

3.4

Měřitelné funkce, měřitelné množiny, σ -algebra, míry

Nejdříve proveďme shrnutí zavedených struktur včetně dvojbího počítání, když jsou pojmenovány se zde bude MĚŘITELNOST fci a množin a pojmen MÍRA.

(i) $H \dots$ vektorový prostor schvadnitých funkcí

$$f \in H \Leftrightarrow \exists I \subset \mathbb{R}^d \text{ omezený interval} = jeho dílem \{I_j\}_{j=1}^N \text{ tel., i } f = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j} \Leftrightarrow f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}(x)$$

pro jistá $c_j \in \mathbb{R}$

$$f \in H \Rightarrow \int f = \sum_{j=1}^N c_j V(I_j)$$

Klíčové vlastnosti : • $f \in H \Rightarrow |f| \in H$

$$\cdot \{h_i\} \subset H, h_i \geq 0 \Rightarrow \int h_i \rightarrow 0$$

(ii) $M^+ \dots f \geq 0; \exists \{h_i\} \subset H \text{ tel., i } h_i \uparrow f$

$$f \in M^+ \Rightarrow \int f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int h_i \quad (\text{bad } + \infty \text{ nebo } \in \mathbb{R}_0^+)$$

$L^+ \dots \{f \in H; \exists K > 0 \text{ tel., i } f \leq K\}$

$$f \in L^+ \Rightarrow \int f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int h_i \in \mathbb{R}_0^+$$

(M^+, L^+ nejsou vektorové prostory)

(iii) $M \dots \{f; f^+, f^- \in M^+\}$

$$L^* \dots \{f \in M; \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} \cup \{-\infty\}\}$$

$$L \dots \{f \in M; \int f := \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}\}$$

PLATÍ: $L \subset L^* \subset M; M^+ \subset L^*$

Veta 3.11 (Skladání měřitelných vlastností M)

① $\{f_m\} \subset M$ a $f_m \rightarrow f$ s.r. $\Rightarrow f \in M$

② $\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{f(g, \{f_m\})} \subset M \Rightarrow \underbrace{f \pm g, \alpha f, fg, \frac{f}{g},}_{M \text{ je vektorový prostor}} \underbrace{\max\{fg\}, \min\{fg\}}_{M \text{ je svazek}} \in M$

$\Rightarrow \sup\{f_m\}, \inf\{f_m\}, \limsup\{f_m\}, \liminf\{f_m\} \in M$

③ f spojita $\Rightarrow f \in M$

④ $F: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ spojita, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_S): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^S$ a $f_i \in M$
 $\Rightarrow F \circ \vec{f} \in M$

Důraz je upřední (zvole si počítač jde být dorazován)

① a ②). Důležitý je celkový ujmání této věty:
"měřitelnost fci" je určeno, ne spojenou operací:

$\pm, \cdot, -, \max, \min, \sup, \inf, \limsup, \liminf$

Ale náročně na složení.

Plati: Každá funkce se dá napsat jeho složení dvanácti měřitelnými zobrazeními. Vážíme, že existuje $X(\Omega)$, které nesou měřitelné. Obecně tedy může zahrnovat tvrzení ④ pro $F \in M$ a $f \in M$.

— Nejme nyní $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $f \in L(\mathbb{R}^d)$ nebo $f \in M(\mathbb{R}^d)$.
Přímo se, ada $f|_{X(\Omega)} = \begin{cases} f & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d - \Omega \end{cases}$ patří do $L(\mathbb{R}^d)$ nebo $M(\mathbb{R}^d)$?

? Obecně to neplatí?

Def (měřitelný množiny)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná $\Leftrightarrow \chi_{\Omega} \in M$

Def $P(X)$... soubor všech podmnožin $X \subset \mathbb{R}^d$ (potenciální množina)
 $P(\mathbb{R}^d) \dots$ —||—

$\Lambda(\mathbb{R}^d)$... soubor všech měřitelných podmnožin \mathbb{R}^d

Platí: $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subseteq P(\mathbb{R}^d)$ [Není užíváno více]
 $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subsetneq P(\mathbb{R}^d)$

Def

Zobrazení

$\lambda_d: \Lambda(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je definováno vztahem

$$\lambda_d(\Omega) = \int \chi_{\Omega}$$

Potvorování

$$\lambda_d((0,1)^d) = \int \chi_{(0,1)^d} = V((0,1)^d) = 1$$

λ_d budeme později nazývat Lebesgueova míra

Def.

Budě f ≥ 0 & f $\in M$. Zobrazení

$v_f: \Lambda(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definujeme

$$\text{předpisem } v_f(\Omega) = \int f \chi_{\Omega}$$

Potvorování: $\lambda_d(\Omega) = v_1(\Omega)$. Uvažme později, že

v_f je měřitelný, tj. v_f splňuje vlastnosti,

které jsou uvedeny v definici měry.

Jestě předmětem je uvažování existence neměřitelné množiny (a tedy také neměřitelné funkce).

Příklad (konstrukce nemetrikační množiny) Tato konstrukce je založena na axiomu výběru a jednoduchém vztahu ekvivalence mezi reálnými čísly $\in [0,1]$.

Rozmene, že $x, y \in [0,1]$ jsou ekvivalentní, $x \sim y$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$ (rozdíl je racionální)
 (uretě platí: $x \sim x$; $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $x \sim y \& y \sim z \Rightarrow x \sim z$
 tedy $x \sim y$ je ekvivalence)

Nyní rozdělíme $[0,1]$ do třídi ekvivalence, např.

- $\mathbb{Q} \subset [0,1]$ tvoří jednu třídu
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + p$, kde $p \in \mathbb{Q}$ tak, že $\frac{\sqrt{2}}{2} + p \in [0,1]$ tvoří další třídu
- atd

Dvě třídy ekvivalence jsou buď stejně nebo disjunktní. A platí
 $[0,1] = \bigcup_{\alpha} E_{\alpha}$ kde E_{α} je jedna třída ekvivalence.

Nyní definujme naší množinu

$$N = \{x_{\alpha}\}_{\alpha}^{\infty} \text{ kde } x_{\alpha} \in E_{\alpha} \text{ je jediný } \in E_{\alpha}.$$

Tato konstrukce je možná díky axiomu výběru: Buď E množina a $\{E_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{\infty}$ soubor neprázdných podmnožin E , přičemž množina indexů není spodetna. Pak existuje funkce
 $\alpha \mapsto x_{\alpha}$ (výberavé funkce) tak, že $x_{\alpha} \in E_{\alpha} \forall \alpha$.

