§7 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Ve vědě a inženýrství jsou formulovány matematické modely k porozumění fyzikálních, chemických, biologických, ekonomických a jiných přírodních jevů. Tyto matematické modely často zahrnují rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámé (hledané) funkce. Takovéto rovnice se nazývají DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE (DR).

Je-li neznámá funkce y závislá jen na jedné (reálné) proměnné, řekněme $x \in (a,b)$, a v DR se tak vyskytují klasické (obyčejné) derivace fce y, tzn. $y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots$ (nebo jen některé z nich), pak se daná DR nazývá obyčejná diferenciální rovnice (ODR) respektive systém ODR.

Přesněji:

- je-li $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ mluvíme o skalární ODR
- je-li $y : (a,b) \to \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, mluvíme o systému ODR

Nejvyšší řád derivace, který se v dané DR vyskytuje, určuje řád ODR či řád systému ODR

Příklady ① DR $\boxed{y' + a(x)y = g(x)}$ (1)

kde $a : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ a $g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce, je skalární ODR 1. řádu pro neznámou

$$y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R} \qquad \big(y = y(x)\big).$$

Pozorování: Užijeme-li značení $y' = \frac{dy}{dx}$, lze (1) psát ve tvaru $\frac{dy}{dx} + a(x)y = g(x)$. Označíme-li $L := \frac{d}{dx} + a(x)$, pak L je příklad diferenciálního operátoru, který funkci $y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ přiřadí funkci $Ly = \frac{dy}{dx} + a(x)y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$. Navíc L je LINEÁRNÍ operátor a (1) lze psát ve tvaru $Ly = g(x)$.

$\boxed{\text{Př. ②}}$ DR $\boxed{y'' + by' + k\,y = \sin\alpha t}$ (2)

kde b, k a α jsou dané nezáporné parametry (konstanty) představuje skalární ODR 2. řádu pro neznámou

$y: (0,T) \to \mathbb{R}$ $\quad (y = y(t))$ z kontextu zadání DR.

Označíme-li $x_1 := y$ a $x_2 := y'$ a $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$, pak lze rovnici (2) přepsat do tvaru

(3) $$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -b x_2 - k\,x_1 + \sin\alpha t \end{aligned}} \iff \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha t \end{pmatrix}$$

kde $\mathbb{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}' &= \mathbb{A}\vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{f}(t) &= (0, \sin\alpha t)^T \end{aligned}} \iff$$

což je systém dvou ODR 1. řádu

Vidíme, že je úzká souvislost mezi skalární ODR vyššího řádu a systémem ODR 1. řádu.

Pozorování: Opět se značením $y' = \frac{dy}{dx}$ lze rovnici (2) psát ve tvaru

(2') $\boxed{Ly = g(t)}$, kde $\boxed{L := \frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + k}$ a $g(t) := \sin\alpha t$

Protože $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ a $L(\alpha y) = \alpha L y$, tak L je lineární diferenciální operátor 2. řádu.

$\boxed{\text{Př. ③}}$ DR $\boxed{y'' + \frac{g}{l}\sin y = 0}$ je opět skalární ODR 2. řádu (rovnice jednoduchého kyvadla). V tomto případě je však diferenciální operátor

$$Ly := \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{g}{l}\sin y \qquad \text{nelineární!}$$

Připomeňme si na jednoduchém fyzikálním systému jak jsou různé diferenciální rce generovány.

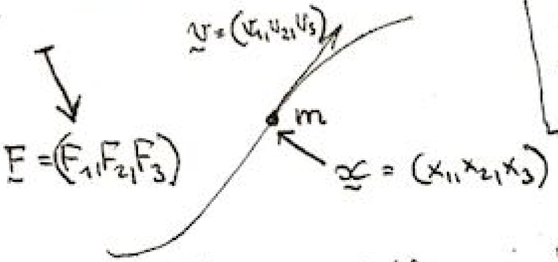
NEWTONOVA KLASICKÁ MECHANIKA

SYSTÉM: PRUŽINA ZÁVAŽÍ

- popisuje pohyb částic pomocí diferenciálních rovnic
- částice (tělesa) chápeme jako hmotné body
- tři základní postuláty

