Chemické a biologické modely popsané ODR 1. řádu

Reakční rychlost udává změnu produkce chemické látky způsobenou chemickou reakcí v izotermálním prostředí za jednotku času. Reakční rychlost je úměrná frekvenci/četnosti molekulárních srážek. Experimentální data ukazují, že tato frekvence/četnost srážek je úměrná součinu molárních koncentrací chemických látek, které do reakce vstupují. Zákon (pravidlo) působících hmot je tvrzení (fyzikální chemie), které říká, že:

(*) $\boxed{\text{Reakční rychlost se rovná (modulo násobení konstantou) součinu molárních koncentrací chemických látek.}}$

Příklady ① V případě chemické reakce „A produkuje P", kterou zapisujeme $\boxed{A \xrightarrow[k]{} P}$, kde A, P jsou chemické látky a k je konstanta vstupující do (*) a udávající rychlost produkce P z látky A, dostáváme rovnici

(1) $$\frac{dp}{dt} = ka,$$

kde malá písmena $a, p, x, \ldots$ značí molární koncentraci látek A, P, X, …, tj. počty molů látek A, P, X na jednotku objemu.

Z pohledu veličiny A (koncentrace a), reakce $A \xrightarrow[k]{} P$ má tvar

(1') $$\frac{da}{dt} = -ka,$$

což ve spojení s (1) dává

(1'') $$\frac{d}{dt}(p+a) = 0 \quad \Rightarrow \text{ součet koncentrací se nemění v čase}$$

② Pokud dvě molekuly A produkují P, tj. $2A \xrightarrow{k} P$, pak dostáváme

(2) $$\frac{dp}{dt} = ka^2 \quad a \quad \frac{da}{dt} = -2ka^2$$

③ Pokud látky A, B vstupují do chemické reakce, kterou vzniká P, tzn.

$\boxed{O_2 + O \rightarrow O_3}$

(3) $$A + B \xrightarrow[k]{} P$$

pak rovnice popisující změnu koncentrací a, b a p mají tvar

(3') $$\frac{dp}{dt} = kab, \quad \frac{da}{dt} = -kab \quad a \quad \frac{db}{dt} = -kab,$$

což implikuje

$$(3'') \qquad \frac{d}{dt}(2p+a+b)=0.$$

(4) V některých procesech (katalýza), chemická látka vstupuje do chemické reakce, ale zároveň se v ní i produkuje. Máme-li např. reakci

$$(4) \qquad A + X \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} 2X$$

pak, protože X je na obou stranách rovnice dostáváme

$$(4') \qquad \frac{dx}{dt} = k_1 a x - k_{-1} x^2.$$

Je-li $a>0$ ve velké koncentraci, lze ji považovat za konstantu a dostáváme

$$(4'') \qquad \frac{dx}{dt} = Cx(1-\lambda x).$$

Je výhodné převést rovnice do bezrozměrného tvaru. Pro typické konstantní hodnoty t_* a x_* časové škály a veličiny x definujeme nové proměnné $\tilde{t} := \frac{t}{t^*}$ a $\tilde{x} := \frac{x}{x^*}$. Odvodíme z (4'') rovnici pro $\tilde{x}(\tilde{t})$.

Protože
$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{x^*}\frac{dx}{d\tilde{t}} = \frac{1}{x^*}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{t^*}{x^*}\frac{dx}{dt} \overset{(4'')}{=} \frac{t^*}{x^*} Cx(1-\lambda x)$$
$$= t^* C\, \tilde{x}(1-\lambda x^* \tilde{x}) = \tilde{x}(1-\tilde{x}),$$
kde jsme položili $t^*C = 1$ a $\lambda x^* = 1$, tzn. $t^* = \frac{1}{C}$ a $x^* = \frac{1}{\lambda}$.

Rovnice v bezrozměrném tvaru

LOGISTICKÁ ROVNICE (4''') $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ neobsahuje žádné parametry modelu.

