \neq \emptyset$ množina prvků. Mohutnost množiny udává počet prvků množiny M . Ačkoliv jsme zvyklí porovnávat počty prvků v každodenním životě, i tento proces našeho myšlení vyžaduje jistou abstrakci a „stotožnění“. Cílem našich pohledů bude porovnat mohutnost nekonečných množin.

Definice Řekneme, že $\emptyset \neq M$ je konečná, pokud existuje $L \in \mathbb{N}$ a existuje $\varphi: N_L \xrightarrow{na} M$ podle, kde $N_L := \{m \in \mathbb{N}; m \leq L\}$.

Množina M je

- nekonečná, není-li konečná
- spčetně (nekonečná), jestliže existuje $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{na} M$ podle.
- spčetná je-li konečná nebo spčetně nekonečná
- nespčetná, není-li spčetná.

Georg Cantor

D. Hilbert (1900): „Ničto máš nevyžene z ráje, který pro nás připravil Cantor.“

Příklad Uvažujme $N_{sudí} = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$. Paž z množinového pohledu $N_{sudí} \not\cong \mathbb{N}$. Z pohledu cardinality, tj. kolik prvků tyto množiny mají, jsou však $N_{sudí}$ a \mathbb{N} stejně velké neboť $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow N_{sudí}$ definované $\varphi(k) = 2k$ je podle a na.

Věta 6.12 Peati:

- Jsou-li S a T spčetné, paž $S \cup T$ a $S \times T$ jsou spčetné.
- \mathbb{Z}, \mathbb{Q} jsou spčetné.
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ jsou nespčetné.

Dě **A2(i)** Necht $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $T = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme-li

φ následicem

$$\varphi(2n) = s_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

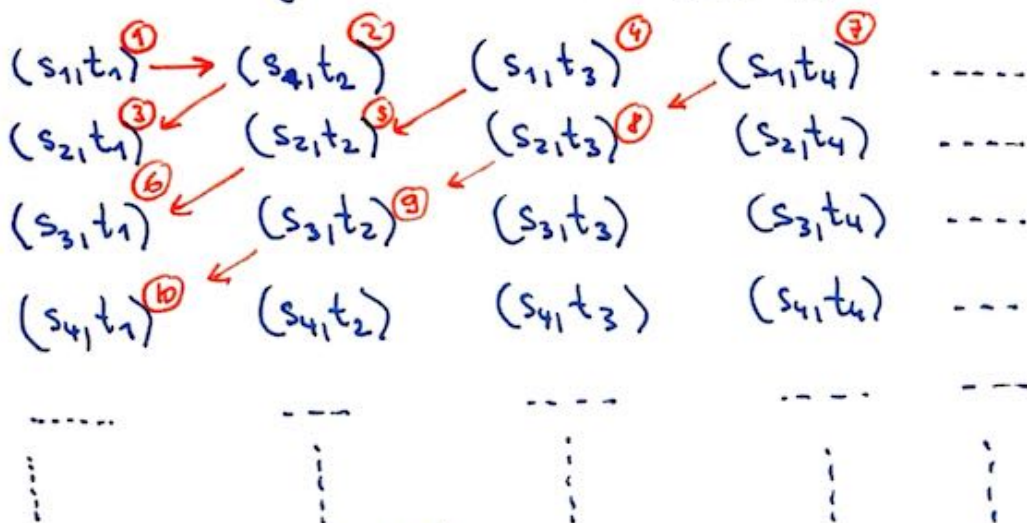
$$\varphi(2n-1) = t_n$$

paž $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{na} S \cup T$ podle

Tedy $S \cup T$ je spčetně nekonečná.

V případě $S \times T := \{ (s_j, t_k); j=1,2,\dots; k=1,2,\dots \}$ si pomůžeme

obrázkem. Každý prvek (s_j, t_k) ve zobrazení:



Zobrazení φ přiřadí $m \in \mathbb{N}$ prvek (s_j, t_k) , který má u sebe (červený) kroužek (m) . Toto zobrazení je podle a na.

Ad (ii) • \mathbb{Z} mají stejnou mohutnost jako \mathbb{N} neboť zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definované:

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 \\ \varphi(2k) &= k \\ \varphi(2k+1) &= -k \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N}$$

je podle a na.

