§7 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Ve vědě a inženýrství jsou formulovány matematické modely k porozumění fyzikálních, chemických, biologických, ekonomických a jiných přírodních jevů. Tyto matematické modely často zahrnují rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámé (hledané) funkce. Takovéto rovnice se nazývají DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE (DR).

Je-li neznámá funkce y závislá jen na jedné (reálné) proměnné, řekněme $x \in (a,b)$, a v DR se tak vyskytují klasické (obyčejné) derivace fce y, tzn. $y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots$ (nebo jen některé z nich), pak se daná DR nazývá obyčejná diferenciální rovnice (ODR) respektive systém ODR

Přesněji:

- je-li $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ mluvíme o skalární ODR
- je-li $y : (a,b) \to \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, mluvíme o systému ODR

Nejvyšší řád derivace, který se v dané DR vyskytuje, určuje řád ODR či řád systému ODR

Příklady ① DR $\boxed{y' + a(x)y = g(x)}$ (1)

kde $a : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ a $g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce, je skalární ODR 1. řádu pro neznámou

$$y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R} \qquad \big(y = y(x)\big).$$

Pozorování Užijeme-li značení $y' = \frac{dy}{dx}$, lze (1) psát ve tvaru $\frac{dy}{dx} + a(x)y = g(x)$. Označíme-li $L := \frac{d}{dx} + a(x)$, pak L je příklad diferenciálního operátoru, který funkci $y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ přiřadí funkci $Ly = \frac{dy}{dx} + a(x)y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$. Navíc L je LINEÁRNÍ operátor a (1) lze psát ve tvaru $Ly = g(x)$.

Př. 2 DR $\boxed{y'' + by' + my = \sin \alpha t}$ (2)

kde b, m a α jsou dané nezáporné parametry (konstanty) představuje skalární ODR 2. řádu pro neznámou

$$y: (0,T) \to \mathbb{R} \qquad (y = y(t)) \quad \text{z kontextu zadání DR.}$$

Označíme-li $x_1 := y$ a $x_2 := y'$ a $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$, pak lze rovnici (2) přepsat do tvaru

(3) $\boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -bx_2 - mx_1 + \sin \alpha t \end{aligned}}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha t \end{pmatrix}$

kde $\mathbb{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m & -b \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}' &= \mathbb{A}\vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{f}(t) &= (0, \sin \alpha t)^T \end{aligned}}$ $\Leftrightarrow$

což je systém dvou ODR 1. řádu

Vidíme, že je (úzká) souvislost mezi skalární ODR vyššího řádu a systémem ODR 1. řádu.

Pozorování: Opět se značením $y' = \frac{dy}{dx}$ lze rovnici (2) psát ve tvaru

(2') $\boxed{Ly = g(t)}$, kde $\boxed{L := \frac{d^2}{d^2} + b\frac{d}{dx} + m}$ a $g(t) := \sin \alpha t$

Protože $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ a $L(\alpha y) = \alpha L y$, tak L je lineární diferenciální operátor 2. řádu.

Př. 3 DR $\boxed{y'' + \frac{g}{l} \sin y = 0}$ je opět skalární ODR 2. řádu (rovnice jednoduchého kyvadla). V tomto případě je však diferenciální operátor

$$Ly := \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{g}{l} \sin y \qquad \text{nelineární!}$$

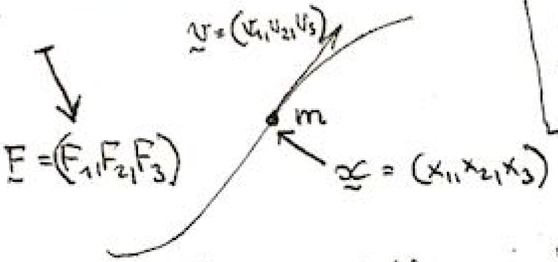
Připomeňme si na jednoduchém fyzikálním systému jak jsou různé diferenciální rce generovány.