(5) V chemických rovnicích může vystupovat další katalyzátor Y:

$$(5) \qquad A+X \xrightarrow[k_1]{} 2X, \quad X+Y \xrightarrow[k_2]{} 2Y, \quad Y \xrightarrow[k_3]{} A$$

Pak zákon působících hmot dává

$$(5') \qquad \frac{dx}{dt} = k_1 a x - k_2 x y, \quad \frac{dy}{dt} = k_2 x y - k_3 y, \quad \frac{da}{dt} = k_3 y - k_1 a x$$

Tedy po sečtení

$$(5'') \qquad \frac{d}{dt}(x+y+a) = 0$$

Je-li $a>0$ ve výrazně větším množství, pak (5') se redukuje na rce

$$(5''') \qquad \boxed{\frac{dx}{dt} = Cx(1-\beta y) \quad \text{a} \quad \frac{dy}{dt} = k_2 y\left(x - \frac{k_3}{k_2}\right)}, \quad C, \beta, k_2, k_3 > 0$$

což je systém dvou rovnic 1. řádu. Systém (5''') je blízký LOTKA–VOLTERROVĚ RCI.

Některé procesy, jako radioaktivní rozpad nebo růst populace, nezahrnují chemické reakce, přesto je struktura rovnic, které tyto procesy popisují, podobná.

(6) Rovnice

(6) $\frac{dx}{dt} = ax$ kde a je rychlost změny x

je rovnice produkce/růstu pokud $\boxed{a>0}$, a
rovnice rozpadu/anihilace pokud $\boxed{a<0}$.

Je-li produkce x dána přítomností jiného materiálu y, pak

(6') $\frac{dx}{dt} = ay$

Je-li $b \in \mathbb{R}^+$ (konstanta), pak $\frac{dx}{dt} = b$ je rovnice pro růst/spotřeba s konstantní rychlostí.

Některé biologické procesy jsou popisovány schématicky/symbolicky s obecnými reaktanty, např. i komplikovaný proces je třeba popsán:

(6'') $\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned}}$

POROVNEJ S (6).

V případě, kdy $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad a \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0}$ systém (6'') popisuje aktivačně/inhibiční procesy,

neboť y inhibuje (způsobuje zánik/rozpad) x a
x aktivuje růst y.

V případě, kdy $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad a \quad \frac{\partial g}{\partial x} < 0}$ systém (6'') popisuje soutěživý systém, kdy se oba druhy vzájemně potlačují.

(7) Vývoj populace

(7i) Matematický model infekce bude sledovat tři disjunktní skupiny obyvatelstva: I označuje infikovaných, S označuje neinfikované, ale schopné infekci šířit a U označuje počet uzdravených. Model je založen na dvou postupových

(7) $S + I \xrightarrow{\beta} 2I$ a $I \xrightarrow{\gamma} U$, β... rychlost infekce

které vedou na následující systém 3 rovnic pro evoluci S, I a U:

$$(7') \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = -\beta S I, \quad \frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I \quad \text{a} \quad \frac{dU}{dt} = \gamma I}$$

Virová nákaza může být charakterizována počtem nenapadených X, počtem napadených Y a počtem virů V. Protože X je napaden virusem V, a V poté snižováním X, dostáváme

$$X + V \xrightarrow{\beta} Y.$$

Viry V se nezvyšují samy o sobě, ale rostou proporcionálně s Y. Růst X je konstantní a rychlost šíření nemoci je úměrná X. Podobně Y zaniká s počtem Y. Tedy:

$$(7'') \quad \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \lambda - \mu X - \beta X V \\ \frac{dY}{dt} &= \beta X V - \alpha Y \\ \frac{dV}{dt} &= kY - uV - \beta X V \end{aligned}$$