• \mathbb{Q} chápeme jako množinu $\left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N} \right\}$
 (s tím, že $\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \dots$ chápeme jako odlišné prvky)
 pak \mathbb{Q} lze zobrazit do $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, což je dle předchozího spočetná množina.

Ad (iii) chceme ukázat, že \mathbb{R} je nespočetná.
 Uvažujme nejdříve uzavřený interval $S := \langle 0, 1 \rangle$. S je buď spočetná (tzn. spočetně nekonečná) nebo nespočetná. Předpokládejme, že S je spočetná. Každý prvek $x \in S$ lze reprezentovat ve tvaru desítkového rozvoje $0.d_1d_2d_3\dots d_n\dots$, kde $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.
 (vyloučíme čísla typu $0.d_1\dots d_n\bar{9}$ (abychom se vyhnuli nejednoznačnosti))
 s výjimkou $1 = 0.\bar{9}$)

Z předchozího, že S je spočetná plyne, že každý $x \in S$ lze upřesňovat do poloprůstředku: $\varphi(k) = x_k = 0.d_{k1}d_{k2}\dots d_{kn}\dots$

Máme tedy:

$$(T) \begin{array}{l} x_1 = 0. d_{11} d_{12} d_{13} \dots d_{1k} \dots \\ x_2 = 0. d_{21} d_{22} d_{23} \dots d_{2k} \dots \\ \vdots \\ x_k = 0. d_{k1} d_{k2} d_{k3} \dots d_{kk} \dots \end{array}$$

Dle předpokladu (S spočetná) by každé číslo $A \in S$ mělo být v seznamu (T). Zaujmeme se, tak jako Cantor, na prvky na diagonále^{*)}, tj. d_{kk} , a vytvoříme číslo y tvaru

$$(*) \quad y = 0. c_1 c_2 \dots c_k \dots$$

kteří patří do S , ale nebude prvkem tabulky (T). Tato tabulka však měla obsahovat všechny prvky S , kdyby S byla spočetná. Máme tedy spor a S musí být nespočetná. Nyní tedy ke konstrukci y tvaru (*) nepřidáme do (T). Zvolme si 2 čísla $\in \{1, 2, \dots, 8\}$, například 1 a 6. Definujme y tvaru (*) takto:

$$\begin{array}{l} \text{Je-li } d_{kk} = 1, \text{ pak položíme } c_k = 6 \\ \text{Je-li } d_{kk} = 6, \text{ pak položíme } c_k = 1. \end{array}$$

Takto vytvořené y patří do S , ale neshoduje se s žádným prvkem z (T).

Tedy $(0, 1)$ je nespočetná, a také $(0, 1)$ je nespočetná.

[Přetvoříme $\text{cotg} \pi x : (0, 1) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ podle a $(0, 1)$ je nespočetná, takže je \mathbb{R} také nespočetná.]

[Dle (i) je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a také $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ nespočetná (se stejnou mohutností jako \mathbb{R}).

[Přetvoříme \mathbb{C} je izomorfní s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ má i \mathbb{C} a také $\mathbb{C}^k = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ stejnou mohutností jako \mathbb{R} .]



*) Metody tohoto typu se často nazývají Cantorova diagonalizace

• M, \emptyset jsou stejné mohutné (mají stejnou kardinalitu) $= \exists \varphi: M \xrightarrow{\text{bij.}} \emptyset$ podle.

• Mohutnost (kardinalita) množiny M se označuje často $|M|$, tedy stejným symbolem jako absolutní hodnota nebo míra množiny (budeme mít pořadí). **POZOR!**

• Mohutnost \mathbb{N} se označuje \aleph_0 (= hebrejské abecedy... aleph nula)
tedy $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

• Je-li X množina, pak $\mathcal{P}(X) := \{A; A \subset X\}$ je tzv. potenční množina
(angl. power set) ... systém všech podmnožin

► Je-li X konečná, pak je $|\mathcal{P}(X)| > |X|$

► $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| =: \aleph_1 > \aleph_0$

↑
aleph jedna

Množina všech podmnožin přirozených čísel je stejně mohutná jako množina reálných čísel

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > \aleph_1 = |\mathbb{R}|$$

► Otevřeným problémem axiomatiké teorie množin je tzv. "hypotéza kontinua": neexistuje řádové (kardinalní) číslo c , které leží mezi \aleph_0 a \aleph_1 .

