8.4 Limita, spojitost a derivace (vektorových) funkcí více proměnných

- Buď $f: M \to \mathbb{R}^m$, kde $M \subset \mathbb{R}^d$, $d, m \in \mathbb{N}$, typicky $d \geq 2$.

Úmluva přestaneme používat šipek, ale důsledně budeme psát, kam dané objekty patří. Tak

$$f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m \text{ znamená}$$
$$f(x) = (f_1(x_1,\dots,x_d),\dots,f_m(x_1,\dots,x_d)) \quad \text{kde } \underset{(x_1,\dots,x_d)}{\overset{\shortparallel}{x}} \in M$$

- Je-li $m=1$, mluvíme o skalárních funkcích.

Def. (limity) Řekneme, že f má v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ limitu $A \in \mathbb{R}^m$, (píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$), právě když,

$$\boxed{(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(0<|x-x_0|_{\infty,\mathbb{R}^d}<\delta)(|f(x)-A|_{\infty,\mathbb{R}^m}<\varepsilon)}$$

$\equiv$ neboli:

$$(\forall \mathcal{U}_\varepsilon(A))(\exists \mathcal{P}_\delta(x_0))\underbrace{(x\in \mathcal{P}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in \mathcal{U}_\varepsilon(A))}_{\Updownarrow}$$

$$f(\mathcal{P}_\delta(x_0)) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(A)$$

$\equiv$ neboli

$$\boxed{(\forall \mathcal{U}(A))(\exists \mathcal{P}(x_0))(f(\mathcal{P}(x_0)) \subset \mathcal{U}(A))}$$

topologická definice spojitosti

$\mathcal{U}(A)$ .... libovolná otevřená množina obsahující A

$\mathcal{P}(x_0)$ .... libovolná otevřená množina obsahující x_0 mínus $\{x_0\}$. tj. $\mathcal{P}(x_0) = \mathcal{U}(x_0)\setminus\{x_0\}$.

Def. (spojitosti f v x_0) Řekneme, že f je v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ spojitá, právě když, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\equiv$ neboli

$$(\forall \mathcal{U}(f(x_0)))(\exists \mathcal{U}(x_0))\ (f(\mathcal{U}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0))).$$

Rozmyslete si, že i v $\mathbb{R}^d$ (a také v libovolném úplném vektorovém metrickém prostoru (M,ϱ)) platí následující tvrzení známá z teorie funkcí jedné reálné proměnné (viz ZS):

- o jednoznačnosti limity
- o aritmetice limit
  - ▶ $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ a $x_0\in\mathbb{R}^d$ je hromadný bod $D_f\cap D_g$
  - ▶ $\lim_{x\to x_0} f(x) = A\in\mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = B\in\mathbb{R}$

  $\Longrightarrow$
  - $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = A+B$
  - $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) = AB$
  - pokud $B\neq 0$, pak $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

  o dvou strážnících:
  - ▶ je-li navíc $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ taková, že $P(x_0)\subset D_h\cap D_f\cap D_g$

    a $f(x)\le h(x)\le g(x)$ pro $x\in P(x_0)$

    a $A=B$, pak $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$

- o limitě složeného zobrazení

  (A)
  - ▶ Jsou-li (M,ϱ_1), (N,ϱ_2) a (P,ϱ_2) tři metrické prostory

    a $f: M\to N$ a $g: N\to P$ a $x_0\in M$
  - ▶ Pokud $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in N$ a $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0\in P$

    a x_0 je hromadný bodem $D_{g\circ f}$
  - ▶ Pokud • buď $\exists\, P(x_0)$ tak, že $f(x)\neq y_0$ $\forall x\in P(x_0)$

    nebo g je spojitá v y_0

  Pak $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

- o spojitosti složeného zobrazení
  - ▶ Platí-li (A) a g je spojitá v $f(x_0)$ a f je spojitá v x_0,

    pak <u>$g\circ f$ je spojitá v x_0</u>, tj. $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$.

- o existenci okolí, kde je ji funkce omezená

- Heineho věta (obě varianty)

▶ (M,ρ_1), (N,ρ_2) metrické a $x_0\in M$ je hromadný bodem D_f
$f:(M,\rho_1)\to(N,\rho_2)$ a $y_0\in N$

Pak

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0 \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D_f\setminus\{x_0\}: \boxed{x_n\to x_0 \text{ v } (M,\rho_1)} \Rightarrow \boxed{f(x_n)\to y_0 \text{ v } (N,\rho_2)}$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff$ —||— existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Pro $d=1$ jsme měli větu o jednostranných limitách:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existuje a $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existuje a obě se rovnají.

! Následující příklad ukazuje, že i když limity po všech přímkách existují a rovnají se, tak existence $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ zaručena **není**!

Příklad ① Buď $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ definována vztahem $x_0=(x_{01},x_{02})$

$$f(x)=f(x_1,x_2)=\frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}$$

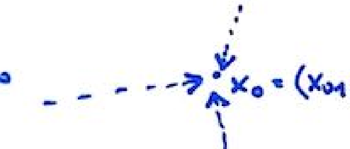
Pak $x_2=kx_1$, $k\in\mathbb{R}$, popisují přímky procházející počátkem

Platí
$$f(x_1,kx_1)=\frac{x_1^2\,kx_1}{x_1^4+k^2x_1^2}=\frac{kx_1}{k^2+x_1^2}\to 0 \quad\text{pro } x_1\to 0.$$

Tedy kandidát na $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ je 0. Přesto $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje,

neboť vezmeme-li $x_2=kx_1^2$ (tzn. jdeme do počátku po parabole)

pak
$$\lim_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=kx_1^2}=\lim_{x_1\to 0}\frac{kx_1^4}{x_1^4+k^2x_1^4}=\lim_{x_1\to 0}\frac{k}{k^2+x_1^4}=\frac{1}{k}$$
pro $k\neq 0$.