- Malthusův zákon = základní vztah pro populační dynamiku

$$(7''') \quad \frac{dN}{dt} = bN \qquad N \ldots \text{počet (obyvatel)}$$

Velmi dobrý model pro počáteční fázi. Chybný*) a pohled chování pro velké časové období. Víme, řešením $(7''')$ s $\boxed{N(0) = N_0 > 0}$ že

$$(7'''') \quad N(t) = N_0 e^{bt} \to +\infty \quad \text{pro } t \to +\infty.$$

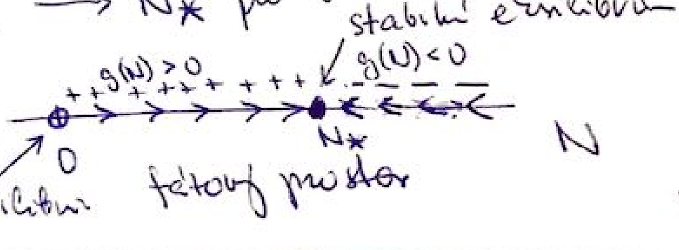
- Lepší model je tzv. logistická rovnice, kdy počet jedinců začne klesat jakmile N překročí kritickou hodnotu $N_* > 0$. Je-li $b > 0$ primární rychlost růstu v počáteční fázi, zadruhé $1 - \frac{N}{N_*}$ je inhibiční faktor, pak

$$(7''''') \quad \boxed{\frac{dN}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{N_*}\right) N \quad \text{s} \quad 0 < N_0 < N_*.}$$

DÚ: NAKRESLETE SI SMĚROVÉ POLE.

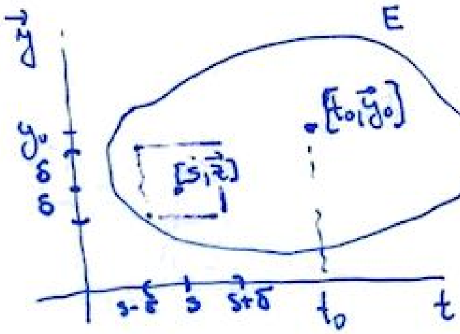
Metodou separovaných proměnných dostaneme

$$(7^6) \quad N(t) = \frac{N_* N_0}{N_0 + (N_* - N_0) e^{-bt}} \longrightarrow N_* \quad \text{pro } t \to +\infty$$



*) neodpovídající realitě.

7.3 ZÁKLADNÍ EXISTENČNÍ VĚTY



Uvažujme úlohu

$$(P)\qquad \boxed{\begin{aligned} \vec y\,' &= \vec f(t,\vec y) \\ \vec y(t_0) &= \vec y_0 \end{aligned}}$$

kde $t_0\in\mathbb{R}$, $\vec y_0\in\mathbb{R}^N$ a $\vec f=(f_1,\dots,f_N): \underset{\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N}{E} \to \mathbb{R}^N$ jsou data úlohy (počáteční čas, počáteční hodnota, pravá strana), přičemž

$$(t_0,\vec y_0)\in E \subsetneq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$$

kde E je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, tzn. že pro každý bod $(s,\vec z)\in E$ existuje $\delta>0$ tak, že $(s-\delta,s+\delta)\times B_\delta(\vec z)\subset E$,
kde $B_\delta(\vec z) := \{\vec y\in\mathbb{R}^N;\ |\vec z-\vec y|_{\mathbb{R}^N}<\delta\}$

Definice Řekneme, že funkce $\vec y:(a,b)\to\mathbb{R}^N$ je řešením Cauchyho (počáteční) úlohy (P) pokud $\vec y\,'(t) = \vec f(t,\vec y(t))$ pro všechna $t\in(a,b)$ a $\vec y(t_0)=\vec y_0$, kde $t_0\in(a,b)$.

Motivace studovat systémy ODR 1. řádu pramení jednak z mnoha aplikací (viz některé výše uvedené) a také z možnosti zapsat skalární diferenciální rov. k-tého řádu typu

$$(\text{odr})\qquad y^{(k)} = h(t,y,y',\dots,y^{(k-1)})$$

jako systém ODR 1. řádu. Stačí totiž označit

$$y_1 := y,\ y_2 := y',\ \dots,\ y_k := y^{(k-1)}$$

a pak

(odr)

$$y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ \dots,\ y_{k-1}' = y_k \ \text{ a } \ y_k' = h(t,y_1,\dots,y_k),$$

což je totéž jako $\boxed{\vec y\,' = \vec f(t,\vec y)}$, kde $\vec y = (y_1,\dots,y_k)^T$ a

$$\vec f(t,\vec y) = (y_2,y_3,\dots,y_k,h(t,y_1,\dots,y_k))^T.$$

Důležitý krok! zapamatovat!

