

8.6 Věty o spojitém zobrazení na kompaktu, extrémny funkce více proměnných

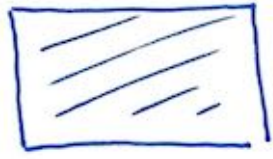
Připomeňme si vlastnosti spojitých f a' jedné reálné proměnné uvažovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$:

- $f \in C(\langle a, b \rangle) \Rightarrow$
- f je na $\langle a, b \rangle$ omezená
 - f nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$
 - f nabývá v $\langle a, b \rangle$ maxima/minima
 - f je stejnoměrně spojitá (Cantorova věta)

Nyní si uvedeme podobné věty pro funkce více proměnných. Uvažujme interval bude nahrazen obecnější množinou - množinou kompaktní



vs.



v \mathbb{R}^d : K je kompaktní $\Leftrightarrow K$ uzavřená a omezená

Věta 8.21 Buď $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak $L := f[K]$ (obraz množiny K při spojitém zobrazení) je kompaktní (v \mathbb{R} resp. v \mathbb{R}^n)

Speciálně: $f|_K$ je omezená (f je omezená na K)

(Dě) Vyšetřeme následující charakteristiky kompaktnosti (viz Věta 8.9) (1) \Leftrightarrow (2)

$$f[K] \text{ je kompaktní } \Leftrightarrow \left(\forall \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \subset f[K] \right) \left(\exists \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \right)$$

$$\text{a } (\exists y \in f[K]) \quad y^k \rightarrow y \quad v \mathbb{R} \quad (k \rightarrow \infty)$$

Vezměme tedy $\{y^k\}_{k=1}^{\infty} \subset f[K]$ libovolně. Pak dle definice obrazu množiny existují $x^k \in K$ tak, ů $f(x^k) = y^k$

Ale K je kompaktní, existuje tedy $x \in K$ a $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, ů $x^k \rightarrow x \quad v \mathbb{R}^d \quad k \rightarrow \infty$

Dle Heineho věty $f(x^k) \rightarrow f(x) \quad v \mathbb{R} \quad k \rightarrow \infty$
 Ale $f(x^k) = y^k$ a $f(x)$ je hledané $y \in f[K]$.



POZOROVÁNÍ Předchozí i následující tvrzení (Věta 8.22) platí i

v situacích

(i) $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní

(ii) $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ kde (X, ρ_X) a (Y, ρ_Y) jsou úplné metrické prostory.

Věta 8.22 Budiž $f \in C(K)^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, $m \in \mathbb{N}$.

Paž f je stejnoměrně spojitá v K .

(Dě) Ujdeme k definici stejnoměrně spojitosti f v K :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in K) \left(\|x - y\|_{\mathbb{R}^d} < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon \right)$$

a tvrzení dovozíme sporem. Předpokládáme tedy

$$\boxed{f \in C(K) \wedge f \text{ není stejnoměrně spojitá na } K, K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompaktní}}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \{x^n\}, \{y^n\} \subset K$$

$$(\ast) \quad \|x^n - y^n\|_{\mathbb{R}^d} < \frac{1}{n} \wedge \|f(x^n) - f(y^n)\|_{\mathbb{R}^m} \geq \varepsilon_0$$

Protože K je kompaktní,

$$\text{existují: } \{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad \{y^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{y^n\}_{n=1}^{\infty}$$

a $x, y \in K$:

$$x^{n_k} \rightarrow x \quad \text{a} \quad y^{n_k} \rightarrow y \quad \text{v } \mathbb{R}^d \quad (k \rightarrow \infty)$$

Aužar dle první části (\ast) :

$$\boxed{x = y}$$

a dle spojitosti

$$f(x^{n_k}) \rightarrow f(x) = f(y) \leftarrow f(y^{n_k})$$

neboli

$$f(x^{n_k}) - f(y^{n_k}) \rightarrow 0 \quad \text{což dává spor s druhou částí } (\ast).$$



Následující věta je první větou zaručující existenci minimálního (maximálního), tj. bodu, ve kterém funkce nabývá svého minima (resp. maxima). Důležitá věta je "blízký" důkazem zavedení věty moderní teorie variacího počtu.

Věta 8.23 Bndí $f \in C(K)$, $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak f nabývá na K minima a maxima.

(Dk) • Bndí $m := \inf_{x \in K} f(x)$. Z věty 8.21 plyne, že

f je omezené a tedy $m > -\infty$.

Z definice m plyne existence $\{x^m\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ tak, že

$$(1) \quad f(x^m) \rightarrow m$$

• Protože K je kompaktní: existuje $x \in K$ a $\{x^{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^m\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $x^{m_k} \rightarrow x$ v \mathbb{R}^d ($k \rightarrow \infty$)

• Protože $f \in C(K)$ $f(x^{m_k}) \rightarrow f(x)$

a porovnáním s (1): $\underline{f(x) = m}$

Tedy infimum se na K nabývá.

Podobně postupujeme v případě $M := \sup_{x \in K} f(x)$. ▣

Násle uvážíme $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Pojem globální (lokální) minimum/maximum (extrém) je definován stejně jako pro f

zdejší reálné proměnné. Uvedeme si nyní nutnou a postačující podmínku existence (lokálního) minima (maxima).

Věta 8.24 (Nutná podmínka existence extrému) Necht

- $M \subset \mathbb{R}^d$ je omezená;
- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ má v $x_0 \in M$ lokální extrém;
- f má v $U_\delta(x_0) \subset M$ první parciální derivace;

Pak

$$\underline{\nabla f(x_0) = 0}$$

(d podmínka)

(D₂) Pro $i=1,2,\dots,d$ uvažuj fce

$$g^i(t) : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \text{ definované}$$

$$g^i(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}^i) = f(x_0 + te^i)$$

Paž g^i mají v 0 lokální extrém

a dle Věty 4.1 (ZS): $(g^i)'(0) = 0$

definice parciální derivace

Avšak

$$(g^i)'(t) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te^i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \text{ a tvrzení plyne.} \quad \square$$

Věta 8.25 (Postačující podmínka k existenci minima/maxima)

Nechť

(i) • $f \in C^2(U_0(x_0))$

(ii) • $\nabla f(x_0) = 0$

(iii) • $d^{(2)}f(x_0)(h, h)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{pozitivně definitivní,} \\ \text{negativně definitivní,} \\ \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{array} \right.$

$\text{tr. } \left\{ \begin{array}{l} d^{(2)}f(x_0)(h, h) > 0 \quad \forall h \neq 0 \\ \exists \alpha > 0 \quad d^{(2)}f(x_0)(h, h) \geq \alpha |h|^2 \end{array} \right.$

Paž f má v bodě x_0 lokální

(D₂) Dle Taylorova rozvoje (s využitím (iii)):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)}f(x_0 + \theta h)(h, h) \quad x = x_0 + h$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)}f(x_0)(h, h) + \frac{1}{2} \left[d^{(2)}f(x_0 + \theta h) - d^{(2)}f(x_0) \right](h, h)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right] h_i h_j$$

Ze spojitosti druhé derivace:

$$\left| \dots \right| \leq \frac{\alpha}{2} |h|^2$$

pro $|h|$ dostatečně malí

Tedy

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{\alpha |h|^2}_{\geq 0} - \frac{\alpha}{2} |h|^2 \geq f(x_0) \quad \forall x \in U_0(x_0)$$

což jsme chtěli ověřit. !!