Uděleme, že N nemá měřitelnou

Spoznam. Nechť N je měřitelná.

uvádějme posunutí množiny N typu

$$N_2 = N + v_2$$

kde $\{v_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{\infty}$ je soubor všechna paciorek o délce $< 1,1$

Není obtížné ověřit (uveďte si), že:

• N_k jsou množiny disjunktní

• $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$.

Když N byla měřitelná, pak jsou N_k také měřitelné $\forall k \in \mathbb{N}$.
Protože N_k jsou množiny disjunktní, tak

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N_k) \leq 3.$$

Protože N_k jsou jen podmnožiny N tak $\lambda_1(N_k) = \lambda_1(N)$.

Tedy

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N) \leq 3,$$

což vedlo ke sporu jde o případě když $\lambda_1(N) = 0$, nebo když $\lambda_1(N) > 0$ □

Def. Soubor podmnožin Σ množiny X je měřitelná σ -algebra

• $X \in \Sigma$

• $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$

• $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

(X, Σ) měřitelný prostor

Příklody (i) $\{\emptyset, X\}$ je σ -algebra

(ii) $P(X)$ je σ -algebra

(iii) $\{A \subset X ; A \neq \emptyset \text{ a } X \setminus A \text{ je konečné}\}$
je σ -algebra

Pro uplnost připomínáme definice topologie a topologického prostoru.

Def Říkáme, že soubor podmnožin \mathcal{T} množiny X je

topologie pokud:

$$\emptyset, X \in \mathcal{T}$$

$$A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$$

$$A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T}$$

(X, \mathcal{T}) je nazývá topologický prostor

Příklady (i) $\{\emptyset, X\}$ je topologie

(ii) $\{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1)\}$ je topologie, ale není σ -algebra

(iii) Budě \mathcal{P} topologický prostor. Označme $\mathcal{B}(\mathcal{P})$

σ -algebra generovanou souborem všech otevřených podmnožin \mathcal{P} . Nazývá se

σ -algebra borelovskej množin. Obsahuje množiny množin, všechny společné pravidly otevřených množin (tzn. množiny G_δ), všechna soubory sjednocení množin (tzn. množiny F_σ), atd.

Definice (měry) Budě Σ soubor podmnožin X .

Pak volváme $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je míra (measure)

pokud 1) Σ je σ -algebra

2) μ je nezáporná a $\mu(\emptyset) = 0$

3) μ je σ -aditivní $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma, A_i \cap A_j = \emptyset$

pro $i \neq j \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(X, Σ, μ) je nazývá prostor s měrou

Jedna měra $\mu(X) = 1$, pak

(X, Σ, μ) je nazývá standardní prostor

- Pokud je ji měra a $\mu(X) < \infty$, pak je ji komutativní
- Míre je σ -konečná $\equiv \exists X_m \uparrow X$ (tzn. $X_{m+1} \supseteq X_m, \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$) a $\mu(X_m) < +\infty$
- Míre je uplná $\equiv (A \subset B) \wedge (B \in \Sigma) \Rightarrow \mu(B) = 0 \Rightarrow A \in \Sigma$ (je σ -aditivní pak platí i $\bar{\mu}(A) = 0$)
- Míre je absolutně pojednatelnou vzhledem k měřítku ν , pokud $\mu \ll \nu \equiv \forall \text{ - } \epsilon \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Věta 3.12

- Systém všech měřitelných měr $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je σ -algebra
- Pro libovolné $f \in M^+(\mathbb{R}^d)$, je f uplná měra, když je absolutně pojednatelná vzhledem k Lebesgueově měřítku λ^d .
- $\mathbb{R}^d \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow 1 \in M^+$, avšak $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$
 $\sup \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[-n,n]^d} = 1 \in M^+$
- $A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ tj. $\chi_A, \chi_B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, pak

$$\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

$$\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

a protože $\chi_{A \cap B} = \chi_A - \chi_{B \Delta A} = \chi_A - \chi_{B \cap A} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$
- Ještě-li $A_i \in \Sigma$, pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ neboť

$$\sup_{i=1, \dots, \infty} \{\chi_{A_i}\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$
- $\forall f \geq 0$ neboť $f \chi_1 \geq 0$ pro $f \geq 0$.

- Je součtu E_i množin disjunkt, měřitelné par
 $\sum_{i=1}^{\infty} \nu_f(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f X_{E_i} = \int f \sum_{i=1}^{\infty} X_{E_i} = \int f X_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} = \nu_f(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$
 kde jsme upříkladili $0 \leq \int f X_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \geq \int f X_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}$.
- ν_f je upevněná. Vzrátme, že $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $f \chi_B = 0$,
 pak $\int f \chi_B = 0 \Rightarrow \int f \chi_B = 0$ s.v. a také $\int f \chi_A = 0$ s.v.
 a $\int f \chi_A = 0 \Rightarrow \nu_f(A) = 0$
- $\nu_f \ll \lambda_d$ neboli $\lambda_d(E) = 0 \Leftrightarrow \int f X_E = 0 \Rightarrow \int f X_E = 0$ a.u. $\Rightarrow \int f X_E = 0$ s.v.
 $\Rightarrow \nu_f(E) = \int f X_E = 0$

□

Z předchozí věty plyne:

$$\nu_f(\Omega) = \int f X_{\Omega} \Rightarrow \nu_f \ll \lambda_d$$

Plati i opačné tvrzení, které je nazýváno Radon-Nikodymovou větou.

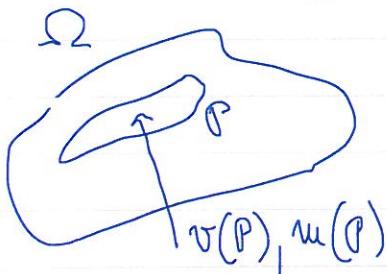
Rašid $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ "společné prostředí" (voda, vzduch, pevnost). V tomto prostředí
 je přirozené potádat se, že "že-li objem nejakej podmnožiny"
 nulový, je i hmotnost společná s touto podmnožinou nulová",
 neboť $m(P) = 0$ pakud $V(P) = 0$ neboť $m \ll V$. Dle

hmotnost \uparrow objem \uparrow

Radon-Nikodymovy věty $\exists g \geq 0 : m(P) = \int g dV$

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

(g je nazývána hustota)



V je dve míry

Pozorování

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ spojité, pak $F(x) := \int_a^x f(s) ds$ splňuje $F' = f \sim \mathbb{R}$
 Je-li funkce $f \geq 0$, pak $\nu_f(a,b) = \int_a^b f(s) ds$ je měřená míra,
 ale platí $\nu_f(a,b) = F(b) - F(a)$