Cantor:

• Počet bodů na úsečce je stejně jako počet bodů ve čtverci.

Prerovnáni řad

Definice Necht $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (nebo \mathbb{C}) a $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}$ podle.

Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazýváme prerovnaním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Věta 6.13 Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je absolutně konvergentní a

je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ její prerovnáni. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje absolutně

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Dě **Ad konvergence** Pro dané libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $m_0 \in \mathbb{N}$:
 $\sum_{n=m_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Definujeme $m_0 := \max \{ \varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(m_0-1) \}$.

Paž pro $m \geq m_0$ platí $\varphi(m) \geq m_0$ a tedy
 $\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |a_{\varphi(m)}| \leq \sum_{n=m_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$ a tedy $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|$ konverguje.

Ad součet Označme $s := \lim_{n \rightarrow \infty} S_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
 a $t := \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$

Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $m_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=m_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ a $\sum_{k=m_0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| < \varepsilon$.

Nyní najdeme $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\boxed{m_0 \geq m_0}$, $\boxed{\{1, \dots, m_0-1\} \subset \{\varphi(1), \dots, \varphi(m_0)\}}$
 $\boxed{\{\varphi(1), \dots, \varphi(m_0-1)\} \subset \{1, \dots, m_0\}}$

Paž pro $m \geq m_0$:
 $|S_m - t_m| = \left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^m a_{\varphi(k)} \right| \leq \sum_{k=m_0}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=m_0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| < 2\varepsilon$ \square

Jiný dě **Krok 1** Doplňme nejdrive tvrzení pro $a_n \geq 0$. Paž
 $\{a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(m)}\} \subset \{a_1, \dots, a_m\}$ pro $M \in \mathbb{N}$ dobře zvolené veliči.

Tedy $0 \leq \sum_{k=1}^m a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^M a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{M \in \mathbb{N}} S_M =: s < +\infty$

Tak $t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} \leq s < \infty$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje.

Nyní vyjdeme a doložíme to a že skutečně, i
 $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \{a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(L)}\}$ pro L dobře zvolené veliči.

Tedy $0 \leq \sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^L a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = t \Rightarrow \boxed{s \leq t}$

$\boxed{s=t}$ **Krok 2** Jsou-li $a_n \in \mathbb{R}$, paž $a_n = a_n^+ - a_n^-$ a $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$,

kde $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Protož $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje,
 taž konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Dle **kroku 1** i taž

konverguje taž $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^-$ a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$
 Tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Príklad, ktorý ukazuje, že pre neabsolútne konvergentní řády věta 6.13 neplatí

Řada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots)$ definována předpisem

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} \quad \text{a} \quad a_{2k} = -\frac{1}{k}. \quad \text{Pak } S_{2k} = 0 \quad \text{a} \quad S_{2k-1} = \frac{1}{k}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Uvažujme přerovnaní

$$\{a_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \dots)$$

definované takto:

$$a_{\varphi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\varphi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\varphi(3k)} = -\frac{1}{k}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \underline{S_{3k}} &= \sum_{\ell=1}^{3k} a_{\varphi(\ell)} = \sum_{\ell=1}^k \{a_{\varphi(3\ell-2)} + a_{\varphi(3\ell-1)} + a_{\varphi(3\ell)}\} \\ &= \sum_{\ell=1}^k \left(\frac{1}{2\ell-1} + \frac{1}{2\ell} - \frac{1}{\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^k \frac{2\ell + (2\ell-1) - 2(2\ell-1)}{2\ell(2\ell-1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{(2\ell-1)2\ell} = \sum_{\ell=1}^k \left(\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2\ell} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \Big|_{x=1} = \ln(x+1) \Big|_{x=1} \\ &= \underline{\ln 2} \end{aligned}$$

Protože $S_{3k+1} - S_{3k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ a $S_{3k+2} - S_{3k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$,

tak $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ existuje a rovná se $\ln 2$.