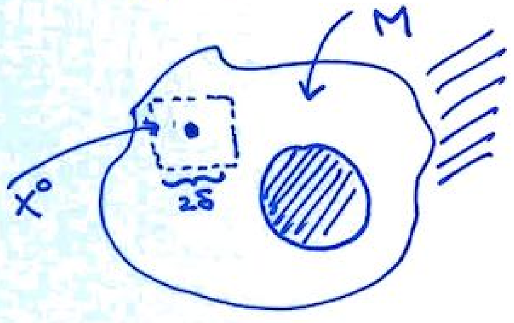
② Buď $f(x)=\dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$. Pak $\lim\limits_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=0}=0$

a $\lim\limits_{x_2\to 0} f(x)\Big|_{x_1=0}=0$, ale $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Řešení: $\lim\limits_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=x_1}=\dfrac{1}{2}$.

Definice ($\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f$) Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $x^0 \in M$. Pro $f: M \to \mathbb{R}$ definujme

$$\left.\begin{aligned} g_1(\xi) &= f(\xi, x_2^0, \dots, x_d^0) \\ g_2(\xi) &= f(x_1^0, \xi, \dots, x_d^0) \\ &\vdots \\ g_d(\xi) &= f(x_1^0, \dots, x_{d-1}^0, \xi) \end{aligned}\right\} \quad \text{Pak } g_i : (x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta) \to \mathbb{R}$$



neboli g_i jsou funkce jedné reálné proměnné ($i = 1, \dots, d$)

Předpokládejme, že $g_i'(x_i^0)$ existuje, tzn.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_d^0) - f(x_1^0, \dots, x_d^0)}{t} \quad \text{existuje,}$$

pak $g_i'(x_i^0)$ nazveme parciální derivace f podle proměnné x_i

a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$. Tedy máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{\xi \to x_i^0} \frac{g_i(\xi) - g_i(x_i^0)}{\xi - x_i^0} = \lim_{\xi \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \dots, \xi, \dots, x_d^0) - f(x^0)}{\xi - x_i^0}$$

$$h := \xi - x_i^0 \longrightarrow \; = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots) - f(x^0)}{h}$$

Jiná značení: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \partial_{x_i} f(x_0) = \partial_i f(x_0)$.

D
E
F
I
N
I
C
E

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0)\right)$ se nazývá gradient f v x_0 a značí se $\nabla f(x^0)$, nebo $\operatorname{Grad} f(x^0)$.

Je-li $f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, M otevřená, $x^0 \in M$, pak matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x^0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(x^0) \end{pmatrix}$$

m … řádků, d … sloupců

se nazývá JAKOBIÁN nebo JAKOBIho matice a značí se $Df(x^0)$ nebo $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(x^0)$.

<u>Definice</u> Je-li $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pak Jacobián je čtvercová matice a její stopa (součet prvků na diagonále) se nazývá

<u>divergence f v bodě x^0</u>, tj.

$$\operatorname{div} f(x^0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einstein } \Sigma \text{ konvence}}}{=} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) = \operatorname{tr} Df(x^0).$$

FYZICI: $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$

$\boxed{\text{Je-li } d=3}$, pak

$$\operatorname{curl} f(x^0) = \operatorname{rot} f(x^0) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

FYZICI: $\operatorname{curl} \vec{f} = \nabla \times \vec{f}$

<u>rotace f v x^0</u>

<u>Také</u>: pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$Df(x^0) = \frac{Df(x^0) + [Df(x^0)]^T}{2} + \frac{Df(x^0) - [Df(x^0)]^T}{2}$$

jen pro $d=3$ pro jednoduchost

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right] & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right] \\ & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right] \\ & & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}(x^0) + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right] & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right] \\ - & 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right] \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\text{symetrická část}}{\mathbb{E}f(x^0)} + \underset{\text{antisymetrická část}}{\mathbb{W}f(x^0)}$$

POROVNEJ SLOŽKY $\mathbb{W}f(x^0)$ SE SLOŽKAMI $\operatorname{curl} f(x^0)$

$\boxed{\text{Je-li } d=2}$ $\quad \operatorname{rot} f(x^0) = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \quad$ VEKTOR $\qquad \operatorname{curl} f(x^0) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad$ SKALÁR

$f = (f_1, f_2)$

<u>Definice</u> (SMĚROVÁ DERIVACE resp. DERIVACE f V BODĚ x_0 VE SMĚRU $\vec{v}$)

$$\partial_v f(x^0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}, \text{ pokud tato limita existuje.}$$

$\left[\ x^0\in M,\ M\subset\mathbb{R}^d \text{ otevřená},\ v=(v_1,\dots,v_d) \text{ tak, že } |\vec{v}|_2=1\ \right]$

Odsud a A definice $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ plyne: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)=\partial_{e_i}f(x^0)}$

kde $e_i:=(0,\dots,1,\dots,0)$
↑ i-té místo.

<u>Definice</u> (DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ) INDUKTIVNĚ.

např. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)=\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^0)$ kde $h(z)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(z)$ pro $z\in U_\delta(x^0)$.

$\boxed{\text{Příklady}}$ (1) Buď $f(x)=\sin(x_1x_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Pak $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=x_2\cos(x_1x_2)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)=x_1\cos(x_1x_2)$

Také $\nabla f(x)=(x_2\cos(x_1x_2),\ x_1\cos(x_1x_2))$

(2) Je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ lineární (nebo afinní) funkce, tj.