1. ZÁKON — Pokud nepůsobí na částici ŽÁDNÉ SÍLY, částice se pohybuje přímočarým (nezrychleným) pohybem
ŽÁDNÉ ZRYCHLENÍ

2. ZÁKON

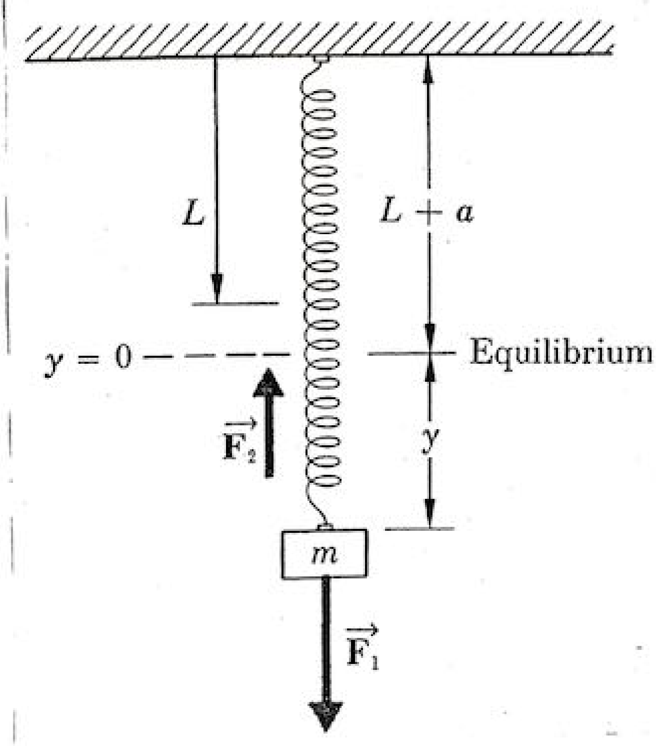


$$\boxed{\underset{\sim}{F} = \frac{d}{dt}\left(m\underset{\sim}{v}\right) = m\frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = m\underset{\sim}{a} = m\frac{d^2\underset{\sim}{x}}{dt^2} = m\ddot{\underset{\sim}{x}}}$$

m konstant

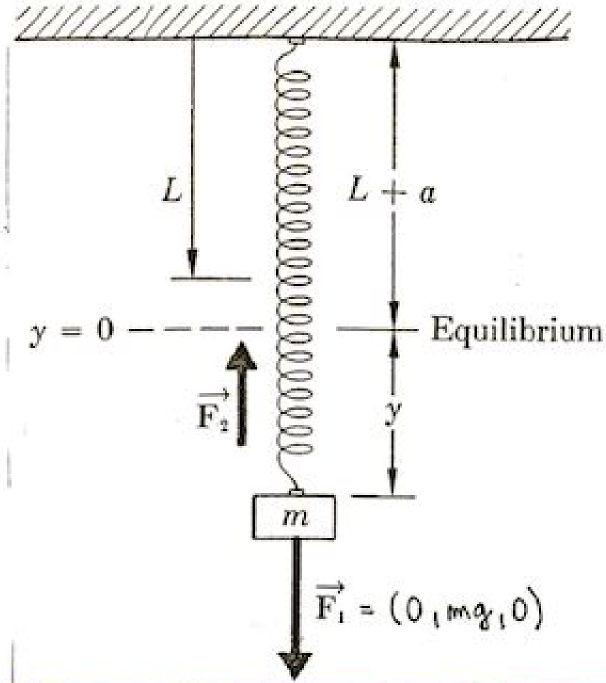
3. ZÁKON — Síla $\underset{\sim}{F}$ vyvolá reakční sílu $-\underset{\sim}{F}$

SYSTÉM: PRUŽINA - ZÁVAŽÍ



ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

- Pohyby možné jen ve vertikálním směru
- závaží chápeme jako hmotný bod o hmotnosti m
- Hmotnost pružiny zanedbáme



Předpoklady na materiály

(S) pružina splňuje Hookeův zákon: pružina vyvolává "rekonstrující" sílu F_2 na závaží směrem k poloze přirozené délky pružiny, a tato síla je úměrná $y+a$, tj.

$$F_2 = (0, -k(y+a), 0) \qquad (k>0)$$

(A) odpor vzduchu je zanedbatelný (vakuum)

$\boxed{\text{Z 2. ZÁKONA}} \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = F_1 + F_2 = (0, mg - k(y+a), 0)$

V rovnováze: $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ a $y=0 \Rightarrow ka = mg$

Rovnice pohybu: $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0}$

! Počáteční podmínky: $y(0) = y_0$, $\frac{dy}{dt}(0) = y_1$

(A*) Odpor vzduchu je úměrný rychlosti

$$F_3 = \left(0, -b\frac{dy}{dt}, 0\right) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

koeficienty: setrvačnosti, tlumení, tuhosti

(A**) Odpor vzduchu (prostředí) závisí na rychlosti nelineárně

$$F_3 = \left(0, h\left(\frac{dy}{dt}\right), 0\right) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + h\left(\frac{dy}{dt}\right) + ky = 0$$

(S*) Pružina vyvolává sílu F_2, která závisí na $(y+a)$ nelineárně

$$F_2 = (0, g(y+a), 0) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + g(y) + \left\{\begin{matrix} 0 \\ b\frac{dy}{dt} \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right)\end{matrix}\right\} = 0 \quad \begin{matrix}(A) \\ (A^*) \\ (A^{**})\end{matrix}$$

(S*) + (A**) je speciální případ rovnice $\frac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0$

Vnější (daná) síla $F_4 = (0, \xi(t), 0)$ například $\xi(t) = \sin \omega t$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = \sin \omega t$$

ŽÁDNÁ PRUŽINA ⇒ PADAJÍCÍ TĚLESO

$F_2 = (0, 0, 0)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ b\frac{dy}{dt} \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right)\end{matrix}\right\} = G \quad \begin{matrix}(A) \\ (A^*) \\ (A^{**})\end{matrix} \quad \overset{z := \frac{dy}{dt}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\frac{dz}{dt} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ bz \\ h(z)\end{matrix}\right\} = G}$$

ROVNICE 1. ŘÁDU

JSOU VŠECHNY DR OBYČEJNÉ?