Vidíme, že přerovnaním konvergentních řad mohou dostat jiné výsledky. Následující Riemannova věta, že lze vhodným přerovnaním dostat jakýkoliv výsledek, i $+\infty$.
JAKÝTO rozdíl opoti absolútne konvergentní řádkm!

* neabsolútne

Věta 6.14 (Riemannova věta o přerovnění neabsolutně konvergentních řad) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Pak pro každé $s^* \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnění $\triangleright \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s^*$.

(Dě) Připomeňme si ujednotěné značení: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0$
 $x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$

a tedy $x = x^+ - x^-$ a $|x| = x^+ + x^-$.

► Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$

Tvrdíme, že nutně z neabsolutní konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ plyne:

(+) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$

Kdyby totiž $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergovaly, tak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, ale to neplatí.

Kdyby jedna z řad divergovala a druhá konvergovala, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje. Platí tedy (+).

► Pro dané $s^* \in \mathbb{R}$, bereme vhodně členy tak dlouho až jejich součet je větší než s^* , pak přidáváme záporné prvky až se dostaneme pod s^* , pak vhodně, pak záporné, ...

Otázka: Jak budeme postupovat je-li $s^* = +\infty$ či $s^* = -\infty$? ▣

POZOR! S neabsolutně konvergujícími řadami je třeba pracovat obzvláště opatrně, jak ukazuje příklady připravené na stránkách kurzu Vitem Průšon. Nevhodné manipulace (které zdánlivě působí věrohodně) mohou vést k identitám typu $\ln 2 = 2 \ln 2$ či $\ln 2 = 0$.

Součin řád

Definice Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ jsou dvě řady komplexních čísel. Pak symbolům $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ rozumíme Cauchyův součin řád,

definovaný předpisem

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right) = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$$

pro podější použití

Otázka: (1) Kdy $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ (ve smyslu Cauchy) konverguje?

(2) kdy a zda platí: $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)$?

Věta 6.15 (Mertensova věta) Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak Cauchyův součin řád $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ konverguje a vztah (2) platí.

Důkaz: Označme $c_k := \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j$, $B_K := \sum_{k=1}^K b_k$, $A_K := \sum_{k=1}^K a_k$,
 $B := \lim_{K \rightarrow \infty} B_K$, $A := \lim_{K \rightarrow \infty} A_K$

Cílem je ukázat, že $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k$ existuje a rovná $AB = \lim_{K \rightarrow \infty} A_K B$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K c_k &= \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right) = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + \dots + (a_k b_1 + \dots + a_1 b_k) \\ &= a_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_k) + a_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) + \dots + a_k b_1 \\ &= a_1 B_K + a_2 B_{K-1} + \dots + a_k B_1 \\ &= A_K B + a_1 (B_K - B) + a_2 (B_{K-1} - B) + \dots + a_k (B_1 - B) \\ &= A_K B + \sum_{j=1}^K a_{k+1-j} (B_j - B) =: \gamma_K \end{aligned}$$

ZBÝVÁ UKÁZAT, ŽE $\lim_{K \rightarrow \infty} \gamma_K = 0$

Volme $\varepsilon > 0$ pevně, ale libovolně. Pak z $(B-C)$ podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, plyne existence $K_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq K_0 : |B_k - B| < \varepsilon$.

Pak

$$|s_k| \leq \left| \sum_{j=1}^{K_0} a_{k+1-j} (B_j - B) \right| + \left| \sum_{j=K_0+1}^k (a_{k+1-j}) (B_j - B) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{K_0} |a_{k+1-j}| |B_j - B| + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \right) =: \tilde{A}$$

Protože $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1-j} = 0$, tak existuje $K_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq K_1 + 1 - K_0$

$$|a_k| \leq \frac{\varepsilon}{K_0 \max_{j \in \mathbb{N}} |B_j - B|}$$

Pak pro $k \geq K_1$: $|s_k| \leq K_0 \cdot \frac{\varepsilon}{K_0} + \varepsilon \tilde{A} = \varepsilon (\tilde{A} + 1)$. ▣

Věta 6.16 Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních

řad je absolutně konvergentní.