$f(x)=\sum_{i=1}^d a_ix_i$ (resp. $f(x)=\sum_{i=1}^d a_ix_i+b$)

pak $\nabla f(x)=(a_1,\dots,a_d)\quad \forall x\in\mathbb{R}^d$

(3) Podobně, je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ dáno předpisem

$$f(x)=\mathbb{A}x+b=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1d}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{md}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Pak
$D f(x)=\mathbb{A}$ pro $\forall x\in\mathbb{R}^d$.

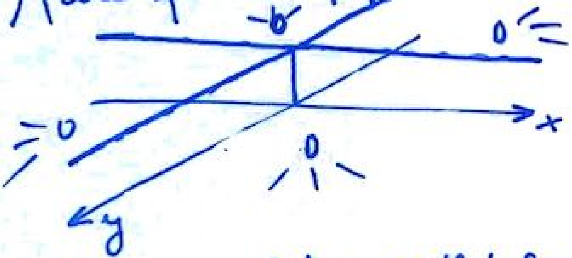
$\boxed{\text{Věta 8.12}}$ Existují-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)$ [a $g(x^0)\neq 0$ pro derivování podílu], pak existují $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x^0)$ a platí: $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial g}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

(Dk) Dle vět o derivování součtu, součinu, podílu pro funkce jedné reálné proměnné. ☒

WARNING! Z existence parciálních derivací v x^0 neplyne spojitost f v x_0, jak ukazuje následující jednoduchý příklad

Př. Buď
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (Ověřte!), ale f není spojitá v 0.



$\boxed{\text{Věta 8.13}}$ (O derivování složené funkce)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $g: M \to \mathbb{R}^m$ má v $x \in M$ parciální derivace. Buď $g(M) \subset N$ a $f: N \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v N. Pak fce
$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$ je v M definována a má parciální derivace.

Navíc $[(f \circ g): M \to \mathbb{R}]$

(Ř1)
$$\boxed{\underbrace{\nabla(f\circ g)(x)}_{d\text{-vektor}} = \underbrace{(\nabla f)(g(x))}_{m\text{-vektor}} \underbrace{Dg(x)}_{\text{Matice } m \times d}}$$

$$\nabla(f\circ g)(x) = \nabla_y f(y)\Big|_{y=g(x)} Dg(x)$$

neboli:
$$\left(\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_d}(x)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Je-li $f: \underset{\subset \mathbb{R}^m}{N} \to \mathbb{R}^s$ $(s>1, s \in \mathbb{N})$, pak $f\circ g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$ a platí

(Ř2)
$$\boxed{\underbrace{[D(f\circ g)](x)}_{s\times d\text{-matice}} = \underbrace{[Df](g(x))}_{s\times m \text{ matice}} \underbrace{[Dg](x)}_{m\times d\text{-matice}}}$$

Dk Buď $e^i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{di})$ jednotkový vektor v i-tém směru.
Chceme ukázat, že pro $i = 1, 2, \dots, d$

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i}$$

Avšak:

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$\overset{\substack{\text{Lagrange} \\ = \\ \text{VOSH}}}{} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x+\theta_1 he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_1(x+he^i) - g_1(x)}{h}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_2}(g_1(x), g_2(x+\theta_2 he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_2(x+he^i) - g_2(x)}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+\theta_m he^i)) \frac{g_m(x+he^i) - g_m(x)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x)$$

kde jsme využili:

(•) skutečnost, že $g_\ell(x+he^i) \to g_\ell(x)$ pro $h \to 0$, což plyne z existence $\frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(x)$.

(••) skutečnost, že $\frac{g_\ell(x+he^i) - g_\ell(x)}{h} \to \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(x)$ dle předpokladu věty

(•••) věta o limitě složeného zobrazení v případě, kdy vnější funkce je spojitá.

$\boxtimes$

Věta 8.14 (Spojité $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v x $\Rightarrow$ existenci $\partial_{\vec{v}} f(x)$)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f: M \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace (1. řádu) v M. Pak pro každé $x \in M$

$$\boxed{\partial_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v = (\nabla f(x), v)_{\mathbb{R}^d}}$$

Dk: Víme, že pro $v = (v_1, \dots, v_d)$ s $|\vec{v}|_E = 1$ platí

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} \overset{\text{Věta 8.13}}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i = (\nabla f(x), v)$$

Odsud a Cauchy-Schwartzovy nerovnosti plyne mimořádný důsledek.
Víme, že (dle (C-S) $\le$):

$$|\nabla f(x)| \le -|\nabla f(x)||v| \le (\nabla f(x), v) \le |\nabla f(x)|_E |v|_E \le |\nabla f(x)|_E$$

přičemž rovnost nastane jsou-li v a $\nabla f(x)$ kolineární, tzn. pro $v = \pm \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$. Tedy: Směrová derivace, která udává v daném bodě a ve zvoleném směru směrnici tečny v daném směru tj. jak se funkce v daném směru v blízkosti x chová (roste, klesá a jak rychle),

je největší ve směru $\vec{v} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

a je nejmenší —"— $\vec{v} = -\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

Tedy, gradient fce f v bodě x míří (tzn. je) směr největšího růstu/poklesu funkce f.