Je-li neznámá funkce u závislá na více proměnných (→ $t \in [0,T]$) z nichž jedna může být čas t a ostatní jsou prostorové proměnné $x_1, \dots, x_d$, kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, a v DR se vyskytují parciální derivace fce u, např. $\frac{\partial u}{\partial t}$ nebo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$, atd., pak se daná DR nazývá parciální diferenciální rovnice (PDR) respektive systém PDR. Přesněji:

- je-li $u : \Omega \to \mathbb{R}$ resp. $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ mluvíme o skalární stacionární resp. evoluční PDR
- je-li $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, resp. $\vec{u} : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ mluvíme o systému stacionárních resp. evolučních PDR

Příklady (4) a) Poissonova rce

$$\boxed{-\Delta u = f \ \text{ v } \Omega \qquad -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{LINEÁRNÍ OPERÁTOR}}$$

b) Rovnice vedení tepla

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega \\ \text{kde } f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ je daná funkce.} \end{array}}$$

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1, x_2, \dots, x_d$
1. řádu vzhledem k t

c) Vlnová rovnice

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega \\ \text{kde } f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ je daná fce} \end{array}}$$

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1, x_2, \dots, x_d$
2. řádu —"— k t

Oba evoluční diferenciální operátory

$L := \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ jsou lineární — Tepelný operátor

$L := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ — d'Alembertův vlnový operátor $\Box$.

⑤ Navier-Stokesovy rovnice:

Neznámé: rychlost $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a "tlak" p

$$v_i, p : (0,T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3$$

$$(NS) \quad \boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_1}{\partial x_k} - \Delta v_1 &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_2}{\partial x_k} - \Delta v_2 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_3}{\partial x_k} - \Delta v_3 &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} \\
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0
\end{aligned}}$$

je systém (čtyř) nelineárních PDR, který je

stacionární pokud $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ pro $i = 1,2,3$

evoluční jinak.

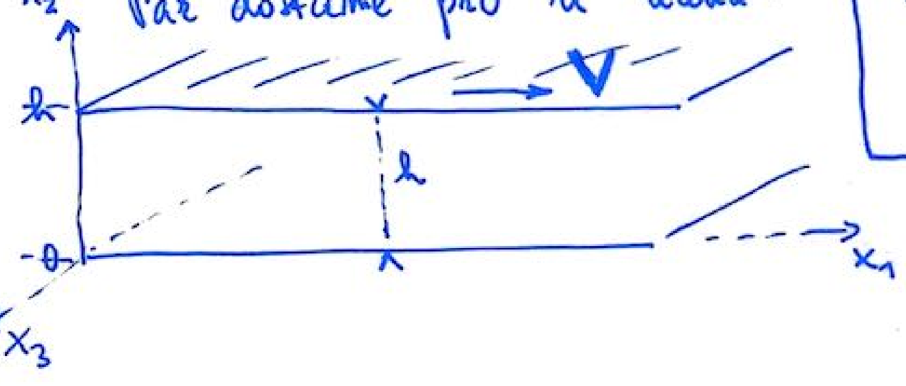
Navier-Stokesovy rce, popisující proudění nestlačitelných tekutin (jako je voda) při standardních podmínkách, se obvykle píšou v kompaktním tvaru

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - \Delta \vec{v} &= -\nabla p \\
\operatorname{div} \vec{v} &= 0
\end{aligned}}$$

- Uvažujme ustálené (stacionární) proudění mezi dvěma deskami, kde se horní deska pohybuje konstantní rychlostí V (viz obrázek), dolní deska je (v klidu). Hledejme řešení úlohy ve tvaru $\vec{v} = (u(x_2), 0, 0)$, $p = \text{konst.}$

Pak dostame pro u úlohu:

$$\boxed{\begin{aligned}
u'' &= 0 \ \text{ v } (0,h) \\
u(0) &= 0 \\
u(h) &= V
\end{aligned}}$$



SHRNUTÍ Diferenciální rovnice (DR) jsme si rozdělili na:

- OBYČEJNÉ vs. PARCIÁLNÍ
  - systém pružina-závaží
  - Poissonova, vlnová, tepelná rce, Navier-Stokesovy rovnice (NSR)
- LINEÁRNÍ vs. NELINEÁRNÍ
  - systém lineární pružina-závaží
  - Laplaceův, tepelný, vlnový operátor
  - rovnice jednoduchého kyvadla
  - NSR
  - systém nelineární pružina-závaží v nelineárním prostředí
- SKALÁRNÍ vs. VEKTOROVÉ
  - systém DR
- STACIONÁRNÍ vs. EVOLUČNÍ
  - jedna z proměnných je čas
- 1. ŘÁDU vs. 2. ŘÁDU
  - $y' + a(t)y = g(t)$
  - tepelná rovnice vzhledem k času
  - rovnice volného pádu po rychlost

OBYČEJNÉ (LINEÁRNÍ) DR 2. a 1. ŘÁDU

Pro ODR 2. řádu lze formulovat dvě (svým charakterem zcela) odlišné úlohy: počáteční úlohu a okrajovou úlohu.