□

Druhý diferenciál $d^2 f(x)(h, h)$ je kvadratická forma.
 Řekneme, že kvadratická forma $Q(h, h) := h \cdot A h = \sum_{i,j=1}^d A_{ij} h_i h_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je

- pozitivně definitivní $\stackrel{\text{df.}}{=} Q(h, h) > 0 \quad \forall h \neq 0$
 - negativně definitivní $\stackrel{\text{df.}}{=} Q(h, h) < 0 \quad \forall h \neq 0$
 - indefinitivní $\stackrel{\text{df.}}{=} \begin{cases} \exists h^1 \in \mathbb{R}^d & Q(h^1, h^1) > 0 \\ \exists h^2 \in \mathbb{R}^d & Q(h^2, h^2) < 0 \end{cases}$
- $R \in \mathbb{R}^d$ (PD)
(PN)
(IN)

Pozor! $Q(h, h)$ je

- pozitivně semidefinitivní $\stackrel{\text{df.}}{=} Q(h, h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$
- negativně \neg $\stackrel{\text{df.}}{=} Q(h, h) \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$

Plati: $Q(h, h) > 0 \quad \forall h \neq 0, h \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0) (Q(h, h) \geq \alpha |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d)$

\Leftrightarrow přímou.

\Rightarrow Množina $\{h \in \mathbb{R}^d : |h|_2 = 1\}$ je kompaktní v \mathbb{R}^d ,
 $Q(h, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, a $Q(h, h)$ má v $\{h \in \mathbb{R}^d : |h|_2 = 1\}$ minimum, označme jej $\alpha > 0$.

Pak pro $h \neq 0$ libovolně

$$\frac{1}{|h|_2^2} Q(h, h) = Q\left(\frac{h}{|h|_2}, \frac{h}{|h|_2}\right) \geq \alpha > 0,$$

což implikuje $Q(h, h) \geq \alpha |h|_2^2 \quad \forall h \neq 0.$

Pozorování Pro $d=2$ je podmínka $d^2 f(x)(h, h) > 0$ ekvivalentní zápisu

(*) $(h_1, h_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \left[x = \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right]$

známe $A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) \quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x)$

Pak (*) je ekvivalentní s

$$A h_1^2 + 2B h_1 h_2 + C h_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0)$$

$\iff h_1 \neq 0$
 $A + 2B \frac{h_2}{h_1} + C \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 > 0$

$\iff h_2 \neq 0$
 $C + 2B \frac{h_1}{h_2} + A \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 > 0$

nastane podmínka

$A > 0 \wedge B^2 - 4AC < 0$

nebo

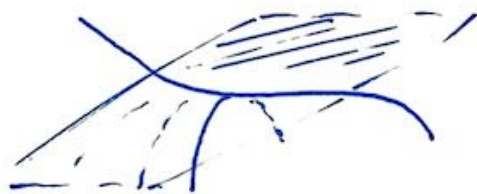
$C > 0 \wedge B^2 - 4AC < 0$

Obecněji, pro $\boxed{d \geq 2}$ \square $d^{(2)}f(x)(k, k) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_d}_{\text{vlastní čísla "D"}^{(2)}f(x)} > 0$
 \square $< 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \dots \lambda_d < 0$
 \square , indefinitní $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_d < 0$

Def. Řekneme, že $x^0 = (x_1^0, \dots, x_d^0) \in \mathbb{R}^d$ je sedlový bod funkce $f \in C^2(U_S(x^0))$ pokud

- $\nabla f(x^0) = 0$
- $\exists h^1, h^2 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $d^2 f(x^0)(k^1, k^1) > 0$
a $d^2 f(x^0)(k^2, k^2) < 0$

u $\boxed{d=2}$ nastane podmínka $B^2 - 4AC > 0$ (viz str. 8/48)



Porovnávejme $\boxed{d=1}$ $\cdot f'(x) = 0, f''(x) > 0 \Rightarrow$ u x lokální minimum $[f(x) = x^2]$

$\cdot f'(x) = 0, f''(x) < 0 \Rightarrow$ u x lok. maximum $[f(x) = -x^2]$

$\boxed{d=2}$ $\cdot f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \nabla f(x) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = (2x, 2y) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = (0, 0)$

$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad d^2 f(0,0)(k, k) = 2h_1^2 + 2h_2^2$

\Rightarrow u $(0,0)$ lokální minimum

$\cdot f(x, y) = -x^2 - y^2$

$Hf(x) \Big|_{x=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ u $(0,0)$ lokální maximum

$\cdot f(x, y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(x) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

$Hf(x) \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d^2 f(0,0)(h, k) = 2h_1^2 - 2h_2^2$

$h^I = (1, 0) \Rightarrow d^2 f(0,0)(h^I, k^I) > 0$

$h^{II} = (0, 1) \Rightarrow d^2 f(0,0)(h^{II}, k^{II}) < 0$

(h, k)

\Rightarrow u $(0,0)$ SEDLOVÝ BOD

Potud $d^2f(x^0)(k, k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}^d$, nebo nic říci o chování
 fce v okolí x^0 , jak ukazují následující příklady:

- (a) $f(x, y) = x^4 + y^4$ v (0,0) minimum
- (b) $f(x, y) = -(x^4 + y^4)$ v (0,0) maximum
- (c) $f(x, y) = x^4 - y^4$ v (0,0) sedlový bod.

Příklady ① Najděte a klasifikujte extrémny funkce

$f(x, y) = \frac{x}{y^2} + xy$.

Rěšení $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$

v D_f : $\nabla f(x, y) = \left(y + \frac{1}{y^2}, x - 2\frac{x}{y^3} \right) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + 1 = 0 & \& \\ x(y^3 - 2) = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow (y = -1) \wedge x = 0$ $y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 + y + 1)$

Podříčný bod: $x^0 = (0, -1)$

Hessian $f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 2y^{-3} \\ 1 - 2y^{-3} & 6xy^{-4} \end{pmatrix}$ $(x, y) = x^0 \Rightarrow Hf(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Také: (ii) $d^2f(0, -1)(k, k) = 3(k_1, k_2) \cdot (k_2, k_1) = 6k_1k_2$

$k^I = (1, 1) \Rightarrow d^2f(0, -1)(k^I, k^I) > 0$
 $k^{II} = (1, -1) \Rightarrow d^2f(0, -1)(k^{II}, k^{II}) < 0$

(i) $B^2 - 4AC = 9 > 0$
 \Rightarrow v (0, -1) je sedlový bod

(iii) $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ charakteristická rovnice

$+\lambda^2 - 1 = 0$
 $\lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 = -1$

$A := Hf(0, -1)$

② Najděte a klasifikujte extrémny $f(x,y) = -xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
Rěšení: (evičení) $D_f = \mathbb{R}^2$ neboť:

- $(x,y) \mapsto -\frac{x^2+y^2}{2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $(x,y) \mapsto -xy \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $t \mapsto e^t \in C^\infty(\mathbb{R})$

(a užijí věty o derivování, spojitého součinu, složeného zobrazení.)