Zavedli jsme derivace vyšších řádů, a říkali jsme, že

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ znamená, že nejdříve derivuji podle proměnné x_j a poté podle proměnné x_i. Otázka zní,

zda dostanu stejný výsledek, když budu nejdříve derivovat podle x_i, a poté podle x_j, tj. ptáme se, zda platí:

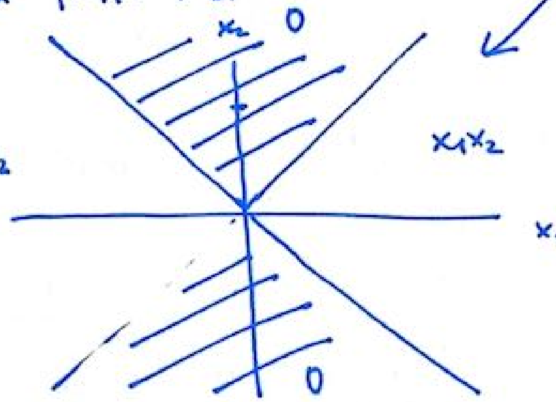
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Následující příklad ukazuje, že tomu tak <u>obecně</u> <u>není</u>.

<u>Příklad</u> Buď

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } |x_1| \le |x_2| \\ x_1 x_2 & \text{pokud } |x_1| > |x_2| \end{cases}$$

viz obrázek



Spočítejme nejdříve

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0)$

pro $x_2 \neq 0 \neq x_1$.

▷ $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1,x_2) - f(0,x_2)}{x_1} = \underline{\underline{0}}$$

neboť pro $x_1 = 0$ a $x_2 \neq 0$ je $f = 0$ nejen v těchto bodech, ale i v "x_1"-okolí.

TAKÉ
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1,0) - f(0,0)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{0}{x_1} = \underline{\underline{0}}$$

▷ $$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f(x_1,x_2) - f(x_1,0)}{x_2} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{x_1 x_2}{x_2} = \underline{\underline{x_1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f(0,x_2) - f(0,0)}{x_2} = 0$$

Z těchto výsledků počítáme dále

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}^{=0}}{x_2} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{0}{x_2} = 0$$

a $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,0) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}^{=0}}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1}{x_1} = 1$$

Tedy

$$1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = 0$$

$\boxed{\text{Věta 8.15}}$ (O záměnosti vyšších derivací) Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a nechť $f: M \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace v M. Pak pro každé $x \in M$, a pro každé $i,j \in \{1,2,\dots,d\}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)}$$

Dk [1] Označme
$$w(x) := \Delta_j^h f(x) := \frac{f(x+he^j) - f(x)}{h}$$

Pak
$$\Delta_i^h \Delta_j^h f(x) = \Delta_i^h w(x) = \frac{w(x+he^i) - w(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+he^i+he^j) - f(x+he^i) - f(x+he^j) + f(x)}{h^2}$$

Ten samý výraz však dostanu pokud provedeme
$$\Delta_j^h \Delta_i^h f(x)$$

Tedy na úrovni diferenčních podílů záměnost platí, neboť máme:
$$\boxed{\Delta_j^h \Delta_i^h f(x) = \Delta_i^h \Delta_j^h f(x)}.$$

[2] Zbývá ukázat, že
$$(*) \quad \underbrace{\Delta_i^h \Delta_j^h f(x) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)}_{} \quad \text{pro } h \to 0. \quad \forall x \in M \; \forall i,j \in \{1,\dots,d\}.$$

Avšak:
$$\Delta_j^h f(x+he^i) = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+te^j+he^i)\,dt \quad = \frac{f(x+he^j+he^i) - f(x+he^i)}{h}$$

a
$$\Delta_j^h f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+te^j)\,dt \quad = \frac{f(x+he^j) - f(x)}{h}$$

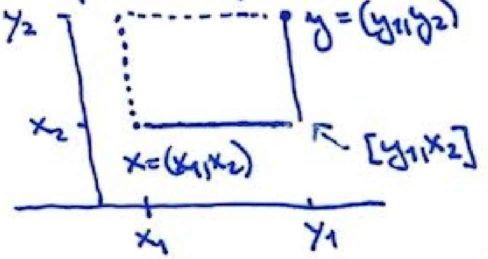
a tedy
$$\Delta_i^h \Delta_j^h f(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underbrace{x+te^j}_{z}+he^i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underbrace{x+te^j}_{z})\Big]\,dt$$
$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h \Big(\int_0^h \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+te^j+se^i)\Big]\,ds\,dt$$
$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h \Big(\int_0^h \underbrace{\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+te^j+se^i) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\Big]}_{\in(-\varepsilon,\varepsilon) \text{ pro } h \text{ dostatečně malé}}\,ds\,dt + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)}$$

$\boxed{\text{Tedy}}$
$$\left|\Delta_i^h \Delta_j^h f(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \varepsilon \quad \text{pro } h \text{ dostatečně malé}$$
(ε libovolné) ▨

8.5 Totální diferenciál a Taylorův rozvoj pro funkce více proměnných.

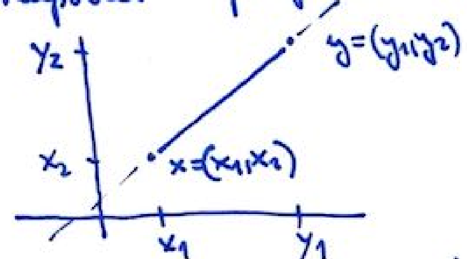
Často potřebujeme vyjádřit rozdíl $f(y) - f(x)$ pomocí derivace (jak jsme viděli například v důkazu předchozí věty). K tomu lze s úspěchem využít Langrangeovu větu o střední hodnotě. U fcí více proměnných máme dvě varianty jak postupovat:

(i) postupovat "po stěnách" (jako v předchozí větě).



NEVÝHODA: dává d-mnoho bodů, přesto užitečný postup v mnoha situacích

(ii) postupovat "po přímce spojující x a y"



O tom je následující věta.