Motivací pro <u>počáteční úlohu</u> je systém pružina-závaží s lineární (Hookeovou) pružinou a lineárním odporem vnějšího prostředí. Cílem je: nalézt funkci $y: (-T,T) \to \mathbb{R}$, které má $y''(t)$ pro každé $t \in (-T,T)$ a splňuje

$$
(P) \quad \boxed{\begin{aligned} & y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = f(t) \qquad \forall t \in (-T,T) \\ & y(0) = y_0 \\ & y'(0) = y_1 \end{aligned}}
$$

pro daná DATA úlohy:

$$
\underbrace{T>0}_{\text{časový interval}}, \quad \underbrace{b, k, m}_{\text{materiálové koeficienty}}, \quad \underbrace{y_0, y_1 \in \mathbb{R}}_{\text{počáteční podmínky}}, \quad \underbrace{f: (-T,T) \to \mathbb{R}}_{\text{pravá strana}}
$$

Motivací pro okrajovou úlohu je úloha nalézt speciální typ ustáleného proudění tekutiny proudící mezi dvěma rovnoběžnými deskami.

Cílem je: nalézt funkci $y: (a,b) \to \mathbb{R}$, která má $y''(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$ a splňuje

(O)

$$y'' + \alpha y' + \beta y = g(x) \quad \text{v } (a,b)$$

ve spojení s jedním typem z následujících okrajových podmínek:

Dirichletova → (D) $y(a) = A$ a $y(b) = B$

Neumann → (N) $y'(a) = A$ a $y'(b) = B$

Smíšená → (S) $y(a) = A$ a $y'(b) = B$ nebo $y'(a) = A$ a $y(b) = B$

pro daná DATA úlohy:

$I = (a,b)$ ← oblast, kde úlohu řeším

α, β ← koeficienty

A, B ← předepsané hodnoty hledané fce či její derivace v bodech $\underline{a}$ a $\underline{b}$

$g: (a,b) \to \mathbb{R}$ ← pravá strana

Ukažme si důležité odlišné i společné rysy obou úloh na jednoduchém příkladě:

(✱) $$y'' = 0$$

Z existence druhé derivace a Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne, že obecný tvar řešení rce (✱) má tvar:

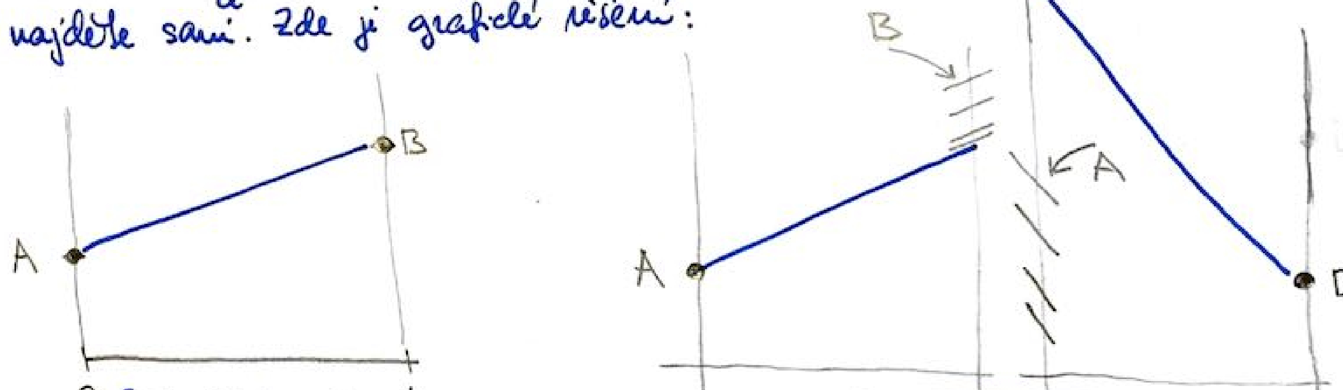
(P1) $$y_{OB}(t) = C_1 t + C_2 \qquad t \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
v kontextu počáteční úlohy

resp.

(O1) $$y_{OB}(x) = C_1 x + C_2 \qquad x \in (a,b),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
v kontextu okrajové úlohy

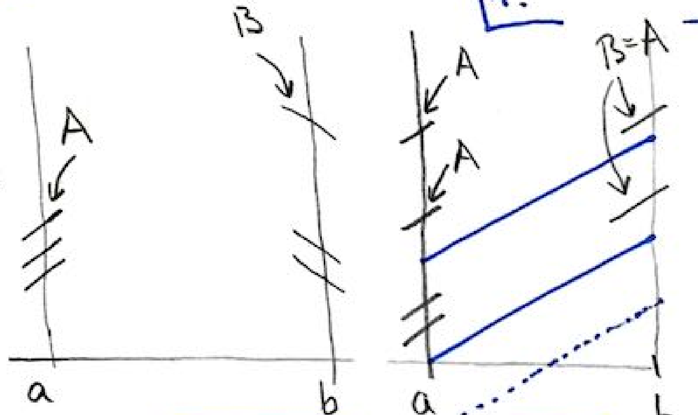
Z (P1) snadno dostáváme, že řešení počáteční úlohy (P) pro rovnici (✱) má tvar $\boxed{y_P(t) = y_1 t + y_0}$. Všimněme si, že (P1) je formulace 1. pohybového zákona klasické mechaniky.

