Jonáš Dujava
Univerzita Karlova
Odbor: Fyzika

matfyz

1. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) \equiv \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \tag{1}$$

(a) na intervalu $(0, \varepsilon)$,

(b) na intervalu (ε, ∞).

Riešenie 1. Najprv vyšetríme bodovú limitu. Pre pevné $x \in (0, \infty)$ pomocou jednoduchej substitúcie $y = \frac{x}{n}$ dostávame známu limitu (alebo použijeme l'Hospitalove pravidlo)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} = \lim_{y\to 0_+} y \ln y = 0 \quad (n \to \infty \overset{x>0}{\Longrightarrow} y \to 0_+), \tag{2}$$

takže dostávame $\boxed{f_n \to 0 \text{ na } (0, \infty)}$.

Máme

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \ln \frac{x}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\ln \frac{x}{n} + 1 \right), \tag{3}$$

takže lokálny extrém nastáva pre $x_0(n) = ne^{-1}$, pričom na intervale $(0, x_0(n))$ sú f_n klesajúce a na $(x_0(n), \infty)$ rastúce.

To využijeme pri overovaní ekvivalentnej podmienky rovnomernej konvergencie.

(a) Od určitého n_0 je $x_0 > \varepsilon$ (pre pevné ε) a zároveň $f_n < 0$, takže z monotónnosti a spojitosti f_n dostávame (počítame rovnakú limitu ako v (2), tentokrát v absolútnej hodnote)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{(0,\varepsilon)} |f_n| \right) = \lim_{n\to\infty} |f_n(\varepsilon)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\varepsilon}{n} \ln \frac{\varepsilon}{n} \right| \overset{(2)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f_n \rightrightarrows 0 \text{ na } (0, \varepsilon)}. \tag{4}$$

Keďže ε mohol naberať ľubovoľne veľké hodnoty, platí dokonca $\boxed{f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0 \text{ na } (0, \infty)}$.

(b) Pracujeme na neobmedzenom intervale a funkcie f_n nie sú omedzené, takže dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{(\varepsilon,\infty)} |f_n| \right) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f_n \not\rightrightarrows 0 \text{ na } (\varepsilon, \infty)}. \tag{5}$$

Pre niekoľko konkrétnych n sú znázornené funkcie $f_n(x)$ v grafe 1.

2. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) \equiv \sqrt[2n]{x^n + e^x} \tag{6}$$

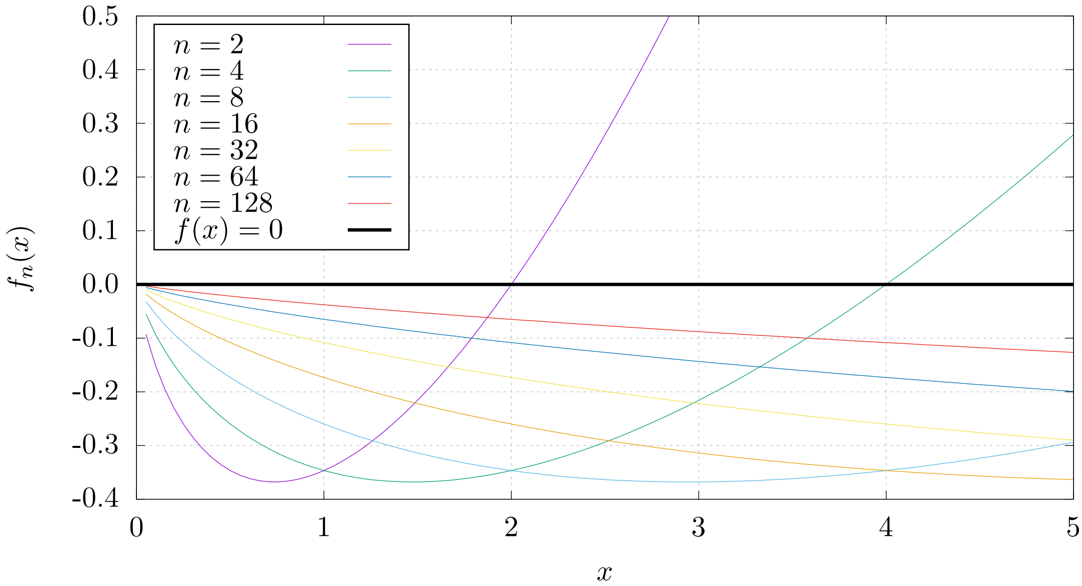
na intervalu $[0, \infty)$.