Tento poslední vztah lze zobecnit na sledující společně

Budí F postouci. Pak f může mít nejméně spěchní bodů nezpojitoosti. Je-li x_0 bod nezpojitoosti, pak $F(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$, $F(x_0+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x)$ a $F(x_0)$ může být jakékoliv hodnota mezi $F(x_0-)$ a $F(x_0+)$. Definujeme-li $F(x_0) = F(x_0+)$, pak F je nejen peresájící, ale také spojitá apava. Platí:

Tvrzení: Je-li F postouci fce na \mathbb{R} spojita zleva. Pak existuje jediná měra μ (často nazývaná dF) definovaná na σ -algebře borelovsfc množin tak, že $\mu([a, b]) = F(b) - F(a)$ je-li $a < b$. Naopak, je-li μ měra na σ -algebře borelovsfc množin, která je koncentrována omezených intervalech, pak F definované:

$$F(x) = \begin{cases} \mu([0, x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu([-x, 0]) & x < 0 \end{cases} \quad \text{jí postouci a spojita zleva.}$$

Je-li F postouci, spojita apava na $[a, b]$, pak lze postavit měru $[a, b]$ tak, že $F(x) = F(a)$ pro $x < a$ a $F(x) = F(b)$ pro $x > b$. Zajímá $\mu(-\infty, a) = 0$ a $\mu(b, +\infty) = 0$.

Příklad: $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \int_a^b f(x) dF$

Lebesgue-Stieltjesův integrál

se redukuje na Lebesgueův \int pro $F(x) = x$, což vede k nazívání $dF = dx$.

Postučený ① V d=1 můžeme $(\mathbb{R}) \int_a^b f$, když f je dobré definována pro $f \in C([a, b])$.

V jidoucím díle tedy budoucí rozšiřování Lebesgueova integrálu $\mathcal{H} := \{f \in C([a, b])\}$.

② Jiný způsob rozšíření $(\mathbb{R}) \int_a^b f$.

- (X, Σ, μ) měrba s měrou
- f je měřitelná $\Leftrightarrow (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \{x; f(x) > \lambda\}$ je měřitelná
- H jednoduché fce ne měřitelné Σ .

UMLUVA

Budě $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$. Definujme

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ podle } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

Je-li $\tilde{f} \in M$, pak definujme

$$(L) \int_{\Omega} f = (\mathbb{E}) \int \tilde{f} \quad \text{nebož } f \in L(\Omega) \Leftrightarrow \tilde{f} \in L$$

Věta 3.13 (zápislost (\mathbb{E}) na integraci v oboru). Pro $\Omega, \Omega_i \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, $i \in \mathbb{N}$, platí:

$$(1) \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \text{ a } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ (i} \neq j\text{)} \text{ a } f \in L(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega_i} f$$

$$(1') \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \text{ a } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ (i} \neq j\text{)} \text{ a } 0 \leq f \in M, \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega_i} f < +\infty \Rightarrow f \in L(\Omega)$$

$$(2) \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \text{ a } \Omega_i \subset \Omega_{i+1} \text{ pro } \forall i \text{ a } f \in L(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega_i} f$$

$$(3) \Omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_i \text{ a } \Omega_{i+1} \subset \Omega_i \text{ pro } \forall i \text{ a } f \in L(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega_i} f$$

$$(4) \lambda_d(\Omega) < \infty \text{ a } f \in M(\Omega) \text{ a } (\exists K) (|f| \leq K \text{ na } \Omega)$$

$$\Rightarrow f \in L(\Omega) \text{ a } |\int_{\Omega} f| \leq K \lambda_d(\Omega) < \infty$$

$$(5) f \text{ měřitelná, } E \text{ množ. mít výpadek } \Rightarrow \int_E f = 0$$

$$(6) \widetilde{\Omega} \subset \Omega, \widetilde{\Omega}, \Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \text{ a } f \in L(\Omega) \Rightarrow \int_{\widetilde{\Omega}} f \leq \int_{\Omega} f$$

Dl | Ad (1) Je-li $f \in L(\Omega)$, pak $|f| \in L(\Omega)$. Dle Lebesgueovy

věty ($|f|$ je integr. maz.) $f \in L(\Omega)$.

$$\text{Neníc } \sum_{i=1}^k x_{\Omega_i} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi_{\Omega} f \text{ v } \mathbb{R}^d \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f &= \int f \chi_{\Omega} \stackrel{\text{Lebesg.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{i=1}^n f X_{\Omega_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int f X_{\Omega_i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega_i} f \end{aligned}$$

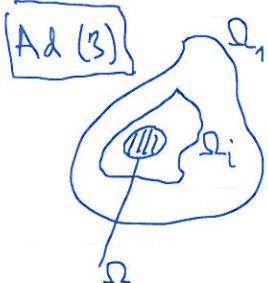
Ad (1) $\sum_{i=1}^k f \chi_{\Omega_i} \rightarrow f \chi_{\Omega}$ náboří $f \geq 0$. S využitím Relyjich předpokladů a Lebesgueovy sítě doložíme $f \chi_{\Omega} \in L \Rightarrow f \in L(\Omega)$.

Ad (2) Definujeme $\tilde{\Omega}_i$ pomocí Ω_i tak, aby vznikl množinu disjunktního systému:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &:= \Omega_1 \\ \tilde{\Omega}_i &:= \Omega_{i+1} - \Omega_1 \quad \dots \quad \text{a } \bigcup \tilde{\Omega}_i = \Omega\end{aligned} \Rightarrow \tilde{\Omega}_i \text{ množinu disjunktního systému}$$

Dle (1):

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\Omega}_i} f &= \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2 - \Omega_1} f + \dots + \int_{\Omega_n - \Omega_{n-1}} f \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}_1} f \chi_{\Omega_1} + f \chi_{\Omega_2 - \Omega_1} + \dots + f \chi_{\Omega_n - \Omega_{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \chi_{\Omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f\end{aligned}$$



$$\Omega_1 - \Omega_i \rightarrow \Omega_1 - \Omega \stackrel{\text{Dle (2)}}{\Rightarrow} \int_{\Omega_1 - \Omega} f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega_i - \Omega} f \Rightarrow$$

$$\int f \chi_{\Omega_1 - \Omega} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f \chi_{\Omega_1 - \Omega_i} \Rightarrow \int f \chi_{\Omega_1} - \int f \chi_{\Omega} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int f \chi_{\Omega_1} + \int f \chi_{\Omega_i} \right) - \int f \chi_{\Omega_i}$$

$$\Rightarrow \int f \chi_{\Omega} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f \chi_{\Omega_i} \quad \square$$

Ad (4) Samo - jednoduché, ale často vhodné! & použití.

