Jan Šabata

1.

Buď $C \subset \langle 0,1 \rangle$ Cantorovo diskontinuum. Označme C^* množinu definovanou na každém intervalu $\langle k, k+1 \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ předpisem $x \in C^* \Leftrightarrow x - k \in C$.

Ukažte, že

- $C^* \subset \mathbb{R}$ je v $\mathbb{R}$ množina míry nula
- množina $C \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$.
- množina $C^* \times \mathbb{R}$ je množina míry nula v $\mathbb{R}^2$.

1.1

Cantorovo diskontinuum smím zapsat jako $C := \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$, kde I_j je množina vzniklá po j iteracích, tedy platí pro $\forall j$: $C \subset I_j$. Dále označím průnik množiny C^* a intervalu $\langle -n, n \rangle$ jako ${C^*}_n \coloneqq C^* \cap \langle -n, n \rangle$, pro objem průniku těchto množin platí $\forall j$: $V({C^*}_n) = V(C) \cdot 2n \subseteq V(I_j) \cdot 2n$ Všechny intervaly I_j mají délku $\frac{1}{3^j}$,dále víme, že počet těchto intervalů je 2^j, což dává objem $V(I_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^j$. Chceme-li dokázat, že množina ${C^*}_n$ je množina míry nula, pak ovšem musí platit:

$$\forall n \forall \varepsilon > 0: V({C^*}_n) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists j: 2n\left(\frac{2}{3}\right)^j < \varepsilon$$

Nechť $\theta \coloneqq \frac{\varepsilon}{2n}$, pak $\varepsilon = 2n\theta$, takže $\cancel{2n}\left(\frac{2}{3}\right)^j < \cancel{2n}\theta$, v limitě $\lim\limits_{j\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j = 0$, nerovnost tedy je splněna jak pro θ tak ε. Dokonce ani nezáleží na volbě n, z toho plyne, že ${C^*}_n$ je množina míry nula. C^* je ale definována jako spočetné sjednocení ${C^*}_n$ (množin míry nula), z čehož vyplývá, že i C^* je množina míry nula.

1.2

Budu postupovat analogicky. Nyní protože chci dokázat tvrzení v $\mathbb{R}^2$, tak budu hledat takovou množinu, která má průnik $C \times \mathbb{R}$ s $\langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle$. Nechť tedy existuje

$C_{n^2} \coloneqq C \times \mathbb{R} \cap \langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle$. Pamatujme na fakt, že $C \subset \langle 0,1 \rangle$, takže to mohu přepsat na

$C_{n^2} \coloneqq C \times \mathbb{R} \cap \langle 0,1 \rangle \times \langle -n, n \rangle$, to znamená, že i tento objekt bude mít stejný objem jako v minulém případě $\forall j$: $V(C_{n^2}) = V(C) \cdot 2n$. Odtud je již postup totožný s 1.1.

1.3

Nyní vlastně spojím obě předchozí úlohy do jedné. Nejprve definuji

${C^*}_{n^2} \coloneqq C^* \times \mathbb{R} \cap \langle -n, n \rangle \times \langle -n, n \rangle$, pro zjištění objemu tohoto útvaru využiji faktu, že vím, jaký objem má ${C^*}_n \coloneqq C^* \cap \langle -n, n \rangle$. $V({C^*}_n) = V(C) \cdot 2n$, dále objem $\mathbb{R} \cap \langle -n, n \rangle$ je triviálně roven 2n. To nám dává objem $V({C^*}_{n^2}) = V(C) \cdot 2n \cdot 2n = 4n^2 \cdot V(C)$. Nyní postupuji analogicky 1.1

$$\forall n \forall \varepsilon > 0: V({C^*}_{n^2}) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists j: 4n^2\left(\frac{2}{3}\right)^j < \varepsilon$$

Jan Šabata

Nechť existuje $\omega \coloneqq \frac{\varepsilon}{4n^2}$, poté $\varepsilon = \omega 4n^2$, takže $\cancel{4n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^j < \omega\cancel{4n^2}$. Nyní však nemohu jen tak použít argument limity, protože jsem v $\mathbb{R}^2$. Zlogaritmuju a dostanu něco jako $j\ln\frac{2}{3} < \ln\omega \ \rightarrow j > \frac{\ln\omega}{\ln\frac{2}{3}}$. I v tomto případě jsem však schopen nalézt takové ω (takže i ε), abych daný vztah splnil. Takže ${C^*}_{n^2}$ je množina míry nula. Nyní se budu opírat o stejnou argumentaci jako v případě 1.1 neboli že množina $C^* \times \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {C^*}_{n^2}$ je dána sjednocením spočetného počtu množin míry nula ergo je množinou míry nula.