NEWTONOVA KLASICKÁ MECHANIKA

- popisuje pohyb částic pomocí diferenciálních rovnic
- částice (tělesa) chápeme jako hmotné body
- tři základní postuláty

1. ZÁKON Pokud nepůsobí na částici ŽÁDNÉ SÍLY, částice se pohybuje přímočarým (nezrychleným) pohybem
ŽÁDNÉ ZRYCHLENÍ

2. ZÁKON

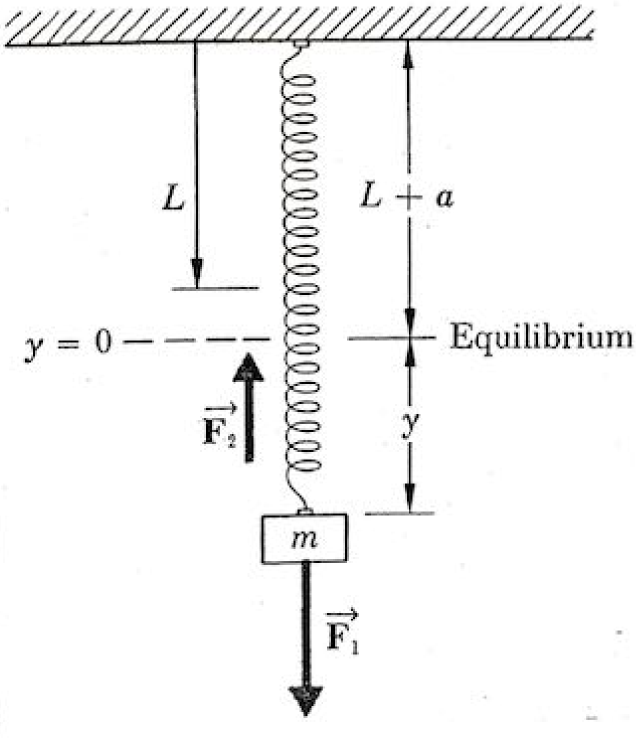


$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v}\right) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m\ddot{\mathbf{x}}}$$

m konstant

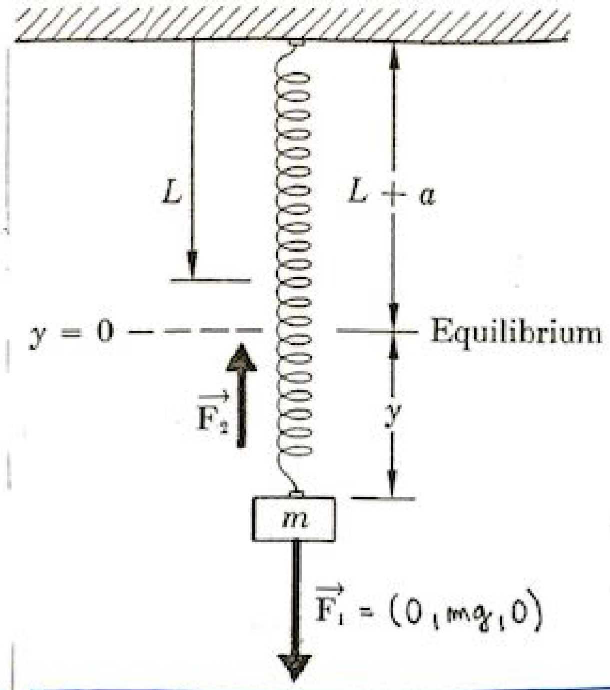
3. ZÁKON Síla $\mathbf{F}$ vyvolá reakční sílu $-\mathbf{F}$

SYSTÉM: PRUŽINA - ZÁVAŽÍ



ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

- Pohyby možné jen ve vertikálním směru
- závaží chápeme jako hmotný bod o hmotnosti m
- Hmotnost pružiny zanedbáme



Předpoklady na materiály

(S) pružina splňuje Hookeův zákon: pružina vyvolává "rekonstrující" sílu F_2 na závaží směrem k poloze přirozené délky pružiny, a tato síla je úměrná $y+a$, tj.

$$\underset{\sim}{F_2} = (0, -k(y+a), 0) \qquad (k>0)$$

(A) odpor vzduchu je zanedbatelný (vakuum)

$\boxed{\text{Z 2. ZÁKONA}}$ $\Rightarrow$ $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{F_2} = (0, mg - k(y+a), 0)$

V rovnováze: $\underbrace{\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0 \text{ a } y = 0 \Rightarrow ka = mg}$

Rovnice pohybu: $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k}{m}y = 0}$

$\boxed{\text{Počáteční podmínky: } y(0) = y_0,\ \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1}$