Nutně podléhá na extrémny

$$0 = \nabla f(x,y) = \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} [-y + x^2y], e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} [-x + xy^2] \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x^2-1)=0} \wedge \boxed{x(y^2-1)=0}$$

$$[y=0 \vee x=1 \vee x=-1] \wedge [x=0 \vee y=1 \vee y=-1]$$

Podlehně body $[0,0], [1,1], [1,-1], [-1,-1], [-1,1]$

Hessian

$$H_f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} 2xy+yx-x^3 & x^2-1+y^2-x^2y \\ y^2-1+x^2-x^2y & 2xy+xy-xy^3 \end{pmatrix} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} 3xy-x^3 & x^2y-1-x^2y \\ x^2y^2-1-x^2y & 3xy-xy^3 \end{pmatrix}$$



▶ $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0)$ je sedlový bod (neb $\frac{B^2-4AC}{=1} > 0$) $f(0,0) = 0$

▶ $H_f(1,1) = e^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,1)$ je lokální minimum $f(1,1) = -\frac{1}{e}$

▶ $H_f(1,-1) = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,-1)$ je bod lok. maxima $f(1,-1) = \frac{1}{e}$

▶ $H_f(-1,1) = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1,1)$ — $f(-1,1) = \frac{1}{e}$

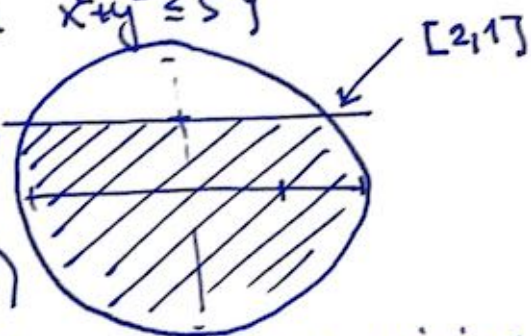
▶ $H_f(-1,-1) = H_f(1,1) \Rightarrow (-1,-1)$ je lokální minimum $f(-1,-1) = \frac{1}{e}$

Globální extrémny
 v $[-1,-1]$ a $[1,1]$ jsou globální minima
 v $[1,-1]$ a $[-1,1]$ jsou globální maxima
 neboť $|f(x,y)| \rightarrow 0$ ko $\|(x,y)\| \rightarrow r$ a $r \rightarrow \infty$

3) Najděte globální extrémů funkce $f(x,y) = x-y$ na množině $K := \{(x,y); y \leq 1 \text{ a } x^2 + y^2 \leq 5\}$

Rěšení • K je omezená, omezená v \mathbb{R}^2 tedy kompaktní

• $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ speciálně $f \in C^0(K)$



Tedy dle Věty 8.21 f nabývá na K maxima a minima.

Dále $\nabla f(x,y) = (1, -1) \neq (0,0)$ v \mathbb{R}^2

a tedy f nabývá maxima a minima na ∂K , kde

$$\partial K = \underbrace{\{(x,y); x \in (-2,2), y=1\}}_{\partial K_1} \cup \{[2,1], [-2,1]\} \cup \underbrace{\{(x,y); x^2+y^2=5 \wedge y < 1\}}_{\partial K_2}$$

Na ∂K_1 $f(x,y) = x-1 =: g(x)$
 $g'(x) = 1 \neq 0$

\Rightarrow kandidátní body

$[2,1]$ a $[-2,1]$

Na ∂K_2 $x = \sqrt{5} \cos \varphi$
 $y = \sqrt{5} \sin \varphi \quad (< 1)$

$$R(\varphi) = \sqrt{5} (\cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$R'(\varphi) = -\sqrt{5} (\sin \varphi + \cos \varphi) = 0 \Leftrightarrow \tan \varphi = -1$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \sqrt{5} \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\sqrt{5} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2} \right]$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, y = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1,$$

VĚZ DOROVČENÍ NA STRANĚ 8/54.

Vidíme, že výpočet není jednoduchý ani pro tvárné funkce: potřebují znát popis a parametrizaci hranice a vypočítat intervaly parametrizace.

Úkol: $\min_{(x,y) \in A} f(x,y)$ kde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; g(x,y) = 0\}$... vazba

je tzv. úloha na vázané extrémů. K řešení takovýchto úloh lze využít s úspěchem metodu tzv. Lagrangeových multiplikátorů (množiny λ ... Lagrange).

Věta 8.26 (Lagrangeova věta o multiplikačních
o vnitřních extrémech)

Bud' $f, g \in C^1(M)$, $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $d \geq 2$.

Bud' $A := \{x \in M; g(x) = 0\}$. (Vnitřní podmínka)

Bud' $z^0 \in M$ takový, ť $f(z^0) = \min_{z \in A} f(z)$ nebo $f(z^0) = \max_{z \in A} f(z)$

Bud' $\nabla g(z^0) \neq 0$

Pak existují $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, ť $\nabla f(z^0) = \lambda \nabla g(z^0)$.

"Dě" Dnes jiu po $d=2$

↑ Ozvě $z^0 = (x^0, y^0)$ si parametrizujeme body vnitřní
podminky parametrizací: $t \mapsto (x(t), y(t))$ pro $t \in (-\delta, \delta)$
 $\delta > 0$.
tak, ť $(x(0), y(0)) = (x^0, y^0)$.

Máme tedy
(*) $g(x(t), y(t)) = 0$ pro $t \in (-\delta, \delta)$

Derivováním (*) dostáváme:

$$\nabla g(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$$

Speciálně pro $t=0$:

$$(1) \quad \nabla g(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0$$

Auřak (x^0, y^0) je extrém funkce f vzhledem k vnitřní respektivě
jiří parametrizaci. Tedy

$k(t) := f(x(t), y(t))$ má v $t=0$ extrém,

což implikují

$$(2) \quad 0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0))$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme

$$\nabla f(x^0, y^0) \parallel \nabla g(x^0, y^0)$$

Tedy $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x^0, y^0) = \lambda \nabla g(x^0, y^0)$. 

Oba vektory jsou
kolmé na $(x'(0), y'(0))$
a jsou tedy
kolméme!

Ad Příklad 3

f(x,y) = x - y
g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 =>

∇g(x,y) = (2x, 2y) ≠ (0,0) na g(x,y) = 0.