Ad (5) Definice dodefinuje f na E mimo. Tedy $\tilde{f} = 0$

s.v. (příčemž jme využili charakteristiky množin mimo množinu charakteristických funkcií). Pak dle Výh 3.2: $\int \tilde{f} = 0$ a to znamená $\int_E f = 0$.

Ad (6) Platí pro $f \geq 0$: $\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} f + \int_{\Omega - \Omega} f = \int_{\Omega} f \geq 0$ □

3.5 Jak se Lebesgueho integrál počítá

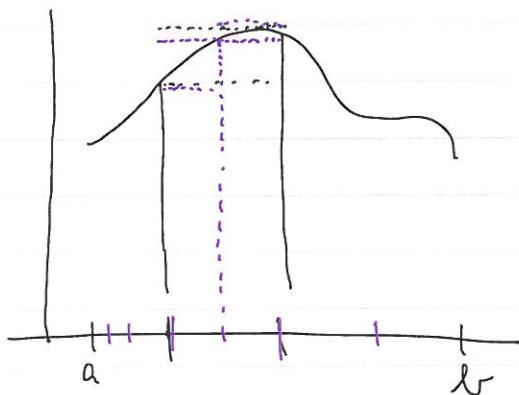
Nejdříve se zaměříme na situaci pro funkce jedné proměnné, $d=1$. Poté uvedeme dve upoznání k tomu pro funkce více proměnných: Fubiniho věta a věta o substituci.

Věta 3.14 (Existence $(\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx$ implikuje existenci $(\mathbb{L}) \int_a^b f$)

- $a, b \in \mathbb{R}$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ omezená } \Rightarrow $f \in L(a, b)$
- Existuje $(\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx$ } $(\mathbb{L}) \int_a^b f = (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx$

(D)
Buť $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ posloupnost dílení (a, b) ; $D_{m+1} \subset D_m$
a $|D_m| \searrow 0$ ($|D_{m+1}| \leq |D_m|$).

Definujme $h_m, H_m \in \mathcal{H}$: $h_m = \sum m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}$, $m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$
 $H_m = \sum M_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$



$$\text{Paž } h_m \leq h_{m+1} \leq \dots \leq H_1$$

a

$$H_m \geq H_{m+1} \geq \dots \geq H_1$$

a existují funkce F_1 a F_2
takže

$$h_m \nearrow F_1 \text{ a } H_m \searrow F_2$$

Dle Lebesgueho

- $F_1, F_2 \in L$
- $(\mathbb{L}) \int F_1 = \lim (\mathbb{L}) \int h_m = \lim (\mathbb{R}) \int h_m = (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx$
- $(\mathbb{L}) \int F_2 = \lim (\mathbb{L}) \int H_m = \lim (\mathbb{R}) \int H_m = (\mathbb{R}) \int_a^b f(x) dx$

Problém (R) $\int_a^b f$ existuje, takže ho můžeme nazvat Riemannova
 součty $(\mathbb{R}) \int_a^b f$ a $(\mathbb{R}) \int_a^b f$ smaj. Tedy

$$(\mathbb{Z}) \int_a^b F_1 = (\mathbb{Z}) \int_a^b F_2$$

Prostředí $l_m \leq f \leq h_m$, tak $(n \rightarrow \infty)$ $F_1 \leq f \leq F_2$ s.v.

Problém $F_2 - F_1 \geq 0$ p.r., & $(\mathbb{Y}) \int F_2 - F_1 \geq 0$, tak $F_1 = F_2$ s.v.

Což implikuje $F_1 = F_2 = f$ s.v. Tvrzení je dokázáno. \square

Existuje mnoho integrálů, doporučujeme se seznámiti
 s Riemannovou a Lebesgueovou. Lze také
 zavést Newtonovu integraci a to mohou dle výběru spíše být:
 buď $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a
 nechť $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ji prožívá a splňuje
 $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b) \setminus K$, kde K je konstrukce
 (F je zobecněná primitivní funkce). Nechť
 máme

$$F(b-) - F(a+)$$

ani smajl, pak

$$(\mathbb{N}) \int_a^b f = F(b-) - F(a+)$$

Ze získané věty diferenciální a integrálního
 počtu lze ucházet, i.e. použít ekvivalence (a, b)
 mezi \mathbb{R} a (\mathbb{N}) aritmetickým počtem smajl.

Používajme, že Newtonov integrál je průběžný
 neabsolutně konvergentního integrálu: existují funkce
 na $(0, \infty)$ tak, už $(N) \int_0^\infty f < \infty$ a $(N) \int_0^\infty |f| = +\infty$

□

Průběžnost Pro jaké $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((0, b))$, $b \in \mathbb{R}$?

Nášení $\frac{1}{x^\alpha} \in C((0, b)) \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \in M((0, b)) \forall \alpha$ a $\frac{1}{x^\alpha} \geq 0$.

Uvažme $\Omega_m = \left\langle \frac{1}{m}, b \right\rangle$

$$(L) \int_{\frac{1}{m}}^b \frac{1}{x^\alpha} dx = (R) \int_{\frac{1}{m}}^b \frac{1}{x^\alpha} dx = (N) \int_{\frac{1}{m}}^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{\frac{1}{m}}^b$$

$$= \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\frac{1}{m} \right)^{1-\alpha} \begin{cases} \rightarrow \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ pro } \alpha < 1 \\ \rightarrow +\infty \text{ pro } \alpha > 1 \end{cases}$$

Problém $(N) \int_{\frac{1}{m}}^b \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\ln x \right]_{\frac{1}{m}}^b \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$,

dohledně:

$$\boxed{\frac{1}{x^\alpha} \in L((0, b)) \iff \alpha < 1}$$

Prověřte podobnou analýzu pro $\frac{1}{x^\alpha}$ na $(1, \infty)$:

pro jaké $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((1, \infty))$?