Pro okrajové úlohy (Dirichlet, Neumann, smíšená) hledáme mezi všemi afinními funkcemi (O1) ty, které splňují předepsané okrajové podmínky. Zatímco u Dirichletovy či smíšené úlohy se nám to vždy podaří a toto řešení je jediné, u Neumannovy úlohy řešení existuje jen pokud $A=B$ (tzn. data jsou kompatibilní). Navíc, pokud $A=B$ pak máme nekonečně mnoho řešení (typu $y(x)=Ax+C_2$ kde C_2 je libovolné) a k určení jediného z nich musíme přidat k úloze další selektivní podmínku (např. $\int_a^b y(x)\,dx=0$). Analytické vyřešení všech úloh (D),(N),(S) najdete sami. Zde je grafické řešení:



Dirichletova úloha

Smíšené úlohy 1. 2.



Neumannova úloha

1. Neexistence řešení
2. Nekonečně řešení. Tečkovaně znázorněno řešení s nulovým průměrem.

Závěr Obecné řešení rovnice $y''=0$ má tvar $y(x)=(C_1,C_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$, tj. lineární kombinace prvků báze $\{1,x\}$. Dimenze prostoru všech řešení rce $y''=0$ je tedy 2. Má-li řešení druhé derivace ve všech bodech, pak jsou první a nultá derivace spojité, tzn. $y\in C^1([T,T])$ resp. $C^1((a,b))$. Je tedy smysluplné zadávat hodnoty pro y resp. y' v počátku nebo krajních bodech intervalu.

Počáteční úloha má vždy řešení. Okrajová úloha Neumannova typu má řešení jen pokud data splňují podmínku kompatibility ($A=B$); jediné řešení je pak vybráno z ∞-mnoha řešení další selektivní podmínkou. ▨

Dříve než začneme zkoumat vlastnosti rovnic z pohledu matematické analýzy, zdůrazněme, že je vždy cenné znát fyzikální (chemický, biologický) kontext studované rovnice resp. úlohy. Například, v kontextu systému pružina-závaží, kromě rovnice a počátečních podmínek (úloha (P)) víme, že

(i) $\quad m>0\,,\quad b\geq 0 \quad a \quad k\geq 0$ (omezení na přípustné parametry)

a že platí, pro $f\equiv 0$, následující energetická identita:

(ii) $$\frac{1}{2}[y'(t)]^2+\frac{k}{2m}[y(t)]^2+\frac{b}{m}\int_0^t [y'(\tau)]^2\,d\tau = \frac{1}{2}y_1^2+\frac{k}{2m}y_0^2$$

neboli celková energie systému

$$E(t):=\frac{1}{2}[y'(t)]^2+\frac{k}{2m}[y(t)]^2,$$

splňující

$$E(t)+\frac{b}{m}\int_0^t [y'(\tau)]^2\,d\tau = E_0 \quad \text{kde } E_0:=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{k}{2m}y_0^2 = E(0)$$

neroste a v případě, kdy $b=0$, se zachovává:

$$E(t)=E_0 \quad \text{pro všechna } t\in[0,T].$$

Odvození (ii) si proveďte sami; násobte ODR v (P) y', užijte identity $\left(\frac{|z|^2}{2}\right)'=zz'$, výsledek integrujte od 0 do t, $t\in(0,T]$ a užijte počátečních podmínek.

Uvažujme nyní jinou rovnici

(3) $\quad Ly := y'' + py' + qy = f(x) \qquad p,q \in \mathbb{R} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

a hledejme všechna řešení této rovnice. Za předpokladu $y''(x)$ existuje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V tuto chvíli tedy zapomínáme na počáteční a okrajovou úlohu a snažíme se najít tvar obecného řešení rovnice (3); toto řešení budeme značit $y_{OB} = y_{OB}(x)$.

Terminologie: Rce (3) s $f \equiv 0$ se nazývá **homogenní** ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

Rce (3) s $f \not\equiv 0$ se nazývá **nehomogenní** ODR 2. řádu

Úkol: NALÉZT y_{OB} tj. NALÉZT VŠECHNA ŘEŠENÍ (3)

Případ 1 HOMOGENNÍ RCE; $f \equiv 0$

K řešení využijeme skutečnosti, že

- $(e^x)' = e^x$ a e^x tak řeší rci $y' = y$
- $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ a $e^{\lambda x}$ řeší rci $y' = \lambda y$

a otázku řešitelnosti (3) převedeme na algebraickou otázku.