Nuti podmínky optimality:

- ∂f/∂x = λ ∂g/∂x =>
- ∂f/∂y = λ ∂g/∂y =>
- g(x,y) = 0 =>

$x = 2\lambda x$
$-1 = 2\lambda y$
$x^2 + y^2 = 5$

syst.
rovic
po x, y, λ.

což implikuje

2λ(x+y) = 0
x^2 + y^2 = 5

λ = 0 ∨ { y = -x
x^2 + y^2 = 5 } => 2x^2 = 5

x_{1,2} = ±√(5/2) a y_{1,2} = ∓√(5/2)

y < 1 jen pro y₁ = -√(5/2) = -√10/2

Podmínka y = -x a y < 1 splňuje jen bod [√10/2, -√10/2].

Tedy uvažme porovnáme hodnot v podezřelých bodech ziskáme odpověď na náš úkol:

f(√10/2, -√10/2) = √10 > 3, f(2,1) = 1, f(-2,1) = -3

Tedy f má v bodě [-2,1] globální minimum
a v bodě [√10/2, -√10/2] globální maximum.



8.7 O čtyřech hlubších (krásných) větách

- (1) Banachova věta o pevném bodě
- (2) Věta o implicitních funkcích
- (3) Věta o inverzním zobrazení
- (4) Lagrangeova věta o uvažovaných extrémech

8.7.1 BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODĚ A JEJÍ DŮSLEDKY.

Připomenutí: X je Banachův \equiv úplný normovaný vektorový prostor
 $(X, \|\cdot\|_X)$
 \downarrow Cauchyovská $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v $(X, \|\cdot\|_X)$.

Definice Bude X množina. Řekneme, že zobrazení $T: X \rightarrow X$ má pevný bod pokud existuje $x_0 \in X$: $Tx_0 = x_0$

Věta 8.27 (BANACHOVA)

Bude $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův prostor a $T: X \rightarrow X$ kontrakce,

tzn. $\exists \theta \in (0, 1)$ tak, že

$$(K) \quad \|Tx - Ty\|_X \leq \theta \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X$$

Pak T má průběžně určený pevný bod.

- Pozorování
- Kontraktivní zobrazení je Lipschitzovské zobrazení s konstantou Lipschitzovskosti menší než 1.
 - Lipschitzovské zobrazení je Lipschitzovsky spojitě zobrazení, tedy spojitě.
 - Tedy kontrakce nebo kontraktivní zobrazení je spojitě zobrazení.

POZNÁMKA Věta platí v úplném metrickém prostoru (X, ρ) .
Tvzení sami přeformulujte !!

De Banachovy věty [1] $T: X \rightarrow X$ je spojité (neboť je kontraktivní)

[2] Jednotlivost Když T má dva různé pevné body $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$, pak $Tx_1 = x_1$ a $Tx_2 = x_2$ a z podmínky (K)

plyne $\|x_1 - x_2\|_X = \|Tx_1 - Tx_2\|_X \leq \theta \|x_1 - x_2\|_X$

což implikuje $(1 - \theta) \|x_1 - x_2\|_X \leq 0$.

[3] Existence Volme $x_1 \in X$ libovolně a definujme

$x_n := Tx_{n-1} \quad n \geq 2$.

Ukažeme, že tato definovaná posloupnost je Cauchyovská. Protože X je úplný, tak existuje $x_0 \in X$ tak, že

$x_n \rightarrow x_0 \quad n \in \mathbb{N}$

Ze spojitosti

$Tx_n \rightarrow Tx_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (*)$

Ale

$Tx_n = x_{n+1} \rightarrow x_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (**)$

z jedinečnosti limity $Tx_0 = x_0$, což jsme chtěli ukázat.

[4] Zbyvá ověřit, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská.

Avšak:

$\|x_{n+1} - x_n\|_X = \|Tx_n - Tx_{n-1}\|_X \stackrel{(K)}{\leq} \theta \|x_n - x_{n-1}\|_X$
 $\dots \leq \theta^{n-1} \|x_2 - x_1\|_X$

Odsud: pro $\forall n, m \in \mathbb{N}, n > m$:

$\|x_n - x_m\|_X = \|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \dots + x_{m+1} - x_m\|_X$

(Δ -nerovnost)

$\leq \|x_n - x_{n-1}\|_X + \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_X + \dots + \|x_{m+1} - x_m\|_X$

$\leq (\theta^{n-1} + \dots + \theta^{m-1}) \|x_2 - x_1\|_X$

čili konvergentní geometrické řady

$\leq \epsilon \|x_2 - x_1\|_X \Rightarrow \{x_n\}$ je Cauchyovská.

(B-C podmínky)
 pro
 geom. řadu

Banachova věta v úplném metrickém prostoru • Bud' (X, ρ) úplný metrický prostor

se vzdáleností (metrikou) $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

• Bud' $T: X \rightarrow X$ kontrakce (resp. kontraktivní zobrazení) tj.

$$\exists \theta \in (0, 1): \rho(Tx, Ty) \leq \theta \rho(x, y) \quad \text{pro všechna } x, y \in X.$$

Pať T má právě jeden pevný bod $\bar{x} \in X$, tj. $\overline{Tx} = \bar{x}$.

Nanic: je-li $x_0 \in X$ zvoleno libovolně, pať posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ definovaná $x_{n+1} := Tx_n \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

konverguje k \bar{x} exponenciálně a platí tyto odhady:

(M)

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(x_n, \bar{x}) &\leq \frac{\theta^n}{1-\theta} \rho(x_1, x_0) \\ \rho(x_{n+1}, \bar{x}) &\leq \frac{\theta}{1-\theta} \rho(x_{n+1}, x_n) \\ \rho(x_{n+1}, \bar{x}) &\leq \theta \rho(x_n, \bar{x}). \end{aligned} \right.$$

(D) [i] Jednotvárnost. Kdyby x a y byly dva různé pevné body, pať splní $Tx=x$ a $Ty=y$ a máme:

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq \theta \rho(x, y) \Rightarrow \underbrace{(1-\theta)}_0 \rho(x, y) \leq 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

[ii] Existence. Bud' $x_0 \in X$. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položíme $x_{n+1} := Tx_n$.

Pať

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \theta \rho(x_n, x_{n-1}) \\ &= \rho(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq \theta^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \theta^n \rho(x_1, x_0) = \theta^n \rho(Tx_0, x_0), \end{aligned}$$

což implikuje

[p > n]

$$\rho(x_p, x_m) \leq \sum_{j=m}^{p-1} \rho(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=m}^{p-1} \theta^j \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} \rho(x_1, x_0)$$

$$\sum_{j=m}^{p-1} \theta^j \leq \sum_{j=m}^{\infty} \theta^j = \theta^m \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j = \frac{\theta^m}{1-\theta}$$

Tedy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je Cauchyovská a protože (X, ρ) je úplný, existuje $\bar{x} \in X$ tak, ť $x_n \rightarrow \bar{x}$ v (X, ρ) tj. $\rho(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$

Limitním přechodem v $x_{n+1} = Tx_n$ dostáváme

$$\bar{x} = T\bar{x}$$

[iii] Odhady (M) a odvození sami postupují jako výše.