Riešenie 2. Pre pevné $x \in [0, 1)$ dostávame (využijeme $x^n \to 0$ a $C^{\frac{1}{n}} \to 1$)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{x}{2n}} \left(1 + \frac{x^n}{e^x} \right)^{\frac{1}{2n}} = 1. \tag{7}$$

Podobne pre $x = 1$ dostávame

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} (1 + e)^{\frac{1}{2n}} = 1. \tag{8}$$



Obr. 1: Graf funkcií $f_n(x)$ a ich bodovej limity $f(x)$ príkladu 1

A finálne pre $x \in (1, \infty)$ dostávame (kde sme využili spojitosť $\exp x$, použitím Heineho vety sme mohli prejsť k $n \in \mathbb{R}$ a následne využiť l'Hospitalove pravidlo a nakoniec odhadnúť pre dostatočne veľké n, že platí $e^x \ll x^n$)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x^n + e^x)}{2n}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n \ln x}{2(x^n + e^x)}\right) = \exp\left(\frac{\ln x}{2}\right) = \sqrt{x}, \quad (9)$$

takže $f_n \to f$, kde máme

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in [0,1] \\ \sqrt{x} & \text{pre } x \in (1,\infty). \end{cases}} \quad (10)$$

Funkcie f_n nekonvergujú rovnomerne na $[0, \infty)$, keďže pre ľubovoľné pevné n výraz $f_n - f$ vie naberať ľubovoľne veľké hodnoty (funkcia e^x limitne predbehne ľubovoľné x^n), takže určite nemáme splnenú ekvivalentnú podmienku rovnomernej konvergencie.

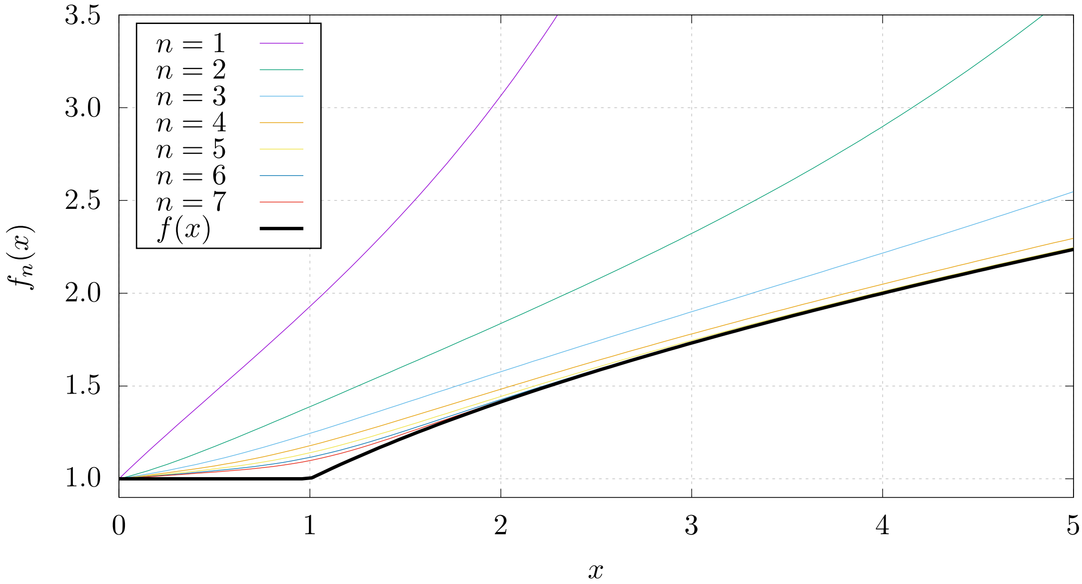
Môžeme ale skúmať konvergenciu na kompaktných podmnožinách $[0, K]$, kde $K > 0$. Pre overenie rovnomernej konvergencie použijeme Diniho vetu.