(Dt) Aplikací Věty 6.15 na $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ dostáváme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k |a_{k+1-j}| |b_j| \right) \text{ konverguje.}$$

(Protože $\forall k \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k |a_{k+1-j}| |b_j| \right),$$

tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right|}_{c_k}$ konverguje. ▣

(Proti) příklad

Bud' $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pak máme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují neabsolutně. Ukážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ nekonverguje.

Rěšen! Řada $a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$

$$1 - \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{c_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}_{c_2} + \dots$$

a platí $c_{2k-1} \geq 1$ pro všechna k , což dává nekonvergenzi $\sum c_k$ dle Věty 6.1.

Vstutěm: $c_{2k-1} = \frac{1}{k} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{j} \sqrt{2k-j}} \geq \frac{1}{k} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k-1} \sqrt{2k}} \geq \frac{1}{k} + \sqrt{2} \frac{k-1}{k}$ ▣

6.4. Mocninne řady

Definice (Mocninna řada) Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ je mocninna řada se středem v z_0

Příklad Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je mocninna řada s $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Již dříve jsme uvažovali, že tato řada konverguje absolutně pro $|z| < 1$; A také, že pro $|z| > 1$ nekonzverguje a $C = \{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$, jednotková kružnice vytváří rozhraní. Tuto situaci zobecňuje Věta 6.17 níže.

Poznámka • Mocninna řada je speciální případ řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$; zde $f_n(z) = a_n (z-z_0)^n$. Zkoumat vlastnosti posloupnosti funkcí a řad funkcí budeme systematicky v dalším semestru.

- Mocninne řady patří mezi důležité kapitoly Komplexní analýza, tj. analyty funkcí komplexní proměnné.
- Teorie mocninnych řad je tedy důležitá.

Věta 6.17 Necht $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Položme

$$(*) \quad R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty] \quad \left(\begin{array}{l} \text{tedy včetně } +\infty, \text{ které} \\ \text{dostaneme, je-li } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{array} \right)$$

Pak:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně na $B_R(z_0)$ a nekonzverguje na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| > R\}$

(ii) existuje-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$

(iii) existuje-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$.

Definice R definované (*) se nazývá poloměr konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Umluva Označíme-li $w := z-z_0$, pak posunutí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se převede na $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ se středem v počátku.

Nadále: $z_0 = 0$

Důkaz věty 6.14 **Ad (i)** Tvůrce plyne z odvozeného kritéria (Věta 6.4) pro $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n$. Tato řada konverguje právě když $\exists \rho \in (0,1)$ $\sqrt[n]{|a_n| |z|^n} \leq \rho$ pro $n \geq n_0$ a diverguje pokud $\sqrt[n]{|a_n| |z|^n} \geq 1$ pro $n \geq n_0$.

Auřať:

pro $\forall \varepsilon > 0$ a pro n dostatečně velká

$$\bullet \sqrt[n]{|a_n| |z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} |z| \leq \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} + \varepsilon \right) |z| = \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) |z|$$

vložíme $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}$

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R} \right) |z| = 1.$$

• Naopak pro $R \in (0, +\infty)$ a $|z| > R$:

$$\sqrt[n]{|a_n| |z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} |z| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon \right) |z| \geq 1$$

pro nekonečně mnoho indexů

$$\text{pro } \frac{1}{R} - \frac{1}{|z|} > \varepsilon$$

Ad (ii) Necht $\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Pak pro $z \in \mathbb{C}$ první platí

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho |z|.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria, pro první $z: |z| < \frac{1}{\rho}$ je $\rho |z| < 1$ a když dle věty 6.5 řada konverguje. Naopak pro $|z|: |z| > \frac{1}{\rho}$ musí platit podmínka (ii) věty 6.5 a řada nekonzverguje. Tedy $R = \frac{1}{\rho}$.

Ad (iii) plyne z věty 6.4 (odvozené kritérium) nebo přímo z definice R .

Příklad uvažme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{5^n}$, $z \in \mathbb{C}$. Zde $a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché} \\ \frac{1}{5^n} & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$.

$$\text{Pak } \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5^n} \right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tedy řada $\sum \frac{z^{2n}}{5^n}$ má poloměr konvergence $\frac{1}{\sqrt{5}}$.