Pomocí Banachovy věty o pevném bodě (věta 8.27) nyní dojdeme Picard-Lindelöfovou větu 7.3. Předpokládejme si její první.

Věta 7.3 (Picard-Lindelöfova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť

(P1) $\vec{f}: E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ je spojitá na omezené množině $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

(P2) $\vec{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^N$ je na E lokálně Lipschitzovsky spojitá

tedy $\forall K \subset E$ kompaktní $\exists \lambda = \lambda_K$ tak, že

no $\forall (t_0, \vec{y}_0) \in E$

$$\forall (t_1, \vec{y}_1), (t_2, \vec{y}_2) \in K \quad |\vec{f}(t_1, \vec{y}_1) - \vec{f}(t_2, \vec{y}_2)|_{\mathbb{R}^N} \leq \lambda |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|_{\mathbb{R}^N}$$

(P3) $\exists!$ (existuje právě jedno) $\vec{y}: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^N$ splývající

$$(P_2) \left[\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y}) \wedge \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \right] \Leftrightarrow \left[\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds \right] (P_1)$$

(D) [1] K důkazu využijeme integrační formulaci (P1), která je ekvivalentní s naším lokálním formulací (P2).

[2] Buď $(t_0, \vec{y}_0) \in E$ libovolně pevně. Buď $K := \{(t, \vec{z}); t \in \langle t_0 - a, t_0 + a \rangle \text{ a } |\vec{z} - \vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \leq b\}$

taková, že $K \subset E$. Protože K je kompaktní

a \vec{f} splňuje (P1), tak existuje $M > 0: |\vec{f}(t, \vec{z})| \leq M \quad \forall (t, \vec{z}) \in K$.

[3] Definujme $X := \{\vec{y} \in C(\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle)^N; |\vec{y}(t) - \vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \leq b \text{ pro } t \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle\}$

Δ normou $\|\vec{y}\|_X := \max_{t \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle} |\vec{y}(t)|_{\mathbb{R}^N}$.

Víme, že $(X, \|\cdot\|_X)$ je úplný.

[4] Definujme $T: X \rightarrow X$ předpisem $T\vec{y} := \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds$.

Potřebujeme ukázat, že

a) T zobrazuje $\vec{y} \in X$ do X

b) T je kontrakce.

} Tyto dva požadavky dají pevně bod na δ .

Ad a) $|\vec{T}\vec{y} - \vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} = \left| \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq M\delta \leq b$

pokud $\delta \leq \frac{b}{M}$

Ad b)

$$|\vec{T}\vec{y}_1(t) - \vec{T}\vec{y}_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |\vec{f}(s, \vec{y}_1(s)) - \vec{f}(s, \vec{y}_2(s))| ds$$

$$(P2) \leq \lambda_K \int_{t_0}^t |\vec{y}_1(s) - \vec{y}_2(s)| ds$$


$$\leq \lambda_K \delta \max_{s \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle} |\vec{y}_1(s) - \vec{y}_2(s)|_{\mathbb{R}^n}$$

Tedy, pokud $\lambda_K \delta < 1$, pak T je kontrakce, neboť přichodem

$\theta :=$ k maximum přes $t \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ na levé straně dostáváme

$$\|T\vec{y}_1 - T\vec{y}_2\|_X \leq \theta \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|_X$$

Je-li tedy $\delta < \min \left\{ \frac{1}{\lambda_K}, \frac{b}{M}, a \right\}$, pak T splňuje a) a b) tj. zobrazuje $(X, \|\cdot\|_X)$ do $(X, \|\cdot\|)$ a navíc je T kontrakce.

Dle Banachovy věty $\exists! \vec{y} \in X$ splňující $T\vec{y} = \vec{y}$. To však znamená, že platí (P_2) . Důkaz je hotov. 

Věta o existenci řešení počáteční úlohy (P_a) platí i na křivkách (obecnějších) předpokladů, než vyžaduje Peanova věta 7.2 (k tomu zatím nebudeme dorazovat). Řešení (P_a) existují pokud

(i) $\vec{y} \mapsto f(t, \vec{y})$ je spojitá pro skoro všechna $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

(ii) $t \mapsto f(t, \vec{y})$ je měřitelná pro všechna \vec{y}

Pojmy skoro všude a měřitelná funkce si objasníme v kapitole o Lebesgueově integrálu v ZS 2020/21.

Věta 8.28 (Ještě jedna varianta Banachovy věty)

Zuď $T: B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ spojitá, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^m$. Nechť pro každé $q \in (0, 1) \exists \delta > 0$ tak, že $B_\delta(0) \subset B_R(0)$ a platí:

$$(\alpha) \quad \|T\vec{y} - T(\vec{z})\|_{\mathbb{R}^m} \leq q \|\vec{y} - \vec{z}\|_{\mathbb{R}^m} \quad \& \quad (\beta) \quad T(0) \leq \delta(1-q)$$

pro každé $\vec{y}, \vec{z} \in B_\delta(0)$

Pak $\exists! \vec{y}_0 \in B_\delta(0)$ tak, že $T\vec{y}_0 = \vec{y}_0$.

(D) Volme $q \in (0, 1)$ libovolně, jenž a Nechť (α) a (β) platí.

Pro posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ platí:

$$x_n = T^n(0) = T x_{n-1}$$

$$\|x_n\|_{\mathbb{R}^m} = \|T^n(0)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|T^{i+1}(0) - T^i(0)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} q^i \|T(0) - 0\|$$

$$\leq \frac{1}{1-q} \|T(0)\| \leq \delta. \quad \square \quad 8/59$$

[OSTATNÍ KROKY JAVO V. 8.27]

8.7.2 Věta o implicitních funkcích

V této serii se budeme zabývat rovnicemi tvaru

(1) $F(x, y) = 0$

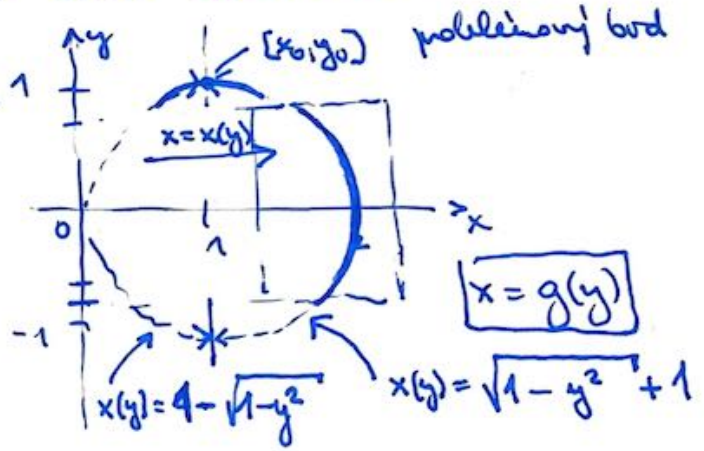
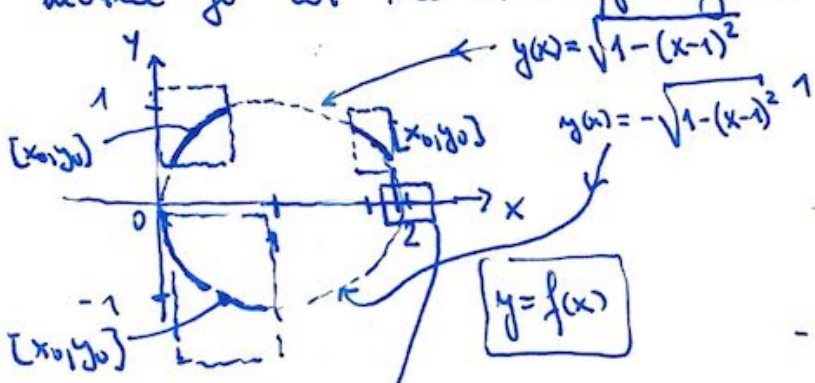
Úkolem je rozhodnout, zda a kde tato rovnice určuje y jako funkci x , resp. x jako funkci y , tj.