Základní matematická teorie pro úlohu (P) je založena na dvou předpokladech kladených na funkci $\vec f$:

(P1) $\underline{\vec f : E \to \mathbb{R}^N \text{ je spojitá na otevřené množině } E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d}$

tzn. f je spojitá v každém bodě $(t_*, \vec z_*) \in E$

tzn. pro všechna $(t_*, z_*) \in E$ a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \forall (t, \vec z) \in (t_* - \delta, t_* + \delta) \times B_\delta(z_*)\ \|\vec f(t, \vec z) - \vec f(t_*, \vec z_*)\|_{\mathbb{R}^N} < \varepsilon$$

kde $B_\delta(z_*) := \{\vec z \in \mathbb{R}^N;\ \|\vec z - \vec z_*\|_{\mathbb{R}^N} < \delta\}$

a $\|\vec z\|_{\mathbb{R}^N} := \left(\sum_{i=1}^N z_i^2\right)^{1/2}$.

Podobně jako pro $h \in C(\langle \alpha, \beta \rangle)$ platí, že h je omezená na $\langle \alpha, \beta \rangle$, tak z (P1) plyne:

$$\left[\forall\, \sigma := \{\overset{\in E}{(t, \vec z)};\ t \in \langle t_0 - a, t_0 + a \rangle \text{ a } \|\vec z - \vec y_0\|_{\mathbb{R}^N} \le b\}\right.$$

$$\left. \exists M = M_\sigma > 0\ \forall (t, \vec z) \in \sigma\ \|\vec f(t, \vec z)\| \le M \right]$$

(P2) $\underline{\vec f : E \to \mathbb{R}^N}$ je na E lokálně lipschitzovská vzhledem k $\vec y$;

tzn. $\forall \sigma$ definované výše $\exists \lambda = \lambda_\sigma > 0$ tak, že

$$\forall\ (t, \vec y_1), (t, \vec y_2) \in \sigma \quad \|\vec f(t, \vec y_1) - \vec f(t, \vec y_2)\|_{\mathbb{R}^N} \le \lambda \|\vec y_1 - \vec y_2\|_{\mathbb{R}^N}$$

$\boxed{\text{Věta 7.2}}$ (Peanova věta o existenci)

Je-li splněn předpoklad (P1), pak $\underline{\exists \delta > 0}$ a $\underline{\vec y : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^N}$ řešící Cauchyho úlohu (P).

$\boxed{\text{Věta 7.3}}$ (Picard-Lindelöfova věta o existenci a jednoznačnosti)

Platí-li předpoklady (P1) a (P2), pak <u>existuje</u> <u>právě jedna</u> ($\exists!$) $\vec y : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^N$ řešící Cauchyho úlohu

$$\left[\ \delta := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}\ \right]$$

Obě věty dokážeme v Kapitole 9.

Příklad Uvažujme rce typu $y' = |y|^\alpha$, ($\alpha > 0$.) Pak $f(t,y) = g(y) := |y|^\alpha$ je sudá.
Zkoumejme, pro jaká α je $g(y)$ lipschitzovská.

Řešení Je-li $\alpha \geq 0$, pak $D_g = \mathbb{R}$. Navíc $g \in C(\mathbb{R})$ a tedy $g \in C([-A,A])$ a tak g je omezená na $[-A,A]$ pro $A>0$ libovolné, tzn. $\forall A>0\ \exists M = M_A$ $|g(y)| \leq M$ na $[-A,A]$.