Věta 8.16 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) Nechť:

- $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená
- f je spojitá v M a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou spojité v M pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$.
- pro $x, y \in M$ je úsečka $\{z;\ z = tx + (1-t)y,\ t \in \langle 0,1 \rangle\} \subset M$

Pak existuje $\theta \in (0,1)$ tak, že

$$\text{(L)} \qquad \boxed{f(y) = f(x) + \nabla f(x + \theta(y-x)) \cdot (y-x)}$$

zobecnění $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$ kde $\xi \in (x,y)$ v $d=1$. I zde lze psát: $\xi = \theta x + (1-\theta) y$

Dk) Definujme

$$g(t) := f(x + t(y-x)), \quad t \in \langle 0,1 \rangle.$$

Pak • $g \in C(\langle 0,1 \rangle)$ a • $g'(t)$ existuje pro $\forall t \in (0,1)$

Navíc $g(1) - g(0) = f(y) - f(x)$.

Dle LVOSH (ZS 19/20):

$$\underline{f(y) - f(x)} = g(1) - g(0) = g'(\theta) \overset{V\,8.13}{=} \underline{\nabla f(x + \theta(y-x)) \cdot (y-x)},$$

což jsme chtěli ukázat ☺.

Než si ukážeme aplikaci předchozí věty a její rozšíření, zavedeme následující pojem "souvislé" množiny.

<u>Definice</u> Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^d$ je <u>souvislá</u> (angl. <u>"path-connected"</u>)

jestliže pro každé $x, y \in M$

existuje konečný počet bodů x^i, $i = 1, \dots, N$, tak, že

$x^1 = x$, $x^N = y$ a všechny $\{t x^i + (1-t) x^{i+1};\ t \in \langle 0,1 \rangle\} \subset M$ pro $i = 1, \dots, N-1$

$\boxed{\text{Důsledek Věty 8.16}}$ Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ <u>otevřená</u> a <u>souvislá</u> ("path-connected").

Nechť $\nabla f(x) = 0$ pro $\forall x \in M$

Pak $f \equiv C$ $(C \in \mathbb{R})$ (f je konstantní)

Dk plyne z předchozí Věty 8.16 a ze skutečnosti, že M je otevřená a libovolné $x \in M$ lze najít "cestu" (lomenou čáru) spojující x s pevným bodem $y \in M$. Tak

$$f(x) = f(y) + \underbrace{\nabla f(\xi)}_{=0} \cdot (y - x) = f(y) \quad \text{pro všechna } x \in M$$

$\blacksquare$

V následující větě budou mít významnou roli funkce spojité, jejichž první derivace je také spojitá. Zavedeme označení, které na konec přednášky rozšíříme.

$\boxed{\text{Definice}}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Pak $C^0(M) \equiv C(M) = \{f : M \to \mathbb{R};\ f \text{ spojité v } M\}$,

a $C^1(M) := \{f : M \to \mathbb{R};\ f \in C(M), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(M)\ \ i = 1, \dots, d\}$.

Také píšeme

$$C(M)^m := \{f : M \to \mathbb{R}^m;\ f = (f_1, \dots, f_m) \text{ a } f_i \in C(M) \text{ pro } i = 1, \dots, m\}$$
$$= \underbrace{C(M) \times \dots \times C(M)}_{m\text{-krát}}.$$

a podobně

$$C^1(M)^m := \{f : M \to \mathbb{R}^m;\ f_i \in C^1(M) \text{ pro } i = 1, \dots, m\}.$$

Poznámka:

$$C^1(M) = \{f : M \to \mathbb{R};\ f \in C(M) \wedge \nabla f \in C(M)^d\}.$$

Nyní začneme zkoumat podmínky, které zaručují (tedy jsou postačující) k tomu, aby ① existovaly parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

② f byla spojitá v uvažovaném bodě

③ existovaly směrové derivace

Důležitou roli zde bude hrát pojem totálního diferenciálu, Jeho definice (i existence) je motivována následujícím tvrzením.

$\boxed{\text{Věta 8.17}}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $x, x^0 \in M$ takové, že úsečka spojující x a x^0 leží v M. Buď $f \in C^1(M)$ resp. $C^1(M)^m$. Pak

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(x^0) - \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\infty,\mathbb{R}^d}} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } x \to x^0$$

neboli

$\boxed{m=1}$
$$|f(x) - f(x^0) - \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)| = o(|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{pro } x \to x_0$$

resp.

$\boxed{m>1}$
$$|f(x) - f(x^0) - Df(x^0)(x-x^0)|_{\mathbb{R}^m} = o(|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{---"---}$$

Dk jen pro $\boxed{m=1}$. Užijeme-li výsledek věty 8.16, tak máme

$$w := \frac{f(x) - f(x^0) - \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}} = \frac{(\nabla f(x^0+\theta(x-x^0)) - \nabla f(x^0))\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}}$$

Odtud

$$|w| \overset{C-S}{\leq} |\nabla f(x^0+\theta(x-x^0)) - \nabla f(x^0)|_{\mathbb{R}^d} |x-x_0|_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}}$$

$$= |\nabla f(x^0+\theta(x-x^0)) - \nabla f(x^0)|_{\mathbb{R}^d} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } x \to x_0$$

díky předpokladu $f \in C^1(M)$ ▨

Pozorování: Zobrazení: $L : z \mapsto \nabla f(x_0)\cdot z \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^d$, je lineární

Poznámka: Vidíme, že by stačilo předpokládat, že f je $C^1(O)$, kde O je otevřená množina obsahující úsečku spojující x a x_0.