Veta 3.15

$$\textcircled{1} \cdot f \in C((a_1, +\infty)), f \geq 0 \quad (\text{mbo } \leq 0) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet A \in (0, \infty), f \in L(a_1, +\infty) \Leftrightarrow d > 1 \\ \Rightarrow A = 0 \wedge d > 1 \Rightarrow f \in L(a_1, \infty) \end{array} \right\}$$

• existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| \cdot x^d = A$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet A = +\infty \wedge d \leq 1 \Rightarrow \\ f \in L^*(a_1, +\infty) - L(a_1, +\infty) \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{2} \cdot f \in C((a_1, b)), f \geq 0 \quad (\text{mbo so}) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet A \in (0, 1): f \in L(a_1, b) \Leftrightarrow d < 1 \\ \Rightarrow A = 0 \wedge d < 1 \Rightarrow f \in L(a_1, b) \end{array} \right\}$$

• existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)(x-a)^d = A$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet A = \infty \wedge d \geq 1 \Rightarrow \\ f \in L^*(a_1, b) - L(a_1, b) \end{array} \right\}$$

Dle Ad ① $A \in (0, \infty) \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2A}{x^d}$ na orohi $+ \infty$.

tato majoranta je integrorakelná $\Leftrightarrow d > 1$;

$$\begin{array}{ll} \underline{A=0} & \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{C}{x^d} \quad \text{a tvar } \frac{C}{x^d} \text{ je } \\ \underline{A=+\infty} & \text{neboť pro } d > 1 \\ \hline \downarrow & \text{jistě ma orohi} \quad \text{je } \frac{C}{x^d} \in L \end{array}$$

$$\exists L > 0 \quad |f(x)| \geq \frac{L}{x^d} \quad \text{na jisté orohi}$$

a tvar $\frac{L}{x^d}$ je sítka oboru, t.j.

$$\int \frac{L}{x^d} = +\infty.$$

Ad ② SAMI.



Věta 3.16 (Fubini) Buď $f \in L^*(\mathbb{R}^{q+s})$. Definujme

$$\text{pro } x \in \mathbb{R}^q: F(x) = (\int) \int_{\mathbb{R}^s} f(x,y) dy \quad (= (\int) \int_{\mathbb{R}^s} f(x_1 \cdot) dy)$$

$$\text{pro } y \in \mathbb{R}^s: G(y) = (\int) \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) dx \quad (= (\int) \int_{\mathbb{R}^q} f(\cdot, y) dx)$$

Par

$$F \in L^*(\mathbb{R}^q) \quad \text{a} \quad G \in L^*(\mathbb{R}^s)$$

a platí:

$$\begin{aligned} \cdot (\int) \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f &= \int_{\mathbb{R}^q} F = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y) dy \right) dx \quad (*) \\ \cdot (\int) \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f &= \int_{\mathbb{R}^s} G = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) dx \right) dy \quad (***) \end{aligned}$$

Důkaz ① Buď $\Omega \subset \Lambda(\mathbb{R}^{q+s})$ tj. Ω je měřitelná
a buď $f \in L^*(\Omega)$. Označ

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^q; \exists y \in \mathbb{R}^s \text{ a } (x,y) \in \Omega\} \text{ - přemět } \Omega \text{ do } \mathbb{R}^q$$

$$P_2 = \{y \in \mathbb{R}^s; \exists x \in \mathbb{R}^q \text{ a } (x,y) \in \Omega\} \text{ - přemět } \Omega \text{ do } \mathbb{R}^s$$

Dle nače: $\begin{cases} \text{pro } x \in P_1 : n^{(x, *)} := \{y \in \mathbb{R}^s; (x,y) \in \Omega\} \\ \text{pro } y \in P_2 : n^{(*, y)} := \{x \in \mathbb{R}^q; (x,y) \in \Omega\}. \end{cases}$

Jedouc: $P_1 \in \Lambda(\mathbb{R}^q)$ a $P_2 \in \Lambda(\mathbb{R}^s)$, par

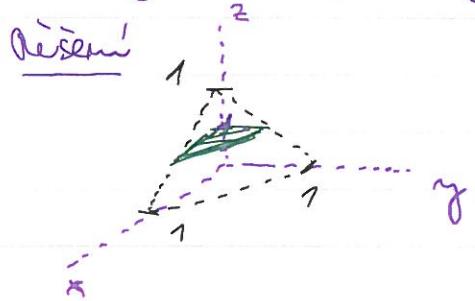
$$(1) \text{ pro s.v. } x \in P_1 \text{ existuje } F(x) := \int_{n^{(x, *)}} f(x, \cdot)$$

$$\text{pro s.v. } y \in P_2 \quad \rightarrow \quad G(y) := \int_{n^{(*, y)}} f(\cdot, y)$$

- ② Existenz: $\int_{P_1} F(x) dx \approx \int_{P_2} G(y) dy$
- ③ Praktisch: $\int_a f = \int_{P_1} F(x) dx = \int_{P_1} \left(\sum_{M(x,y)} f(x,y) dy \right) dx$
 $= \int_{P_2} G(y) dy = \int_{P_2} \left(\sum_{M(x,y)} f(x,y) dx \right) dy$
- Durchführbar: Definizi $\tilde{f} = f \chi_M$ a kürzest v. 3.16.

Präzis: Nachweis obige Formel w. $I = (\mathbb{E}) \int f(x,y,z)$,
 da M je messbare positive symmetrische Fläche

$x=0, y=0, z=0$ a $x+y+z=1$ a jede gerade
objekt in (Lebesgueon min M).



$$M \subset \mathbb{R}^3$$

$$\cdot M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z \in (0,1), y \in (0,1-z), x \in (0,1-y-z)\}$$

Teil oberein:

$$\int_M f(x,y,z) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz$$

Spezialfall:

$$V(M) = \chi_M(M) = \int_M 1 = \iiint_M dx dy dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} dx \right) dy \right) dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-y-z) dy dz$$

$$= \int_0^1 \left[(1-z)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-z} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^2 dz = \frac{1}{2} \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Dr. Fubiniho věty

Stále platí pro $f \geq 0$ a pro $F(x) = (\int_{\mathbb{R}^S} f(x,y) dy)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{c.t.: } \cdot F \in L^*(\mathbb{R}^q) \\ (*) \quad \cdot \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^S} f(x,y) dy \right) dx \end{array} \right.$$

Druhé $f \in M^+$, resp. $f \in L^*$
existují $h_m \in H$, $h_m \uparrow f$.

Načteme, že [1] (*) platí pro $h_m \in H$

[2] provedeme limitu přechod $m \rightarrow \infty$.