Je-li $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in [-A,A]$, pak

(i) $$\left|\frac{g(y_1)-g(y_2)}{y_1-y_2}\right| \leq \frac{2M}{\delta}$$ pro $|y_1-y_2| > \delta$

(ii) $$\left|\frac{g(y_1)-g(y_2)}{y_1-y_2}\right| \simeq \left|g'(y_1)\right|$$ pro $|y_1-y_2| \leq \delta$, δ malé dostatečně

ale $|g'(y_1)| \leq \alpha |y_1|^{\alpha-1} \leq \alpha |A|^{\alpha-1}$ je-li $\alpha \geq 1$

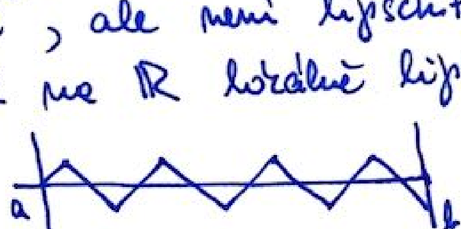
$\leq \dfrac{\alpha}{\epsilon^{1-\alpha}}$ je-li $\alpha \in (0,1)$ a $|y_1| \geq \epsilon$

Tedy: pro $\alpha \geq 1$, $g(y) = |y|^\alpha$ je lipschitzovská (na $[-A,A]$) s konstantou
$$\lambda := \max\left\{\frac{2M}{\delta}, \alpha |A|^{\alpha-1}\right\}.$$

: pro $\alpha \in (0,1)$, $g(y) = |y|^\alpha$ je lipschitzovská na $[\epsilon, A]$, $\epsilon > 0$,
s $$\lambda := \max\left\{\frac{2M}{\delta}, \frac{\alpha}{\epsilon^{1-\alpha}}\right\}.$$ ☒

Příklad. (i) Funkce, která je $C^1((a,b))$ je na (a,b) lokálně lipschitzovská

(ii) Funkce $g(y) = y^2$ je lipschitzovská na $\langle -A, A\rangle$ pro $A>0$ libovolné, ale není lipschitzovská na $\mathbb{R}$.
Je však na $\mathbb{R}$ lokálně lipschitzovská.

(iii) Funkce 

je na $\langle a,b\rangle$ lipschitzovská, ale není $C^1((a,b))$.

Uvažujme rovnici se separovanými proměnnými, tj.

$$y' = f(t)\,g(y).$$

Z Věty 7.3, a z předchozích příkladů plyne následující tvrzení.
z Věty 7.1

Tvrzení A Jsou-li $f \in C((t_0-\delta, t_0+\delta))$ a $g \in C((y_0-\Delta, y_0+\Delta))$, pak v bodě $[t_0, y_0]$ může dojít k větvení řešení pouze tehdy když

(i) $g(y_0) = 0$,

a

(ii) $g'(y_0)$ neexistuje resp. g není v okolí y_0 lipschitzovská.

Doplňme si obecnou teorii o ještě jedno tvrzení, které se týká nalepování řešení.

Tvrzení B (O nalepování řešení) Nechť $\vec{y}_1$ řeší $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ na (a,b) a $\vec{y}_2$ stejnou rovnici na (b,c) a navíc platí:

$$(*) \qquad \lim_{t\to b-} \vec{y}_1(t) = \lim_{t\to b+} \vec{y}_2(t) = \vec{z} \quad \text{a} \quad \vec{f} \text{ je spojité v } (b, \vec{z}),$$

pak

$$\vec{y}(t) := \begin{cases} \vec{y}_1(t) & \text{pro } t \in (a,b), \\ \vec{z} & \text{pro } t = b, \\ \vec{y}_2(t) & \text{pro } t \in (b,c), \end{cases}$$

je řešením $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$ na (a,c).

Dk Stačí dokázat $\vec{y}'(b) = f(b, \vec{z})$. Z $(*)$ dále plyne.

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{t\to b-} \vec{f}(t, \vec{y}_1(t)) & = & \vec{f}(b, \vec{z}) & = & \lim\limits_{t\to b+} \vec{f}(t, \vec{y}_2(t)) \\ \| & & & & \| \\ \lim\limits_{t\to b-} y_1'(t) & & & & \lim\limits_{t\to b+} y_2'(t) \\ \| & & & & \| \\ y_1'(b-) & & & & y_2'(b+), \end{array}$$

kde jsme využili věty o jednostranných derivacích. ▨

<u>Úvaha</u> (o nalepování řešení ODR $y' = g(y)$.)