Definice (totálního diferenciálu) Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ je totální diferenciál funkce $f : M \to \mathbb{R}^m$ v $x^0 \in M$ pokud

$$(TD) \qquad |f(x) - f(x^0) - L(x-x^0)|_{\mathbb{R}^m} = o(|x-x^0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{pro } x \to x_0$$

Věta 8.17 říká: $f \in C^1(M) \Rightarrow$ ① totální diferenciál L k fci f v bodě $x^0 \in M$ existuje

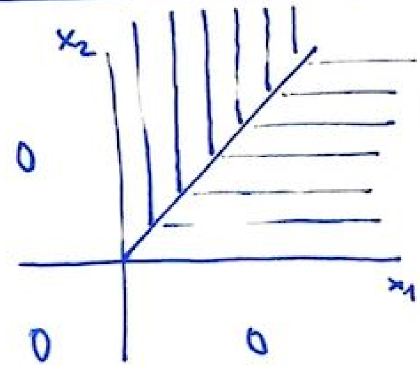
a ② $L(x-x^0) = \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)$ $\quad m=1$

$\qquad = Df(x^0)(x-x^0)$ $\quad m>1$

WARNING! K existenci totálního diferenciálu NESTAČÍ

$\boxed{\text{spojitost } f \text{ v } x^0}$ a $\boxed{\text{existence } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \quad i=1,\dots,d}$

jak ukazuje následující příklad.



$\boxed{\text{Příklad}}$ Buď $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definována vztahem

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 & x_1>0,\ x_2>0,\ x_2 \geq x_1 \\ x_2 & x_1>0,\ x_2>0,\ x_1 \geq x_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vidíme, že $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0)=0$

a také $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$.

Tedy $\boxed{Lx = (0,0)\cdot x}$ je kandidát na totální diferenciál fce f v bodě $(0,0)$.

Avšak:

$$z := \frac{f(x_1,x_2) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{Lx}^{=0}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{f(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \overset{\text{pro } x_2=x_1>0}{=} \frac{x_1}{\sqrt{2}\,x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Tedy $\lim_{x\to 0} z$ neexistuje a tak <u>f nemá v (0,0) totální diferenciál.</u> ◻

Často: (TD) ekvivalentně zapíšeme $\displaystyle\lim_{h\in\mathbb{R}^d,\, h\to 0} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)-L(x^0)h}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}} = 0$

Obvykle: $\underline{L(x^0)h} = df(x^0)(h) = \underline{df(x^0)h}$

Věta 8.18 NUTNÉ PODMÍNKY EXISTENCE DIFERENCIÁLU

Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ má v x^0 totální diferenciál. Pak

(1) Existují $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$ pro $\forall i \in \{1,\dots,d\}$ a $\forall j \in \{1,\dots,m\}$

a platí:
$$[df(x^0)]_{ji} = L_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$$

neboli
$$df(x^0)h = Df(x^0)h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^d$$

(2) Existují směrové derivace $\partial_v f(x^0)$ pro $\forall v = (v_1,\dots,v_d)$

a platí:
$$\boxed{\partial_v f(x^0) = df(x^0)v = Df(x^0)v}$$

(3) f je v bodě x^0 spojitá.

! (SPOJITOST NEPLYNE Z EXISTENCE $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$)

Dk $\boxed{\text{Ad (2)}}$ Máme

$$\partial_v f(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)-df(x^0)(tv)}{|t|\underbrace{\|v\|_{\mathbb{R}^d}}_{=1}}\frac{|t|}{t}}_{\to 0 \text{ dle definice diferenciálu}}$$

$$+ \lim_{t\to 0}\frac{df(x^0)(tv)}{t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearita diferenciálu}}}{=} df(x^0)v$$

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ plyne z dokázaného volbou $v = e^j$, $j = 1,\dots,d$.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$
$$f(x^0+h) - f(x^0) = \underbrace{\frac{f(x^0+h)-f(x^0)-df(x^0)h}{|h|_{\mathbb{R}^d}}}_{\xrightarrow{h\to 0}\, 0 \text{ z definice diferenciálu.}} |h|_{\mathbb{R}^d} + \underbrace{df(x^0)h}_{\xrightarrow{h\to 0}\, 0 \text{ z linearity}}$$

Tedy $\lim_{h\to 0}\left(f(x^0+h)-f(x^0)\right) = 0 \iff \lim_{h\to 0} f(x^0+h) = f(x^0)$. ▨

Shrňme si situaci graficky

$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$

[A] Existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ v $U(x^0)$ $\quad i=1,2,\dots,d$
a jejich spojitost v x^0

$\Downarrow$ Věta 8.17

[B1] Existence $df(x^0)$
tj. existence totálního diferenciálu

a také Věta 8.18 část (1)

[B2] $df(x^0)h = \begin{cases} Df(x^0)\cdot h & m=1 \\ Df(x^0)h & m>1 \end{cases}$

$\Downarrow$ Věta 8.18 $\qquad \Downarrow$ Věta 8.18 $\qquad \Downarrow$ Věta 8.18

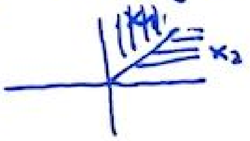
[C1] Existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$
a platí $\boxed{\text{B2}}$ ...