Máme splnené predpoklady $\{f_n\} \in C([0, K])$, $f \in C([0, K])$ a že $f_n \to f$ na $[0, K]$. Stačí ukázať, že pre všetky $n \in N$ platí $f_{n+1} \leq f_n$ na $[0, K]$. To vyplýva z výpočtu (pre $\alpha \geq 1$ a $x \geq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[(x^\alpha + e^x)^{\frac{1}{2\alpha}}\right] = \underbrace{(x^\alpha + e^x)^{\frac{1}{2\alpha}}}_{>0} \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2\alpha}\right)}_{<0} \underbrace{(x^\alpha \ln \alpha)}_{>0} < 0, \quad (11)$$

takže funkcie f_n sú klesajúce v parametri n. Dostávame teda $\boxed{f_n \rightrightarrows f \text{ na } [0, K]}$, respektíve $\boxed{f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \text{ na } [0, \infty)}$.

Pre niekoľko konkrétnych n sú znázornené funkcie $f_n(x)$ v grafe 2.



Obr. 2: Graf funkcií $f_n(x)$ a ich bodovej limity $f(x)$ príkladu 2

3. Zjistěte, zda je následující výrok pravdivý:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Riešenie 3. Začneme pravou stranou. Pre ľubovoľné $x \in (0,1]$ (pre $x = 0$ vzťah platí triviálne) pevné máme

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{PS: } \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0. \tag{13}$$

Pri počítaní ľavej strany použijeme substitúciu $u = n^2x^2 \Longrightarrow \mathrm{d}u = 2n^2x\,\mathrm{d}x$, takže dostávame

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\int_0^{n^2}\frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2\right). \tag{14}$$

Pomocou Heineho vety prechádzame k $n \in \mathbb{R}$ a použitím l'Hospitalovho pravidla dostávame ľavú stranu ako

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+n^2\right)}{2n} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2(1+n^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 0, \tag{15}$$

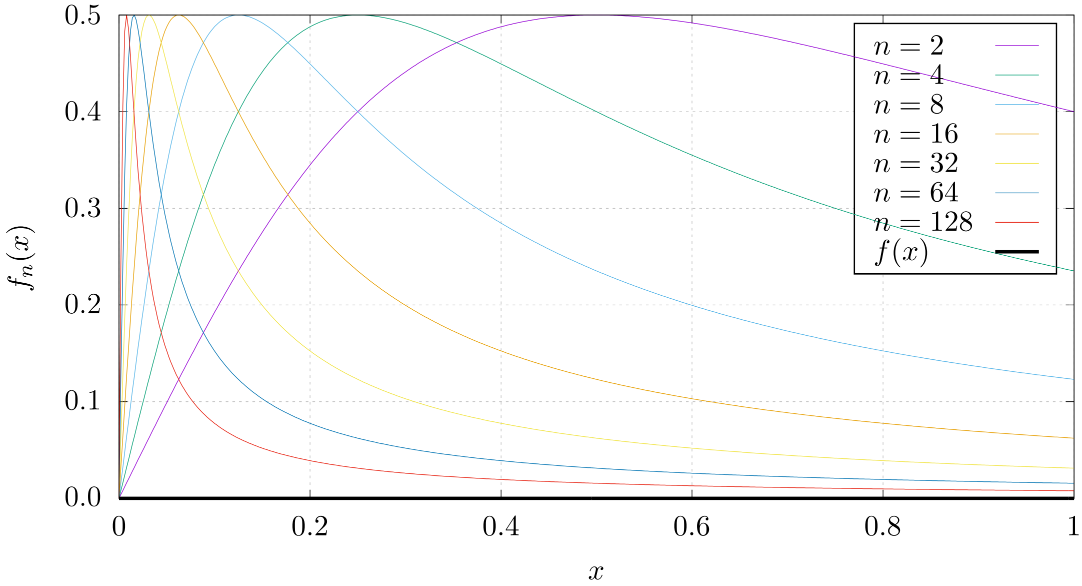
takže celkovo platí $\boxed{\text{LS} = \text{PS}}$ a zisťujeme, že výrok (12) je pravdivý.