(A*) Odpor vzduchu je úměrný rychlosti

$$\underset{\sim}{F_3} = \left(0, -b\frac{dy}{dt}, 0\right) \Rightarrow \underset{\uparrow}{m}\frac{d^2y}{dt^2} + \underset{\uparrow}{b}\frac{dy}{dt} + \underset{\uparrow}{k}y = 0$$

koeficienty: setrvačnosti tlumení tuhosti

(A**) Odpor vzduchu (prostředí) závisí na rychlosti nelineárně

$$\underset{\sim}{F_3} = \left(0, h\left(\frac{dy}{dt}\right), 0\right) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + h\left(\frac{dy}{dt}\right) + ky = 0$$

(S*) Pružina vyvolává sílu $\underset{\sim}{F_2}$, která závisí na $(y+a)$ nelineárně

$$\underset{\sim}{F_2} = (0, g(y+a), 0) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + g(y) + \begin{Bmatrix} 0 \\ b\frac{dy}{dt} \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right) \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} (A) \\ (A^*) \\ (A^{**}) \end{matrix}$$

(S*) + (A**) je speciální případ rovnice $\dfrac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \dfrac{dy}{dt}\right) = 0$

Vnější (daná) síla $\underset{\sim}{F_4} = (0, \xi(t), 0)$ například $\xi(t) = \sin\omega t$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = \sin\omega t$$

ŽÁDNÁ PRUŽINA $\Rightarrow$ PADAJÍCÍ TĚLESO

$\underset{\sim}{F_2} = (0, 0, 0)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ b\frac{dy}{dt} \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right) \end{Bmatrix} = G \quad \begin{matrix} (A) \\ (A^*) \\ (A^{**}) \end{matrix} \quad z := \frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} + \begin{Bmatrix} 0 \\ bz \\ h(z) \end{Bmatrix} = G \quad \text{ROVNICE 1. ŘÁDU}}$$

JSOU VŠECHNY DR OBYČEJNÉ?

$\to t \in [0,T]$

Je-li neznámá funkce u závislá na více proměnných z nichž jedna může být čas t a ostatní jsou prostorové proměnné $x_1, \dots, x_d$, kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, a v DR se vyskytují parciální derivace fce u, např. $\frac{\partial u}{\partial t}$ nebo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$, atd., pak se daná DR nazývá parciální diferenciální rovnice (PDR) respektive systém PDR. Přesněji:

- je-li $u: \Omega \to \mathbb{R}$ resp. $u: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ mluvíme o skalární stacionární resp. evoluční PDR
- je-li $\vec{u}: \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, resp. $\vec{u}: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ mluvíme o systému stacionárních resp. evolučních PDR

Příklady (4) a) Poissonova rce

$$\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega}$$

$$-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{LINEÁRNÍ OPERÁTOR}$$

b) Rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega$$

kde $f: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ je daná funkce.

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1, x_2, \dots, x_d$
1. řádu vzhledem k t

c) Vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega$$

kde $f: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ je daná fce

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1, x_2, \dots, x_d$
2. řádu —"— k t

Oba evoluční diferenciální operátory

$L := \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ Tepelný operátor

jsou lineární

$L := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ d'Alembertův vlnový operátor $\square$.

(5) Navier-Stokesovy rovnice:

Neznámé: rychlost $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ a "tlak" p

$$v_i, p : (0,T)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$i=1,2,3$$

$$(NS)\quad \boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_1}{\partial x_k} - \Delta v_1 &= -\frac{\partial p}{\partial x_1}\\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_2}{\partial x_k} - \Delta v_2 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2}\\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_3}{\partial x_k} - \Delta v_3 &= -\frac{\partial p}{\partial x_3}\\
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0
\end{aligned}}$$

je systém (čtyř) nelineárních PDR, který je

stacionární pokud $\frac{\partial v_i}{\partial t}=0$ pro $i=1,2,3$

evoluční jinak.

Navier-Stokesovy rce, popisující proudění nestlačitelných tekutin (jako je voda) při standardních podmínkách, se obvykle píšou v kompaktním tvaru

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - \Delta \vec{v} &= -\nabla p\\
\operatorname{div} \vec{v} &= 0
\end{aligned}}$$

- Uvažujme ustálené (stacionární) proudění mezi dvěma deskami, kde se (v klidu) horní deska pohybuje konstantní rychlostí V (viz obrázek), dolní deska je). Hledejme řešení úlohy ve tvaru $\vec{v}=(u(x_2),0,0)$, $p=$ konst.

Pak dostame pro u úlohu:

$$\boxed{\begin{aligned}
u'' &= 0 \text{ v } (0,h)\\
u(0) &= 0\\
u(h) &= V
\end{aligned}}$$