Ad [1] h_m je definován mezi $I_i^m = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^{q+s}} I_i^{m,q} \times I_j^{m,s}$

Odtud I_{ij}^m --- podinterval I_i^m , na kterém je h_m^m rovno c_{ij}^m
a proto $I_{ij}^m = I_i^{m,q} \times I_j^{m,s}$, vliv obrátěk pro
 $q = s = 1$

I_{13}^m		
I_{12}^m	I_{22}^m	I_{23}^m
I_{11}^m	I_{21}^m	I_{31}^m
		$I_{13}^{m,q}$

Závěrečně

$$V(I^m) = V(I_i^{m,q}) V(I_j^{m,s})$$

$$V(I_{ij}^m) = V(I_i^{m,q}) V(I_j^{m,s})$$

Tak $x \in I_i^{m,q}$ existuje $i : x \in I_i^{m,q}$ a definice

$$F_i^m(x) = \int_{\mathbb{R}^S} h_m(x,y) dy = \sum_{j=1}^m c_{ij}^m V(I_j^{m,s})$$

což je konstanta! na $I_i^{m,q}$

Daleko

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{q+s}} h_m &= \int_{\mathbb{R}^q} h_m = \sum_{i,j=1}^m c_{ij}^m V(I_j^{m,s}) = \sum_{i,j=1}^m c_{ij}^m V(I_i^{m,q}) V(I_j^{m,s}) \\ &= \sum_i V(I_i^{m,q}) \sum_j c_{ij}^m V(I_j^{m,s}) = \sum_i V(I_i^{m,q}) F_i^m \end{aligned}$$

tede $F^m = \sum_i F_i^m X_{I_i^{m,q}}$ je
definován mezi $I_i^{m,q}$
je jednoduché

*) Tedy $F_i^m(x) = F_i^m$

Ad [2] $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\int_{\mathbb{R}^{q+s}} f = \int_{\mathbb{R}^{q+s}} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \stackrel{\text{Leh.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{q+s}} h_n$$

$$\begin{aligned} [1] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} h_n(x,y) dy \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^q} F^n \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Leh.}}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \lim_{n \rightarrow \infty} F^n = \int_{\mathbb{R}^q} F$$

$F^m \nearrow F$ (někdy $\lim_{n \rightarrow \infty} f$ a používáme definici F/F). \blacksquare

Důsledek Fubiniho věty (významný z počtu hlediska)

Je-li $f \in M(\Omega)$ a jde-li $P_1, P_2, \Pi^{(x_1*)}, \Pi^{(*y)}$

jako ve Fubiniho věti 3.16 a je-li akceptovatelný i jeden z integrálů

$$I := \int_{P_1} \left(\int_{\Pi^{(x_1*)}} |f(x,y)| dy \right) dx, \quad J := \int_{P_2} \left(\int_{\Pi^{(*y)}} |f(x,y)| dx \right) dy$$

zároveň, pak

$f \in L(\Omega)$ a tvar $(*)$ a $(**)$ platí.

(Dle tohoto důsledku)

Je-li $f \in \mathcal{N}(\Omega)$, pak $|f| \in M(\Omega)$. Protože

$|f| \geq 0$, tak $|f| \in L^*(\Omega)$ a pro $|f|$ dle Fubiniho věty

$(*)$ a $(**)$ platí pro $|f|$, protože I množ. J je rovnouf.

Tak $(*)$ a $(**)$ pro $|f|$ implikují $\int |f| < +\infty$. Tedy

$f \in L(\Omega)$ a my užíváme Fubiniho větu na f a dokážeme, že $(*)$ i $(**)$. \blacksquare

Věta 3.14 (o substituci) Bud

- $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $\psi: G \rightarrow \mathbb{R}^d$ prohé, regulární (tzn. ψ je C^1 zobrazení mezi G , $\det \nabla \psi \neq 0$ v G)
- $\Omega \subset \Lambda(\mathbb{R}^d)$ takový, že $\Omega \subset \psi(G)$
- f definovaná s.v. na Ω

Pak $\int_{\Omega} f(y) dy = \int_{\psi^{-1}(\Omega)} f(\psi(x)) |\det \nabla \psi(x)| dx$ (•)

pokud existuje každá vnitřní integrál.

Místo důkazu uvedeme několik potvrzadícího pochopení pravomoci členu $|\det \nabla \psi(x)|$ ve vztahu (•).

Potvrzadit (i) Je-li $d=1$, pak $\det \nabla \psi(x) = \psi'(x)$. Pro $d=1$, má Věta 3.14 tvor:

Je-li $\psi: (\alpha, \beta) \xrightarrow{\text{regulární}} (\psi(\alpha), \psi(\beta))$ a $\psi' > 0$ nebo $\psi' < 0$ a $(\alpha, \beta) \sim (\alpha, \beta)$ a je-li $\boxed{\psi' > 0}$, pak ψ je prohé a $\psi(\alpha) < \psi(\beta)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(\psi(x)) \psi'(x) dx,$$

je-li ψ Riemannově integrovatelná

Je-li $\boxed{\psi' < 0}$ pak ψ je zrcadlení a $\psi(\beta) < \psi(\alpha)$

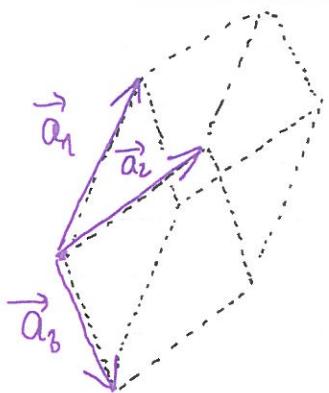
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\psi(\beta)}^{\psi(\alpha)} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(x)) \psi'(x) dx.$$

Tedy

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy$,

je opět věta o substituci známá a lze ji použít k Riemannové integraci.

② Geometrický vztah me determinantu



Budě A matice: i -tý sloupec = vektor \vec{a}_i

Budě R_A rozměřitelného jeho množina obrazů.

$$\text{Platí: } \boxed{\lambda_d(R_A) = |\det A|}$$

d -rozměrná Lebesgueova míra R_A
objem "množestva" R_A

(D)

$$R_A := \left\{ y \in \mathbb{R}^d; y = \sum_{i=1}^d x_i \vec{a}_i, x_i \in (0,1), i=1, \dots, d \right\}$$

- $\psi(x) = \sum_{i=1}^d x_i \vec{a}_i : (0,1)^d \xrightarrow{\text{no}} R_A$ prostřednictvím
- $\det \nabla \psi(x) = \det A$

$$|R_A| := \lambda_d(R_A) = \int_{R_A} 1 d\lambda_d = \int_{(0,1)^d} |\det A| d\lambda_d(x) \\ = \det A \underbrace{\lambda_d((0,1)^d)}_{=1} \quad \square$$

Obsah: Pro $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^d$: $K_\delta = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d; 0 < x_i - x_i^0 < \delta \}$

Pro $y^0 \in \mathbb{R}$

$$\psi(x) = \vec{y}^0 + \sum_{i=1}^d (x_i - x_i^0) \vec{a}_i = \vec{y}^0 + A(\vec{x} - \vec{x}^0)$$

obracají K_δ na rozměřitelném o stranách daných vektory $\delta \vec{a}_i$.