Pri riešení sme nemohli použiť vetu o zámene limity a integrálu, pretože funkcia nekonverguje rovnomerne na intervale $[0,1]$. To je možné vidieť voľbou $x_0(n) = \frac{1}{n}$ (ktoré sa dá nájsť jednoduchým riešením globálnych extrémov), pre ktorú dostávame

$$f_{\max} = f(x_0) = \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0, \tag{16}$$

takže funkcia nekonverguje rovnomerne k bodovej limite $f(x) = 0$.

Ale keďže funkcia je na $[0,1]$ omedzená, a problematický nenulový interval sa natlačuje limitne k hranici $x = 0$ (jednoducho sa dá overiť, že platí $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,1]$), integrál v limite ide do nuly a platí (12). To možno pekne vidieť z grafu 3



Obr. 3: Graf funkcií $f_n(x)$ a ich bodovej limity $f(x)$ príkladu 3

4. Uvažujte posloupnost funkcí

$$f_n(x) \equiv \frac{1}{n} \arctan x^n. \tag{17}$$

(a) Konverguje f_n stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$?

(b) Platí $\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]'_{x=1} = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(1)$?

Riešenie 4. **(a)** Jednoduchým overením ekvivalentnej podmienky pre rovnomernú konvergenciu (použijeme $|\arctan x^n| \leq \frac{\pi}{2}$ na $\mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \arctan x^n \right| \right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{\pi}{2} = 0 \tag{18}$$

zisťujeme, že automaticky platí $f_n \rightrightarrows 0$ na $(-\infty, \infty)$.

Časť **(b)** overíme priamo výpočtom. Vďaka predošlému výpočtu pre ľavú stranu dostávame

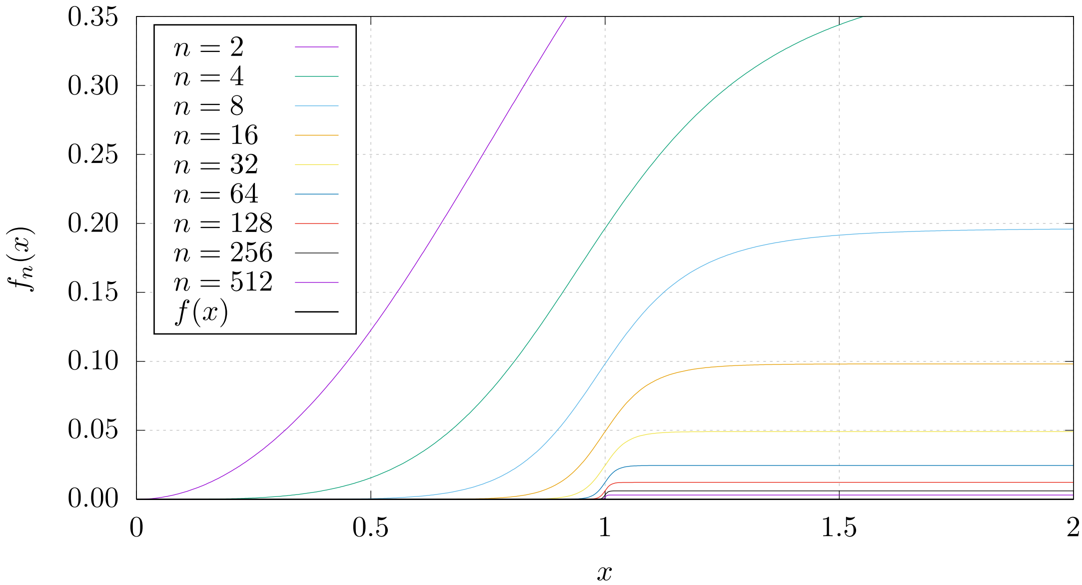
$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'_{x=1} = [0]'_{x=1} = 0. \tag{19}$$