Hledáme-li řešení (3) ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, po dosazení dostáváme:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \qquad D := p^2 - 4q$$

(4) CHARAKTERISTICKÁ RCE

Mohou nastat tři situace:

(i) $D > 0 \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, řešící (4)

$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ tvoří bázi prostoru $\{z \in C^2(\mathbb{R});\, Lz = 0\}$

(prostor všech řešení homogenní rce)

neboli

$$\boxed{y_{OB}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) $D = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ je dvojnásobný kořen, což je situace, která nastane (mimojiné) u rovnice $y'' = 0$, jejíž charakteristická rce má tvar $\lambda^2 = 0$, 0 je kořen násobnosti 2 a víme, že $\{1, x\} = \{e^{0x}, xe^{0x}\}$ tvoří bázi.

Tedy: je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ kořen násobnosti 2, pak $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$ tvoří bázi $\{z \in C^2(\mathbb{R});\, Lz = 0\}$

a $\boxed{y_{OB}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}}$

(iii) $D<0 \Rightarrow \underset{\mu_1+i\mu_2}{\lambda}, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ jsou dva různé kořeny (4). Pak

$$(\bullet) \quad \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} e^{\mu_1 x}(\cos\mu_2 x + i\sin\mu_2 x) \\ e^{\mu_1 x}(\cos\mu_2 x - i\sin\mu_2 x) \end{Bmatrix}$$ tvoří bázi prostoru $\{z \in C^2(\mathbb{R});\ Lz = 0\}$.

$\longrightarrow y_{OB}(x) = C_1 w_1 + C_2 w_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

Nevýhodou této báze je skutečnost, že prvky (funkce) báze jsou funkce komplexní, ačkoliv v zadání rovnice nic komplexního nebylo.

Lineární kombinací báze $(\bullet)$ však mohu dostat ~~bázi~~ tvořenou reálnými funkcemi.

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(w_1+w_2) \\ \frac{1}{2i}(w_1-w_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{\mu_1 x}\cos\mu_2 x \\ e^{\mu_1 x}\sin\mu_2 x \end{Bmatrix}$$

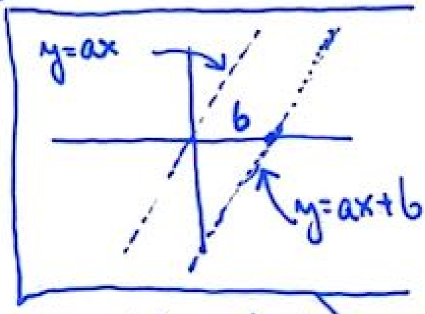
Pak
$$\boxed{y_{OB}(x) = C_1 e^{\mu_1 x}\cos\mu_2 x + C_2 e^{\mu_1 x}\sin\mu_2 x \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Příklad 1 $\boxed{\ddot{x} + x = 0}$ Najděte obecné řešení.

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i$. Báze tvořená reálnými funkcemi: $\{\cos t, \sin t\}$ a obecné řešení:

$$x_{OB}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Pokud řeším počáteční úlohu (P) nebo okrajovou úlohu (O) pro homogenní rovnici, pak najdu obecné řešení a konstanty C_1, C_2 určím z počátečních nebo okrajových podmínek.



Případ 2 NEHOMOGENNÍ RCE; $f \neq 0$

Pak platí, že obecné řešení $y_{OB,f}$ je ve tvaru

(5) $$\boxed{y_{OB,f}(x) = y_{OB}(x) + y_f(x),}$$

kde y_{OB} je obecné řešení homogenní rce (tj. rce (3) s $f=0$)

a y_f je jedno (partikulární) řešení rce (3) s f.

Otázka nalezení $y_{OB,f}$ se redukuje na otázku jak nalézt y_f jedno řešení (3).

Tři různé metody (jak najít y_f) na různé situace:

(i) uhodnutím – tvar pravé strany je jednoduchý (např. konstanta)

(ii) pravá strana je ve tvaru:

$$f(x) = \underbrace{\boxed{P(x)e^{\lambda x}}}_{Ⓐ} \text{ nebo } \boxed{\begin{array}{l} P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \text{nebo } P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \end{array}} Ⓑ$$

kde $P(x)$ je nějaký konkrétní polynom stupně m

např. $P(x) = x^2+1$ je polynom stupně 2.

Pak

(6) $y_f(x)$ hledáme ve tvaru
$$y_f(x) = \begin{cases} Q(x)x^L e^{\lambda x} & \text{pro Ⓐ} \\ \tilde{Q}(x)x^L e^{\alpha x}\sin\beta x + \tilde{\tilde{Q}}(x)x^L e^{\alpha x}\cos\beta x & \text{pro Ⓑ} \end{cases}$$

kde
$$L = \begin{cases} 0 & \text{není-li } \lambda \text{ kořen (4) pro Ⓐ} \\ & \text{není-li } \alpha+i\beta \text{ kořen (4) pro Ⓑ} \\ k & \text{je-li } \lambda \text{ } k\text{-násobný kořen (4) pro Ⓐ} \\ & \text{je-li } \alpha+i\beta \text{ násobný kořen 4 pro Ⓑ *)} \end{cases}$$

a

$Q, \tilde{Q}$ a $\tilde{\tilde{Q}}$ jsou obecné polynomy stupně m.

např. je-li $P(x) = x^2+1$, pak $Q(x) = Ax^2+Bx+C$,
kde A, B, C určíme po dosazení (6) do rovnice (3).

