NOFY161, ZS 2020-2021 Teoretická část zkouškové písemné práce 15. ledna 2021

Jméno a příjmení: ____________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Body	6	6	6	6	24
Získáno					

[6] 1.

- Uveďte definici stejnoměrné konvergence řad funkcí.
- Zformulujte Bolzano-Cauchyho podmínku ekvivalentní s definicí stejnoměrné konvergence řad funkcí.
- Zformulujte nutnou podmínku stejnoměrné konvergence řad funkcí a dokažte ji.
- Zformulujte Weierstrassův test stejnoměrné konvergence řad funkcí a dokažte jej.

[6] 2.

- Buď $G \in C([a,b])$ taková, že $\int_a^b G(x)h(x)\,dx = 0$ pro všechna $h \in C^\infty([a,b])$ splňující $h(a) = h(b) = 0$. Co lze pak říci o G? Dokažte.
- Buď $G \in C([a,b])$ taková, že $\int_a^b G(x)h'(x)\,dx = 0$ pro všechna $h \in C^\infty([a,b])$ splňující $h(a) = h(b) = 0$. Co lze pak říci o G? *Není třeba dokazovat.*
- Buď $E, G \in C([a,b])$. Dokažte

$$\int_a^b \Big[E(x)h'(x) + G(x)h(x)\Big]\,dx = 0 \quad \forall h \in C^\infty([a,b]) \text{ splňující } h(a) = h(b) = 0$$

je ekvivalentní s

$$E \in C^1([a,b]) \quad \text{a platí} \quad -E'(x) + G(x) = 0 \text{ v } (a,b).$$

[6] 3. Zadefinujte tyto pojmy:

- Měřitelný prostor (X, σ).
- míra μ.
- míra μ je absolutně spojitá vzhledem k jiné míře ν.

Buď $x \in \mathbb{R}^d$ pevné a $\delta_x : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ definováno předpisem

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A, \\ 0 & \text{pokud } x \notin A, \end{cases}$$

kde $A \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$.

- Ukažte, že δ_x splňuje vlastnosti míry (tzv. Dirakova míra).
- Ukažte, že δ_x není abolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře.

[6] 4. Buď H *Hilbertův separabilní prostor* a $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *úplný ortonormální systém.*

- Uvedené pojmy vysvětlete/zadefinujte.
- Zaveďte pro prvky $f \in H$ abstraktní Fourierovy řady s_n^f.
- Napište a dokažte v jakém smyslu s_n^f nejlépe aproximují f.
- Zformulujte a dokažte tvrzení týkající se Besselovy nerovnosti.
- Zformulujte Parsevalovu rovnost.
- Platí Parsevalova rovnost za výše uvedených předpokladů?