(2) $y = f(x)$ resp. $x = g(y)$

Explicitní
funkční
zápis

Pokud to lze, tak říkáme, že funkce f resp. g je dána rovnicí (1) implicitně.

Příklad ① Buď $F(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$. Pař (1) určuje body
jednoduché křivice se středem v $[1, 0]$. Obecně nelze napsat
body křivice "globálně" jako funkci typu (2). "Lokálně" to však
možno je ať má dvě výjimky v obou situacích. Viz obr. 1 a 2.



zvětšeno
v zadaném okolí $[0, 2]$
nelze napsat
 $y = y(x)$

V okolí (křivice málokdy) bodů
 $[0, 0]$ a $[2, 0]$ NELZE psát
 y jako funkci x

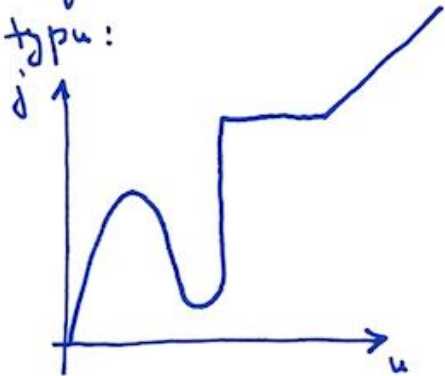
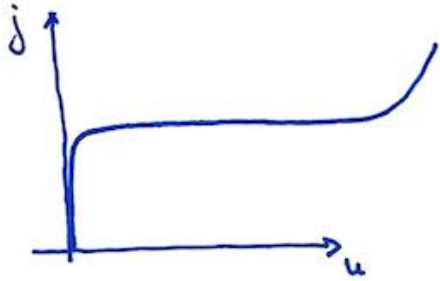
V libovolně malém okolí bodů
 $[1, 1]$ a $[1, -1]$ NELZE psát
 x jako funkci y

V ostatních bodech to však
udělat lze

Ostatní body křivice mají vždy
okolí, na kterém lze y vnímat jako
funkci x .

OTÁZKA: JAKÁ VLASTNOST CHARAKTERIZUJE "ŠPATNÉ" BODY?

Ve fyzikálních experimentech mohou získat pozoruhodné tabulky mezi veličinami j a u . Tato data mohou proložit křivkou a výsledkem mohou být obrazy typu:



Ačkoliv historicky/tradici můžeme být vedeni k hledání závislosti j na u , tj. $j = \tilde{j}(u)$, můžeme být všeobecněji sledovat u jako funkci j , tj. $u = \tilde{u}(j)$ nebo obecněji $g(j, u) = 0$.

Skalární (implacitní) rovnici (1) lze zobecnit následujícím způsobem. Uvažujme

$$(3) \quad \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0},$$

kde $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ a $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$

a ptáme se, zda (3) lze lokálně chápat tak, že

$$(4) \quad \vec{y} = \vec{g}(\vec{x}), \quad \text{kde} \quad \vec{g} = (g_1, \dots, g_m).$$

Přepíšeme si (3) po složkách:

$$(3') \quad \left. \begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \vdots & \\ F_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Vidíme, že (3) představuje m -rovnice o $(m+k)$ -neznámých, z kterých chceme m -složek vyjádřit pomocí ostatních (k) -složek.

Otázka zní: Máme m rovnic o $(m+k)$ -neznámých $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m$.

Je možné, alespoň v okolí nějakého bodu $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k, a_{m+1}, \dots, a_{m+m})$ takového, že $\vec{F}(\vec{a}) = \vec{0}$ vyjádřit m -složek (poměnných),

např. y_1, \dots, y_m jako funkce zbylých poměnných x_1, \dots, x_k .

Pozorování: Posunutím souřadného systému do bodu \vec{a} vidíme, že stačí uvažovat jen případ $\vec{a} = \vec{0}$.

Speciálním, ale důležitým příkladem systému rovnic (3) resp. (3'),
 je známý problém lineární algebry:

- hledáme-li řešení soustavy m -lineárních rovnic o m neznámých

$$(3'') \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = x_i \quad i=1, \dots, m \Leftrightarrow A \vec{y} = \vec{x},$$

pak víme, že (3'') má jediné řešení (3!) právě když $\det A \neq 0$.

- Všimněme si, že (3'') lze psát ve tvaru (3) či (3'), kde

$$F_i(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j - x_i \quad \text{a tedy } m=k.$$

Také považujeme, že

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = a_{ij} \quad \text{pro } i=1, \dots, m \quad \text{a } j=1, \dots, m$$

a tedy Jacobikova matice se shoduje s maticí A , o které víme, že $\det A$ musí být nenulový, aby (3'') bylo řešitelné.

Protože libovolnou hladkou funkci lze lokálně
 aproximovat lineární funkcí (diferenciálem), nepřetržitě u nás,
 má v řešení máti úlohy bude mít křivkový polí

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^m.$$

Věta 8.29 (o implicitních funkcích)

Bud' $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m): U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $U \subset \mathbb{R}^k$ a $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené,

Nechť $\vec{F} \in C^1(U \times V)$. Nechť $\vec{x}_0 \in U$ a $\vec{y}_0 \in V$ tak, že

- $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$
- $\det \left[\left(\frac{\partial F_j}{\partial y_i} \right)_{i,j=1}^m \right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \neq 0$

Pak existuje $U_0 \subset U$ a existuje právě jedna $\vec{g}: U_0 \rightarrow V$ tak, že

- $\vec{g} \in C^1(U_0)$
- $\vec{F}(\vec{x}, \vec{g}(x)) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in U_0.$

Poznámka Potud platí poslední poznámka, lze ji derivovat dle proměnných x_i , $i=1, \dots, k$ a odsud můžeme spočítat tyto derivace explicitně.