(iii) obecná metoda nazývaná variace konstant.

Je-li obecné řešení homogenní rovnice ve tvaru
$$y_{OB}(x) = \underbrace{C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)}_{\text{báze}} \quad \text{kde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

pak $y_f(x)$ hledám ve tvaru

(7) $$\boxed{y_f(x) = C_1(x)w_1(x) + C_2(x)w_2(x)}$$

*) pro rovnici 2. řádu $\alpha+i\beta$ může být nejvýše 1-násobným kořenem charakteristické rovnice (4).

Derivováním (7) dostávám

$$y_f'(x) = C_1'(x)w_1(x) + C_2'(x)w_2(x) + C_1(x)w_1'(x) + C_2(x)w_2'(x).$$

Na koeficienty (funkce) C_1, C_2 nyní položíme podmínku:

$$\boxed{(8_1) \qquad C_1'(x)w_1(x) + C_2'(x)w_2(x) = 0}$$

Pak $\quad y_f'(x) = C_1(x)w_1'(x) + C_2(x)w_2'(x)$

a $\quad y_f''(x) = C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) + C_1(x)w_1''(x) + C_2(x)w_2''(x).$

Po dosazení posledních dvou vztahů a (7) do rovnice (3) dostaneme

$$C_1(x)\left\{\overbrace{w_1''(x) + pw_1'(x) + qw_1(x)}^{Lw_1=0}\right\} + C_2(x)\left\{\overbrace{w_2''(x) + pw_2'(x) + qw_1(x)}^{Lw_2=0}\right\}$$

$$+\, C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) = f(x).$$

Protože w_1, w_2 řeší homogenní rovnici $Lw_1=0$, $Lw_2=0$, tak z posledního vztahu plyne

$$\boxed{(8_2) \qquad C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) = f(x)}$$

Rovnice (8_1) a (8_2) představují systém dvou rovnic pro neznámé funkce $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$. Dá se ukázat, že systém (8_1) a (8_2) má vždy řešení. Integrací určím $C_1(x)$ a $C_2(x)$ a po dosazení do (7) dostanu partikulární řešení y_f rovnice (3). ▨

Příklad ② Najděte obecné řešení rovnice $\ddot{x} + x = \sin 2t$

Řešení (i) Dle příkladu ① víme $x_{OB,hom}(t) = C_2\sin t + C_1\cos t$.

Funkce $f(t) = \sin 2t$ je pravá strana speciálního tvaru s $\alpha = 0, \beta = 2$.

Tak $x_f(t)$ hledáme ve tvaru $\boxed{x_f(t) = A\cos 2t + B\sin 2t}$. Koeficienty A, B určíme dosazením $x_f(t)$ do rovnice $\ddot{x} + x = \sin 2t$.

Dostáváme:

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + A\cos 2t + B\sin 2t = \sin 2t,$$

což implikují vztahy: $\boxed{-3A = 0}$ $\boxed{-3B = 1}$.

Tedy hledané obecné řešení

$$\boxed{x_{OB,nehom}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t}$$ ▨

$\boxed{\text{Řešení (ii)}}$ x_f zkusíme najít metodou variace konstant:

$$x_f(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$$

Pro funkce $C_1(t), C_2(t)$ dostáváme:

$$(\bullet\bullet) \quad \left[\begin{aligned} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t &= 0 \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t &= \sin 2t \end{aligned}\right. \quad \left|\begin{aligned} &\sin t \\ &\cos t \end{aligned}\right.$$

Odkud $C_2'(t) = 2\sin t\cos^2 t$ a $C_1'(t) = -2\sin^2 t\cos t$.

Tedy $C_2(t) = -\frac{2}{3}\cos^3 t$ a $C_1(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t$

Tudíž $x_f(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\sin t = -\frac{1}{3}\sin 2t$,

což je stejný výsledek jako ten získaný metodou $\underbrace{\text{ansatzu}}_{\text{udsady}}$ v (i).

Příklad 3 Najděte obecné řešení rovnic

$\boxed{(9_1) \quad \ddot{x} + x = \sin t}$ a $\boxed{\ddot{x} + x = \sin(1+\varepsilon)t \quad (9_2)}$

Řešení

Pozorování 1 Partikulární řešení (9_1) nelze najít ve tvaru $x_f(t) = A\sin t + B\cos t$. Skutečně, po dosazení dostáváme $0 = \sin t$. Sami zkuste vyřešit (9_1) variací konstant.

Pozorování 2 Frekvence uvnitř pravé strany se shoduje resp. je blízká $\underbrace{\text{frekvenci}}_{\text{kmitů}}$ systému "pružina-závaží" řízeného homogenní rovnicí.

Pozorování 3 Metodou ansatzu použitou na rci (9_2) dostáváme pro $x_f(t) = A\sin(1+\varepsilon)t + B\cos(1+\varepsilon)t$. Po dosazení:

$$A\left(1-(1+\varepsilon)^2\right)\sin(1+\varepsilon)t + B\left(1-(1+\varepsilon)^2\right)\cos(1+\varepsilon)t = \sin(1+\varepsilon)t,$$

což implikuje $B = 0$ a $A = \frac{-1}{(2+\varepsilon)\varepsilon}$ a tak $x_f(t) = \frac{-1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\sin(1+\varepsilon)t$

Hledejme řešení počáteční úlohy $x(0) = x_0$ a $x'(0) = 0$.