Tedy

$$|\psi(K_\delta)| = |\det A| |\delta K_\delta|$$

ZMĚNA OBJEKTU PŘI LINEÁRNÍ TRANSFORMACI.

Jestě obecněji můžeme $\vec{\psi}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ regulérnu.

Pak dle Taylorova příroje:

$$\vec{\psi}(\vec{x}) = \vec{\psi}(\vec{x}^0) + \underbrace{\nabla \vec{\psi}(\vec{x}^0)}_{= \text{d}\vec{\psi}(\vec{x}^0; \vec{x} - \vec{x}^0)} (\vec{x} - \vec{x}^0) + \sigma(|\vec{x} - \vec{x}^0|)$$

lineární approximace $\vec{\psi}$ v bode \vec{x}^0

Pak pro $|\vec{x} - \vec{x}^0|$ malá platí:

$$|\vec{\psi}(\vec{x}_0)| \approx |\det \nabla \vec{\psi}(\vec{x}^0)| |K_\delta|$$

↑
koeficient zmeny objemu regule
ne jenž obrat transformací $\vec{\psi}$
přibližně pomalejším.

Potřebujeme, už abstraktně

$$\vec{\psi}(\vec{x}) = \vec{y}^0 + \underbrace{A(\vec{x} - \vec{x}^0)}_{\text{posunutí}} \quad , \quad \text{kde } A A^T = 1 \quad \text{ortogonální matice } \parallel$$
$$\det A = 1$$

zachovává délky*, objem, ...

Príklady

① Polární, cylindrické, sférické
d-rotučné sférické souřadnice

viz cvičení

* Platí

$$|\vec{\psi}(\vec{x}^1) - \vec{\psi}(\vec{x}^2)|^2 = (\vec{\psi}(\vec{x}^1) - \vec{\psi}(\vec{x}^2)) \cdot (\vec{\psi}(\vec{x}^1) - \vec{\psi}(\vec{x}^2)) = (A(\vec{x}^1 - \vec{x}^2)) \cdot (A(\vec{x}^1 - \vec{x}^2)) = \underbrace{|A|^2}_{= 1} |\vec{x}^1 - \vec{x}^2|^2$$

$$\textcircled{2} \text{ Specielle } I_d := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{x}|^2} d\vec{x}$$

Plati $I_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_d^2} = \text{Fubini} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_d^2} \right) \dots \right) \right)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr$$

Nyní použijme I_2 pomocí výzvy o substituci a použití polárních souřadnic:

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\varphi$$

$\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

množ. mívají nula

$$\det D\varphi = r$$

$$\text{Fubini} = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi$$

Tedy $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} dx dy = I_2 = \pi$ implikuje $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} dx dy = \sqrt{\pi}$ a tedy

$$\boxed{I_d = (\pi)^{\frac{d}{2}}}$$

$$\textcircled{5} \text{ Pro } \alpha > \beta > 0 \text{ specielle: } I(\alpha|\beta) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$$

Definice $f(x,y) := \frac{e^{-y x^2}}{x^\beta} \dots$ par. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dy = \int_x^{\infty} -x e^{-y x^2} dy$

$$f(x,\beta) - f(x,\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} -x e^{-y x^2} dy$$

Tedy $I(\alpha|\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-y x^2} dy \right) dx$

integr. funkce

$\xrightarrow{\text{Fubini}} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_0^{\infty} x e^{-y x^2} dx \right) dy$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{e^{-y x^2}}{2y} \right]_0^{\infty} dy = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y} dy = \ln \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

□

3.6 Integraly závislé na parametrech

Předchozí příklad byl příručen integrálům s vnitřními nebo parametry α, β . V této kapitolce se budeme zabývat otázkou, zda když integrál $I(\alpha) = \int_{\Omega} f(\alpha, x) dx$ derivovat dle α tak, že funkce $\int_{\Omega} f(\alpha, x) dx$ je derivovatelná, tj. zda platí

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, x) dx.$$

Podobně platí:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} I(\alpha) = \int_{\Omega} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(\alpha, x) dx ?$$

Odpovědi přimáčíme následující věty.

Věta 3.18 (o závěrečné hodnotě)

Budějte $\alpha_0 \in P \subset \mathbb{R}^P$, $\Omega \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$. Budějte $F: P \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

(1) $\forall \alpha \in P$ $F(\alpha, \cdot)$ je měřitelná

(2) Pro s.r. $x \in \Omega$ existuje $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F(\alpha, x) =: F(x)$

(3) $\exists g \in L(\Omega)$: pro s.r. $x \in \Omega$ a $\forall \alpha \in P$: $|f(\alpha, x)| \leq g(x)$

Potom $\cdot F \in L(\Omega)$

$$\cdot \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\Omega} F(\alpha, x) dx = \int_{\Omega} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F(\alpha, x) dx = \int_{\Omega} F(x) dx$$

Dle výše z Heineho a Lebesgueova věty.

$$\text{Heine: } \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\Omega} F(\alpha, x) dx = A \iff \exists \{x_m\}_{m=1}^{\infty}, \alpha_m \rightarrow \alpha_0 \Rightarrow \int_{\Omega} F(\alpha_m, x) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(\alpha_0, x) dx$$

Lebesgueova věta aplikujeme jinoumu funkci $f_m(x) := F(\alpha_m, x)$.



Důsledky Věty 3.18 (i) Nahradime-li (2) předpokladem

resp. (2') $F(\alpha, x)$ je pro s.v. $x \in \Omega$ spojitá v α

(2'') $F(\cdot, x) \in C(P)$ pro s.v. $x \in \Omega$,

potom $\varphi: \alpha \mapsto \varphi(\alpha) := \int_{\Omega} F(\alpha, x) dx$ je spojitá v α .

resp.

$\varphi \in C(P)$.