Speciálně: je-li $m = k = 1$. Pak z rovnosti

$$F(x, g(x)) = 0$$

plyne

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} g'(x) = 0,$$

což implikuje

$$(*) \quad \left[\begin{array}{l} g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} \\ \neq 0 \end{array} \right]$$

Aplikačně k implicitnímu zadání funkce $F(x, y) = 0$ můžeme spočítat tečnu.

Její rovnice je dále určena $y(x) = y_0 + g'(x_0)(x - x_0)$ neboli

$$(y(x) - y_0, x - x_0) \cdot (1, -g'(x_0)) = 0. \text{ Odtud plyne, že}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + [g'(x_0)]^2}} (-g'(x_0), 1) \text{ je normálový vektor k } F(x, y) = 0 \text{ v bodě } (x_0, y_0).$$

Dosazení (*) dostáváme

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\nabla F\|_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\nabla F(x_0, y_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0)\|_2} \quad \square$$

Příklad Pak $F(x, y) = (x-1)^2 + y^2 = 1$. Určete, ve kterých bodech rovnice

$F(x, y) = 0$ lokálně popisuje y jako funkci x . V těchto bodech

spočítejte $y'(x)$.

Rěšení: $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y = 0$ právě když $y = 0$. Po dosazení do $F(x, y) = 0$

vidíme, že v bodech $[0, 0]$ a $[2, 0]$ nelze aplikovat větu o

implicitní funkci. V ostatních bodech, „lokálně“ y je fci x . V

těchto bodech

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = - \frac{2(x-1)}{2y} = - \frac{x-1}{y}$$

Hodnota udává směrnici tečny v bodě $[x, y]$ ležící na $F(x, y) = 0$. □

Dz Věty 8.29 Transformaci počátku souřadného systému lze zapísat, ať $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = (\vec{0}, \vec{0})$. Protože matice $\left(\frac{\partial F_i(\vec{0}, \vec{0})}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^m$ má nenulový determinant, existují matice inverzní, kterou označíme $\Gamma(\vec{0}, \vec{0})$.

$$t.j. \Gamma(\vec{0}, \vec{0}) := \left[\frac{\partial F_i(\vec{0}, \vec{0})}{\partial y_j} \right]^{-1}.$$

↑
GAMMA

Pro každé $\vec{x} \in U$ definujeme

$$T_{\vec{x}}: V \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ předpisem}$$

$$T_{\vec{x}}(\vec{y}) := \vec{y} - \Gamma(\vec{0}, \vec{0}) \vec{F}(\vec{x}, \vec{y})$$

Cílem je ukázat, že T má jediný pevný bod. Důvod / motivace pro násobení \vec{F} zleva matricí Γ plyne z diskuse před větou 8.29 resp. z nahrazení

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \text{ "linearitací" } \underbrace{\vec{F}(\vec{0}, \vec{0})}_0 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{(\vec{0}, \vec{0})} y_j$$

Zbývá ověřit dva předpoklady

(α) a (β) modifikované Banachovy věty 8.28.

Ad (α)

$$\begin{aligned} \|T_{\vec{x}}(\vec{y}^1) - T_{\vec{x}}(\vec{y}^2)\|_{\mathbb{R}^m} &= \|\vec{y}^1 - \vec{y}^2 - \Gamma(0,0)[\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}^1) - \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}^2)]\|_{\mathbb{R}^m} \\ &= \|\Gamma(0,0) \left[(\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}^1) - \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}^2)) - \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j} (0,0) \right] (\vec{y}^1 - \vec{y}^2) \right]\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\stackrel{\text{LVOŠU}}{\leq} \underbrace{\|\Gamma(0,0)\|}_{\hat{C}} \underbrace{\left\| \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}^*) - \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0) \right) (\vec{y}^1 - \vec{y}^2) \right\|_{\mathbb{R}^m}}_{\text{ze spojitosti lze ukázat malí}} \end{aligned}$$

Tedy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{y}^1, \vec{y}^2 \in V_{\delta}(0) \text{ a } \forall \vec{x} \in U_{\delta}(0)$$

$$\|T_{\vec{x}}(\vec{y}^1) - T_{\vec{x}}(\vec{y}^2)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \varepsilon \|\vec{y}^1 - \vec{y}^2\|_{\mathbb{R}^m}$$

Speciálně, pro $\varepsilon = \frac{q}{C}$ a $q \in (0, 1)$ dokládáme, že $T_{\vec{x}}$ je kontrakce.

Ad (β)

$$\|T_{\vec{x}}(\vec{0})\| = \|\Gamma(0,0)\| \|\vec{F}(\vec{x}, \vec{0})\| = \|\Gamma(0,0)\| \|\vec{F}(\vec{x}, \vec{0}) - \vec{F}(\vec{0}, \vec{0})\| \leq \hat{C} \|\vec{x}\| < \tilde{\varepsilon}$$

Tal pro $\tilde{\varepsilon} = \delta(1-q) \exists \theta$ tak, že $\|T_{\vec{x}}(\vec{0})\| \leq \delta(1-q) \forall \vec{x} \in U_{\theta}(\vec{0})$.

speciálně

Podle věty 8.28: $\forall \vec{x} \in U_{\theta}(0) \exists! \vec{y} \in V_{\delta}(0)$

splňující $T_{\vec{x}}\vec{y} = \vec{y}$ t.j.

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}(\vec{x})) = 0.$$

Označíme \vec{g} zobrazení: $x \mapsto \vec{y}$
 Hledáme \vec{g} plně a hladce: \vec{F} .



S implicitními funkcemi úzce souvisí ODR 1. řádu ve tvaru totálního
diferenciálu. Necht'

(5) $f(x,y) = 0$ v $U \subset \mathbb{R}^2$ otevřené
a necht' má f v libovolném bodě $(x,y) \in U$ totální diferenciál.
Pak plyne A (5):

$$(6) \quad df(x,y)(h_1, h_2) = 0 \quad \forall \vec{h} = (h_1, h_2)$$

resp.

$$(6') \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) h_2 = 0$$

Označíme-li "přirůsteky" (h_1, h_2) symboly (dx, dy) , tak máme

$$(6'') \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dy = 0$$

což můžeme Atotožnit s ODR 1. řádu

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) y'(x) = 0$$

a to buď formálně, podělíme-li (6'') nemulovým přirůstkem dx
a Atoběžíme $\frac{dy}{dx} = y'$, nebo s vyčítáním úhy v implicitních
funkcích (v bodě, kde ji použít můžeme*).

Toto porovnaním můžeme vyčítat & řešení rovnice typu

$$(8) \quad \underline{M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0} \quad \begin{cases} \rightarrow \underline{M(x,y) + N(x,y) y'(x) = 0} \\ \rightarrow \underline{M(x,y) x'(y) + N(x,y) = 0} \end{cases}$$

Porad bychom věděti, ně & poli $(M(x,y), N(x,y))$ existuje skalární
funkce (potenciál) nerozhodnu f tak, ně $\nabla f(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$
pak $f(x,y) = 0$ je řešení rovnice (8) zapsané v implicitním tvaru.