Z obecného řešení ve tvaru

$$x_{OB,nehom}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\sin(1+\varepsilon)t$$

dostáváme $C_1 = x_0$ a $C_2 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(2+\varepsilon)} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(2+\varepsilon)}$

$$x_P^\varepsilon(t) = x_0\cos t + \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\left[(1+\varepsilon)\sin t - \sin(1+\varepsilon)t\right]$$

$$x_P^0(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_P^\varepsilon(t) = x_0\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(1+\varepsilon)t - \sin t}{\varepsilon(2+\varepsilon)}$$

$= x_0 \cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t$

a oscilace mají rostoucí amplitudu pro $t \to \infty$. Jev, kdy frekvence vnějších sil odpovídá vnitřním frekvencím systému, které se začnou zvětšovat, se nazývá **resonance**.
viz obrázek

- Zároveň jsme odvodili/zdůvodnili proč v případě (9$_1$) musíme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$x_p(t) = At\sin t + Bt\cos t.$$

Ověřte sami, že s touto násadou dostanete

$$x_p(t) = -\frac{1}{2}t\cos t.$$

Závěr: Pro skalární lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty umíme:

1) nalézt obecné řešení homogenní rovnice (charakteristická rce)
2) nalézt obecné řešení nehomogenní rce

$$y_{ob,nehom}(x) = y_{ob,hom} + y_p$$

3) vyřešit počáteční úlohu
4) vyřešit okrajovou úlohu

- metoda násady ansatz
- metoda variace konstant

Tyto metody platí (jak si ukážeme později) i pro rovnice vyššího řádu.

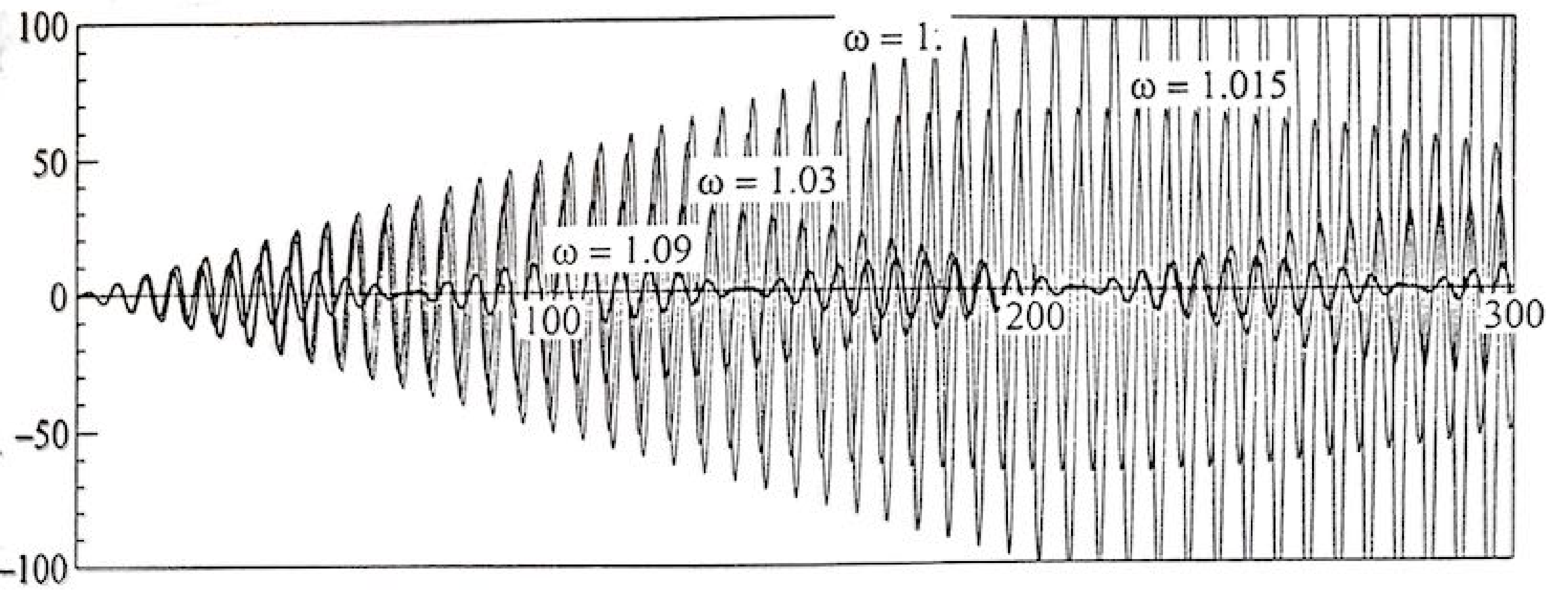


FIGURE 8.2. Solution for $y'' + y = \sin \omega x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $\omega = 1.09, 1.03, 1.015, 1.$