(ii) $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0}$, spojitosť, derivace jde o lokální vlastnosti:

a důkazu tedy stačí mít majorantu jen na určitém okolí α_0 (a ne nutně na celém P)

(iii) Předpoklad (3) lze nahradit předpokladem

(3') pro s.v. $x \in \Omega$ a $\forall \alpha, \beta \in P: \alpha \leq \beta \Rightarrow F(\alpha, \cdot) \leq F(\beta, \cdot)$

a $(\exists K \in \mathbb{R}) \quad \int_{\Omega} F(\alpha, x) dx \leq K \quad \forall \alpha \in \mathcal{N}(\alpha_0)$

což je zřejmě podobné druhému nahradíme Lebesgueovu větu Lebesgueho větu.

Věta 3.19 (O závislosti derivace a S) Budeme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

a $F: I \times \Omega \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^d} \mathbb{R}$ taková, že

(1) $(\forall \alpha \in I) \quad F(\alpha, \cdot)$ je měřitelná

$\exists N \subset \Omega, \gamma_N(N) = 0$ takže

(2) $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ je rovněž v $\Omega \setminus N$

(3) $\exists g \in L(\Omega), (\forall \alpha \in I) \quad \left| \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right| \leq g \quad v \Omega \setminus N$

(4) $\exists \alpha_0 \in I: F(\alpha_0, \cdot) \in L(\Omega)$

Pak • $(\forall \alpha \in I) \quad F(\alpha, \cdot) \in L(\Omega)$

$$\bullet \quad \frac{dI}{d\alpha} = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x) dx$$

(D) Pro $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$ a pro $x \in \Omega \setminus N$ ji dle Lagrangeovy věty o středcích hodnotě

$$\left| \frac{F(\alpha, x) - F(\beta, x)}{\alpha - \beta} \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial \alpha} (\xi, x) \right| \leq g(x)$$

Potom $g \in L(\Omega)$, tak $x \mapsto \frac{F(\alpha, x) - F(\beta, x)}{\alpha - \beta} \in L(\Omega)$

Volbou $\beta = \alpha_0$ dostávame

$$F(\alpha, \cdot) \in L(\Omega) \quad \forall \alpha \in I$$

Neníc

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{I(\alpha) - I(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int \frac{F(\alpha, x) - F(\alpha_0, x)}{\alpha - \alpha_0} dx \\ &\stackrel{\text{věta B.18}}{=} \int \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{F(\alpha, x) - F(\alpha_0, x)}{\alpha - \alpha_0} dx \\ &= \int \frac{\partial F}{\partial \alpha} (\alpha_0, x) dx. \end{aligned}$$

✓

Pozorování: Opět lze získat předpoklad, že, ažkoliv nerozdílili Lebesgueovy měry.

Příklady ① Společné $I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx) dx = 2 \int_0^\infty f(a, b, x) dx$ pro $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

Rешení: Označ $f(a, b, \cdot) := e^{-ax^2} \cosh(bx)$

• Pro $\forall a > 0, b \in \mathbb{R}$: $f(a, b, \cdot) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f(a, b, \cdot) \in M(\mathbb{R})$

• $|f(a, b, \cdot)| \leq e^{-\frac{a}{2}x^2}$ pro dostatečně velké x
 $\int_a^\infty e^{-\frac{a}{2}x^2} dx < +\infty$ (viz příklad druhý)

neníli $\forall a_0 > 0 \exists U_{a_0}(a_0)$ tak, že $\forall a \in U_{a_0}(a_0)$

(dokonce $\forall a \in (\frac{a_0}{2}, +\infty)$) a $\forall b \in \mathbb{R}$

$$|f(a, b, \cdot)| \leq e^{-\frac{a}{2}x^2} \Rightarrow f(a, b, \cdot) \in L(\mathbb{R}) \quad \forall a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

- $\frac{\partial f}{\partial a}(a, b, x) = -x^2 e^{-ax^2} \cosh bx$
- $\frac{\partial f}{\partial b}(a, b, x) = x e^{-ax^2} \sinh bx \in L(\mathbb{R}) \quad (\text{steigne' argumenta})$
- $f(a, 0, x) = e^{-ax^2} \in L(\mathbb{R}) \quad (\text{mit period. Drive})$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} I(a, b) &= 2 \int_0^\infty x e^{-ax^2} \sinh bx \, dx = 2 \left[\underbrace{-\frac{1}{2a} \sinh bx e^{-ax^2}}_{=0} \right]_0^\infty \\ &\quad + \frac{b}{a} \int_0^\infty e^{-ax^2} b \cosh bx \, dx = \frac{b}{2a} I(a, b) \end{aligned}$$

Tedy některý ODR = parametrem a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \ln I(a, b) &= \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{b^2}{4a} + c(a) \right) \\ \ln I(a, b) &= \frac{b^2}{4a} + c(a) \\ I(a, b) &= K(a) \exp \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Dosazeme $b=0$:

$$I(a, 0) = K(a), \text{ ale } I(a, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Tedy

$$I(a, b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \frac{b^2}{4a}$$

VIA

(2) Pokud $F(b) = \int_0^b \frac{x^b}{1+x} dx$ je funkce, tedy $F \in C([1, \infty))$.

Riešení:

- $f(b, x) = \frac{x^b}{1+x} \in C([0, 1])$ pro $b \in \mathbb{R} \Rightarrow f(b_i) \in M([0, 1])$

- pro $x \in (0, 1)$: $\frac{x^b}{1+x} \in C(\mathbb{R})$

- zbyvá upevnit pro jistotu b : $\frac{x^b}{1+x} \in L(0, 1)$

Avtak:

$$\int_0^1 \frac{x^b}{1+x} dx = \int_0^{\varepsilon} \frac{x^b}{1+x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^b}{1+x} dx$$

≥ 0

$\in L([0, \varepsilon])$
 $\Leftrightarrow b > -1$

\downarrow

$\in L([0, 1])$

ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA

Víme, že $(C(\Omega))$ i $\left(\int_{\Omega} |f(x)| dx \right)$ nemají uplyn.

Uvažujme tedy

$$(L(\Omega); \left(\int_{\Omega} |f(x)| dx \right))$$

Pak $\|f\|_1 := \int_{\Omega} |f(x)| dx$ splňuje

$$(i) \|f\|_1 \geq 0$$

$$(ii) \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$$(iii) \|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$$

Přesto $\|f\|_1$ nemá normu na $L(\Omega)$, protože

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ s.v. (tedy může pro } f=0)$$

$(L(\Omega), \|\cdot\|_1)$ tedy nemá normování prostor

Lze však říct

$$L^1(\Omega) = L(\Omega) / \sim$$

unde $f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ s.v.} \Rightarrow (L(\Omega), \|\cdot\|_1)$
je uplyn.