[C2] Existence $\partial_v f(x^0)$
pro $\forall v\in\mathbb{R}^d$ $|v|=1$:
$\partial_v f(x^0) = df(x^0)v \overset{(B2)}{=} \dots$

[C3] f je v x^0 spojitá

Pozorování, příklady

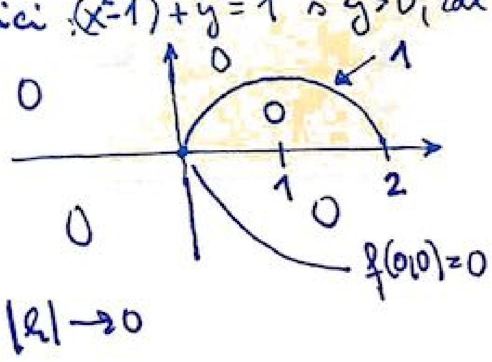
(1) Víme (viz Příklad před Větou 8.18), že [C1] + [C3] $\not\Longrightarrow$ [B1]



ANI [C1] + [C2] + [C3] NEIMPLIKUJE [B1]

(2) ...

Příklad $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ nulová až na polokružnici $(x-1)^2+y^2=1$ a $y>0$, kde $f=1$



Pak $\partial_v f(0,0)=0$ $\forall v\in\mathbb{R}^2$ $|v|_E=1$,

ale $df(0,0)$ neexistuje, neboť by muselo

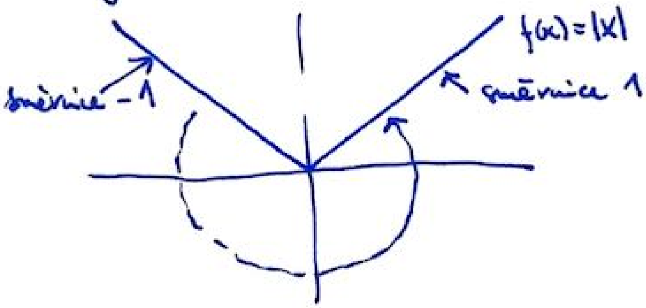
$g(h_1,h_2):=\dfrac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ konvergovat k 0 pro $|h|\to 0$

ale pro $(h_1-1)^2+h_2^2=1$, $h_2>0$, $g(h_1,h_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2h_1}} \to +\infty$ pro $h_1\to 0$.

Tedy [C2] (a ani [C1] a [C2] neimplikují [B1])

Zkuste si vymyslet příklad (modifikaci tohoto příkladu), který by ukazoval, že [C1] + [C2] + [C3] $\not\Longrightarrow$ [B1].

③ Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x)=|x|$ nemá v 0 diferenciál, ačkoliv f je spojitá. Kandidátem by mohlo být jakékoliv $a\in\langle -1,1\rangle$. Ale:



$$\frac{|h|-0-ah}{|h|} = \begin{cases} 1-a\neq 0 \quad \text{vyjma } a=-1 & h>0 \\ 1+a\neq 0 \quad \text{vyjma } a=-1 & h<0 \end{cases}$$

Tedy: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-0-ah}{|h|}$ neexistuje

a f v bodě $x=0$ diferenciál nemá.

v $\mathbb{R}$ pojmy $f'(x_0)$ a $df(x_0)$ splývají: $df(x_0)h = f'(x_0)h$ pokud objekt na levé nebo pravé straně existuje.

④ <u>Geometrická interpretace diferenciálu</u>

Mějme $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ takovou, že f má v $x^0=(x^0_1,\dots,x^0_d)$ <u>diferenciál</u>. Pak z definice diferenciálu a nutné podmínky (1) Věty 8.18, (která říká, jaký má diferenciál nutně tvar,) víme, že afinní zobrazení $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ definované předpisem

(*) $$A(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)$$

aproximuje funkci f v bodě x^0.

V prostoru $\mathbb{R}^{d+1}$ toto zobrazení vytváří <u>tečnou nadrovinu</u> k funkci f v x^0 a (*) lze charakterizovat jako množinu všech bodů $y=(x_1,\dots,x_d,x_{d+1})$ takových, že

(**) $$\nabla f(x^0)\cdot(x-x^0) - (x_{d+1}-f(x^0)) = 0$$

neboli, s $y^0 := (x^0, f(x^0))$ jako množinu všech bodů $y=(x_1,\dots,x_{d+1})$ takových, že

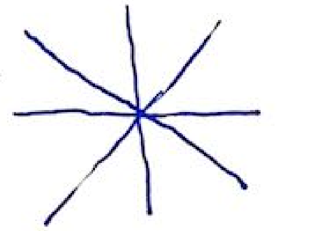
(***) $$\underbrace{(y-y^0)}_{(d+1)\text{-vektor}}\cdot\underbrace{(\overbrace{\nabla f(x^0)}^{d\text{-vektor}}, -1)}_{(d+1)\text{-vektor}} = 0$$

Vektor $\vec{n} = (\nabla f(x^0), -1)$ se nazývá <u>normála</u> k tečné nadrovině fce f v x^0.

- Máme-li najít tečnou nadrovinu k f v x^0, tak: sestrojím $\vec{n}$ dle $\nabla f(x^0)$ a užiji (***).

Uvedeme si ještě dva příklady, které ukazují, jak je možné studovat limitu $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ v okolí nějakého bodu (x_1^0,x_2^0) pomocí polárních souřadnic a jejich zobecnění.

$\boxed{\text{Příklad 1}}$ Nechť $f(x,y)=\frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$. Pak $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, y\neq\pm x\}$.



Máme rozhodnout, zda existuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$\boxed{\text{Řešení (i)}}$ (bez použití polárních souřadnic)

Volme dva speciální směry: $y=0$ a $y(x)=x+x^5$.

Pro $y=0$: $f(x,0)=\frac{x^6}{x^2}\to 0$ pro $x\to 0$

Pro $y=y(x)=x+x^5$:

$$f(x,x+x^5)=\frac{x^6+(x+x^5)^6}{-2x^6-x^{10}}=\frac{1+(1+x^4)^6}{-2-x^4}\to -1 \text{ pro } x\to 0.$$

Našli jsme dva směry (dvě trajektorie), po kterých dostáváme různé limitní hodnoty pro $x\to 0$. Tedy limita neexistuje.