Příklad 1 Rovnice ve tvaru separovaných proměnných: $\frac{dy}{dx} = R(x)g(y)$

Rěšení Na intervalu, kde $g \neq 0$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = R(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = R(x) dx \Leftrightarrow R(x) dx - \frac{1}{g(y)} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{H(x) - G(y) + C = 0} \quad \text{kde } \boxed{f(x,y) := H(x) - G(y) + C} \text{ je hledaný potenciál.}$$

* Tam, kde je vyčítat nemohu lze všad ^{oběma} uvažovat $x = x(y)$.

2) Najděte řešení rovnice

(PÚ) $5x^4y + 2x^3y^2 + (x^5 + x^4y + 2y)y' = 0$ a $y(0) = 1$

Rěšení Jedná se o počáteční úlohu pro rovnici 1. řádu.
nelineární obyč. dif.

Rovnice má tvar (8), kde

$$M(x,y) = 5x^4y + 2x^3y^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$N(x,y) = x^5 + x^4y + 2y \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Hledáme potenciál $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby $\nabla f = (M, N)$ tj.

(g₁) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4y + 2x^3y^2$

(g₂) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^5 + x^4y + 2y$

Odsud, resp. z (g₁), dostáváme

(10) $f(x,y) = x^5y + \frac{1}{2}x^4y^2 + C(y)$

Po dosazení (10) do (g₂) máme:

$$x^5 + x^4y + C'(y) = x^5 + x^4y + 2y,$$

což implikuje

$$C'(y) = 2y$$

a tedy

$$C(y) = y^2 + C$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolné!

Odsud a z (10) plyne, že potenciál

$$f(x,y) = x^5y + \frac{1}{2}x^4y^2 + y^2 + C$$

splňuje

$$\boxed{f(x,y) = 0}$$

a dává obecný tvar řešení ODR.

Počáteční podmínka $y(0) = 1$ vede k rovnici

$$f(0,1) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$$

Tedy řešení počáteční úlohy lze psát ve tvaru

(11) $\boxed{\left(\frac{1}{2}x^4 + 1\right)y^2 + x^5y - 1 = 0}$

což můžeme dále analyzovat přesně o implicitní funkci a řešení kvadratické rovnice. To druhé dává

$$y(x) = \frac{-x^5 \pm \sqrt{x^{10} + 2(x^4 + 2)}}{x^4 + 2}$$

průběh $y(0) = 1$ je splněn jen prvním

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{-x^5 + \sqrt{x^{10} + 2(x^4 + 2)}}{x^4 + 2}}}$$

z věty o implicitní funkci a z (11) lze psát jako funkci x pokud $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Anket z (11):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4+2)y + x^5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x^5}{x^4+2}$$

což po dosazení do (11) dává $\frac{1}{2} \frac{x^{10}}{x^4+2} - \frac{x^5}{x^4+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{x^{10}}{x^4+2} + 1 = 0$
což nikdy nenastane.

Tedy vždy lze lokálně psát $y = y(x)$.

Předchozí úvahy nás vedou k jedné otázce a jednomu rozšíření.
Není pravda, že k danému vektorovému poli (Π, N) existuje vždy potenciál f (tak, aby $\nabla f = (\Pi, N)$). Otázka zní:

- Za jakých podmínek existuje potenciál k danému vektorovému poli? Tato otázka lze řešit i pro vícezměrné pole $(T_1, \dots, T_N): \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Rozšíření metody totálního diferenciálu pro řešení rovnic typu (8) spočívá ve vyhledání rovnice (8) vhodným integračním faktorem $\mu = \mu(x,y)$, který obvykle volíme ve tvaru

$$\mu(x,y) = m(\phi(x,y))$$

kde $\phi(x,y)$ je zvolena na základě naší intuice, počtů a omylů. Např.
 $\phi(x,y) = x, \phi(x,y) = y, \phi(x,y) = xy,$
 $\phi(x,y) = x+y.$

- Otázka zní: jak nalézt m ?

Obě tyto otázky spolu souvisí a odpověď (byť částečnou) dává následující tvrzení.

Tvrzení (NEHTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE POTENCIÁLU) Pokud $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená a $\vec{T} \in [C^1(\Omega)]^N$. Pokud má $\vec{T} = (T_1, \dots, T_N)$ potenciál,

(*) pak platí $\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i}$ v Ω (pro všechna $i, j = 1, \dots, N$).

(D) z existence potenciálu plyne: $\nabla u = \vec{T} \in [C^1(\Omega)]^N$ a když $u \in C^2(\Omega)$ a dle věty o Admiret derivaci platí $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ v Ω .

Což však dává tvrzení.



Pozoruhodné je, že podmienka (*) je za úplných situácií také podmienka postačujúca. Platí:

TVRZENIE (POSTAČUJÍCÍ PODMIENKA EXISTENCE POTENCIÁLU).

Nechť (i) $\Omega = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ ($-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$)
 $i=1, \dots, n$

(ii) $\vec{T} = (T_1, \dots, T_n) \in [C^1(\Omega)]^n$

(iii) $\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i}$ v Ω

Paž \vec{T} má potenciál, tzn. $\exists U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\nabla U = \vec{T}$ v Ω .

(D) Skripta Černý, Požarný, str. 166, 167. ▣

Příklad (který ukazuje, že (*) není obecně postačující.)

Bud' $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definováno v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ předpisem

(*) $\vec{T}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Paž $\vec{T} \in [C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})]^2$ splňují $\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial T_2}{\partial x}(x,y)$

Když existoval potenciál U na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ tak, by mohl platit

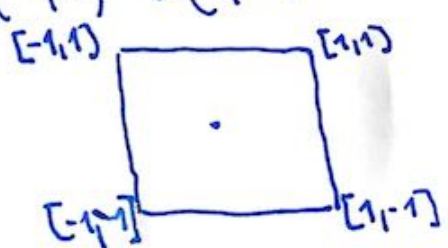
$$0 = U(1,1) - U(-1,1) + \underbrace{U(-1,1) - U(-1,-1)}_{[-1,1]} + U(-1,-1) - U(1,-1) + U(1,-1) - U(1,1)$$

Newtonův
= vztah $\int_{-1}^1 \frac{\partial U}{\partial x_1}(s,1) ds$

$+ \int_{-1}^1 \frac{\partial U}{\partial x_2}(-1,s) ds$

doradim (*) $+ \int_{-1}^1 \frac{\partial U}{\partial x_1}(s,-1) ds$

$+ \int_{-1}^1 \frac{\partial U}{\partial x_2}(1,s) ds$



a provedu integraci $= -2\pi$.

⇓ potenciál neexistuje. ▣

Z posledu druhé otázky (jak nalézt m a metody integracního faktoru) udeh předchozí tvrzení říkájí, že m může splňovat

(12) $\frac{\partial}{\partial y} (m(\phi(x,y)) M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x} (m(\phi(x,y)) N(x,y))$

kde M, N jsou funkce v okolí (8).

Ukažme si metodu integracního faktoru na konkrétním příkladu.