Pre pravú stranu dostávame

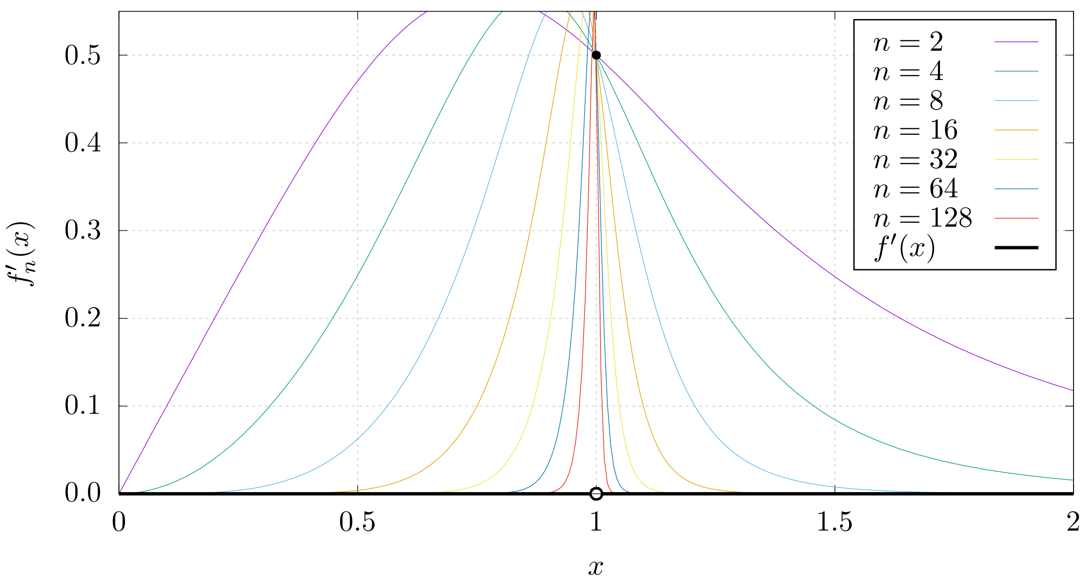
$$\lim_{n\to\infty} f'_n(1) = \lim_{n\to\infty} \left. \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \right|_{x=1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0, \tag{20}$$

takže $\boxed{\text{LS} \neq \text{PS}}$ a bod **(b)** neplatí.

Pri riešení sme nemohli použiť vetu o výmene derivácie a limity, pretože predpokladom je rovnomerná konvergencia derivácií, ktorú nemáme zaručenú (to vyplýva priamo z nášho výpočtu, pretože ak by derivácie konvergovali rovnomerne, určite by sme dostali rovnosť). Dá sa to odôvodniť nespojitou bodovou limitou f' postupnosti spojitých funkcií f_n' (viď graf 4 a 5).



Obr. 4: Graf funkcií $f_n(x)$ a ich bodovej limity $f(x)$ príkladu 4



Obr. 5: Graf funkcií $f_n'(x)$ a ich bodovej limity $f'(x)$ príkladu 4