Uvažujme rci $\boxed{y' = g(y)}$ a nechť bod $a \in \mathbb{R}$ je (nulový, kritický, rovnovážný, singulární) takový bod, kde $g(a) = 0$. Fce g je spojitá v okolí a.

Zkoumejme podrobněji co se děje když $g(y) \xrightarrow[(y \to a\pm)]{} g(a)$ pro $y \to a\pm$.

$$\xrightarrow{\quad} \; \xleftarrow{\quad}$$
$y<a \quad a \quad y>a$

Víme, že $\quad t = G(y(t)) + C \quad$ kde G je prim. fce k $\frac{1}{g(y)}$ na $(a, a+\Delta)$ resp. $(a-\Delta, a)$.

Definujme $\boxed{t^{\pm} := \lim_{y \to a\pm} G(y(t)) + C \in \mathbb{R}}$ a označme:

$y>a \qquad y^{+}(t) := G^{-1}(t-c)$

$y<a \qquad y^{-}(t) = G^{-1}(t-c)$

Z pohledu t^+ a t^- mohou nastat 4 možnosti:

- $t^+ \in \mathbb{R}$, $t^- \in \mathbb{R}$
- $t^+ \in \mathbb{R}$, t^- nevlastní
- $t^- \in \mathbb{R}$, t^+ —"—

$\Big\}$ $\Rightarrow$ <u>lze nalepit řešení</u> $\Big\}$ jen z jedné strany

- t^+, t^- nevlastní $\quad \} \Rightarrow$ nelze nalepit

Uvažujme

$$y'(t^{\pm}) = \lim_{t \to t^{\pm}} y'(t) = \lim_{t \to t^{\pm}} g(y(t)) = \lim_{y \to a^{\pm}} g(y) = g(a) = 0$$

<u>a</u> tedy lze spojit s konstantním řešením $y(t) \equiv a$.

Dá se ukázat, že pro g lipschitzovskou v okolí bodu a $(g(a)=0)$, platí: t^+ a t^- jsou nevlastní.

<u>Příklad</u> ① $y' = y^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\quad y \equiv 0$ řešení stacionární.

Pro $y>0$ $(y<1)$
$$G(y) = -\int_y^1 \frac{ds}{s^n} \underset{n \neq 1}{=} \left[-\frac{s^{1-n}}{1-n} \right]_y^1 = \frac{-1}{1-n} + \frac{1}{(1-n)y^{n-1}} \xrightarrow[y \to 0+]{n \geq 2} -\infty,$$
$$\underset{n=1}{=} -\left[\ln s \right]_y^1 = \ln y \xrightarrow[y \to 0+]{} -\infty.$$

② $y' = y^{2/3}$

Pro $y>0$ $(y<1)$
$$G(y) = -\int_y^1 \frac{ds}{s^{2/3}} = -\left[3 s^{1/3} \right]_y^1 = -3 + y^{1/3} \xrightarrow[y \to 0+]{} 3 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

EULEROVA (numerická, aproximativní, přibližná) METODA TEČEN

Cílem je přibližně vyřešit libovolnou úlohu

$$\boxed{\begin{array}{ll}(P) & \vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}) \quad v\ [t_0,T] \\ & \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0\end{array}}$$

Rozdělme interval $[t_0,T]$ na N dílků (intervalů) ne nutně stejné délky

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$$

a nechť

$$h_n := t_n - t_{n-1} \qquad n = 1,\ldots,N$$

Předpokládejme, že pro $n = 1,\ldots,N$ známe přibližné řešení v čase t_{n-1}. Toto řešení označme $\vec{y}_{n-1}$ (očekáváme $\vec{y}_{n-1} \doteq \vec{y}(t_{n-1})$). Pro $n=1$ je tento předpoklad splněn: $\vec{y}_0 = \vec{y}_0$ (počáteční podmínka).