$\boxed{\text{Řešení (ii)}}$ Pro $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ dostáváme

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=r^4\frac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos2\varphi}\to 0 \text{ pro } \varphi\in\langle 0,2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

tedy po všech paprscích je limita rovna 0 v definičním oboru

φ je však obecně závislé na r. Uvažme

$\boxed{\varphi(r)=\frac{\pi}{4}+r^k}$ ($k\in\mathbb{N}$ libovolné)

Pak

$\cos\varphi(r)\to\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$ pro $r\to 0$ a $\sin\varphi(r)\to\frac{\sqrt2}{2}$ pro $r\to 0$

ale

$$\cos 2\varphi(r)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2r^k\right)=-\sin 2r^k \underset{\text{Taylorův rozvoj}}{=} -2r^k+o(r^{2k})$$

Tak

$$f(r\cos\varphi(r), r\sin\varphi(r))\approx\frac{2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^6 r^4}{-2r^k+o(r^{2k})}\to-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^6 \text{ pro } r\to 0$$

zvolíme-li $\underline{k=4}$

Tedy, opět máme různé trajektorie dávající různé výsledky pro $r\to 0$.

$\boxed{\text{Příklad 2}}$ $\boxed{\text{Určete } \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|}}$. Limitu lze určit bez použití polárních souřadnic. Ukážeme si správný postup, když se rozhodneme polární souřadnice použít. Položíme-li $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, pak

$$\frac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|}=\frac{r\left(\cos2\varphi+\frac12\sin2\varphi\right)}{|\sin\varphi|+|\cos\varphi|}$$

I když $\varphi = \varphi(r)$, tak vždy

$$\cdot \left|\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right| \leq \frac{3}{2}$$

a

$$\cdot \ |\sin\varphi| + |\cos\varphi| \geq 1.$$

Tedy

$$0 \leq \left|\frac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|}\right| \leq \frac{3}{2}r \to 0 \text{ pro } r \to 0$$

Tedy jsme dokázali, že $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+xy}{|x|+|y|} = 0$ ∎

$\boxed{\text{Věta 8.20}}$ (Taylorův vzorec)

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená, $x \in M$, $h \in \mathbb{R}^d$ tak, že $\{x+th;\ t\in\langle 0,1\rangle\} \subset M$.
Buď $f: M \to \mathbb{R}$ taková, že všechny parciální derivace až do řádu $N+1$ jsou spojité (zavedeme značení $f \in C^{N+1}(M)$).

Pak existuje $\theta \in (0,1)$ tak, že

$$(\text{Taylor}) \left\{ \begin{aligned} f(x+h) = f(x) &+ \nabla f(x)\cdot h + \frac{1}{2} h \cdot \nabla^{(2)} f(x) h \\ &+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1} \frac{\partial^{(3)} f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{N!}\sum_{i_1,\dots,i_N=1}^{d} \frac{\partial^{(N)} f(x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_N}} h_{i_1}\cdots h_{i_N} \\ &+ \frac{1}{(N+1)!}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{N+1}=1}^{d} \frac{\partial^{(N+1)} f(x+\theta h)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{N+1}}} h_{i_1}\cdots h_{i_{N+1}} \end{aligned}\right.$$

neboli (následuje "Definice" diferenciálů vyšších řádů)

$$f(x+h) = f(x) + \underset{\text{lineární zobrazení}}{df(x)}\, h + \frac{1}{2}\underset{\substack{\text{bilineární zobr.}\\ \text{(kvadratická forma)}}}{d^{(2)} f(x)}(h,h) + \frac{1}{3!}\underset{\text{trilineární}}{d^{(3)} f(x)}(h,h,h)$$

$$+ \dots + \frac{1}{N!} d^{(N)} f(x)\underbrace{(h,\dots,h)}_{N\text{-krát}} + \frac{1}{(N+1)!} d^{(N+1)} f(x+\theta h)\underbrace{(h,\dots,h)}_{(N+1)\text{-krát}}.$$

(Dk) Podobně jako v důkazu Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz Věta 8.16) položíme

$$g(t) := f(x+th) \qquad \left(x \in M \subset \mathbb{R}^d,\ h \in \mathbb{R}^d,\ x+th \in M \ \forall t \in \langle 0,1\rangle\right)$$

Pak

$$f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} g^{(N+1)}(\theta)$$

Taylorův polynom N-tého stupně pro funkci g v bodě 0 s Lagrangeovým tvarem zbytku.

kde $\theta \in (0,1)$

$$= (\text{Taylor}),$$

neboť

$$g^{(k)}(t) = \frac{\partial^{(k)} f(x+th)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k}. \qquad \blacksquare$$

Značení. Buď $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ kde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ - multiindex.

Definujeme $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ ... řád multiindexu α.

Příklad
- $|\alpha| = 0$ jen pro $(0,0,\dots,0)$ — 1
- $|\alpha| = 1$ pro $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots), \dots, (0,0,\dots,1)$ — d
- $|\alpha| = 2$ — $\binom{d}{2}$
- $\vdots$

• Buď $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex a $f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, M otevřená.

Pak

$$\boxed{D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}}$$

•
$$\boxed{C^k(M) := \left\{ f: M \to \mathbb{R};\ D^\alpha f \in C(M) \text{ pro } \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d),\ 0 \le |\alpha| \le k \right\}}$$

Příklad $M \subset \mathbb{R}^2$. $|\alpha| = 2$ $(2,0), (1,1), (0,2)$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, \quad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial y}, \quad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial y^2}.$$