Rozviňme řešení $\vec{y}(t)$ v bodě t_n do Taylorova polynomu v bodě t_{n-1} Tj.

$$\vec{y}(t_n) = \vec{y}(t_{n-1}) + \vec{y}\,'(t_{n-1})\underbrace{(t_n - t_{n-1})}_{h_n} + O((t_n - t_{n-1})^2)$$

$$\stackrel{(P)}{=} \vec{y}(t_{n-1}) + \vec{f}(t_{n-1},\vec{y}(t_{n-1}))\,h_n + O\Big(\big(\underbrace{t_n - t_{n-1}}_{h_n}\big)^2\Big)$$

Pro $h_n \ll 1$, lze "očekávat", že $O(h_n^2)$ bude velmi malé, ale mohu jej zanedbat. Tak

$$\vec{y}(t_n) \approx \vec{y}(t_{n-1}) + \vec{f}(t_{n-1},\vec{y}(t_{n-1}))\,h_n$$

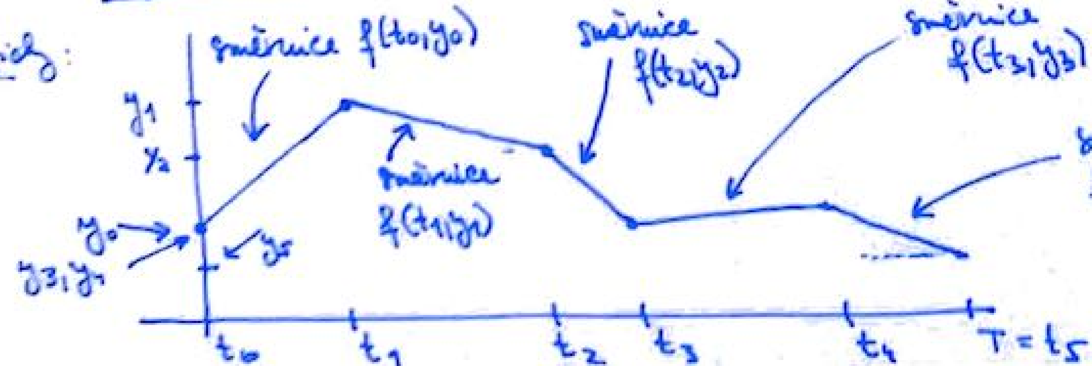
Dostávám tedy algoritmus:

EXPLICITNÍ EULER

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{y}_0 = \vec{y}_0 \text{ (poč. podmínka)} \\ \vec{y}_n = \vec{y}_{n-1} + \vec{f}(t_{n-1},\vec{y}_{n-1})\,h_n\end{array}}$$

kde $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^N$ jsou přibližné hodnoty aproximující $\vec{y}(t_n)$.

Graficky:



$N = 5$

Příklad (1) Pomocí Eulerovy metody tečen určete přibližné řešení úlohy

$$\boxed{y' = t\sqrt{y} \quad s \quad y(1) = 4}$$

v bodech $t = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$, a 1.5. Dělení volte ekvidistantně s délkou kroku $h = 0.1$.

Řešení

$y_0 = 4$

$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\overbrace{0{,}1}^{h} = 4 + 2 \cdot (0{,}1) = 4.2$

$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\, 0.1 = 4.2 + (1{,}1)\sqrt{4{,}2}\; 0{,}1 \doteq 4{,}42543$

$y_3 = \qquad \doteq 4{,}67787$

$y_4 = \qquad \doteq 4{,}95904$

$y_5 = \qquad \doteq 5.27081$

zatímco přesná hodnota řešení v $t = 1{,}5$ je $\boxed{5.34766}$

(2) Pomocí Eulerovy metody tečen najděte přibližné řešení

$y' = y$, $y(0) = 1$ v bodě $x = 1$

tak, že budete dělit interval $\langle 0, 1 \rangle$ na $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^k, \dots$ dílků.

[Cíl: hledám stále lepší aproximaci čísla e.]

Řešení

$\boxed{k=1}$ $y_1 = 1 + 1 \cdot 1 = 2 \doteq e$

$\boxed{k=2}$ $y_1 = 1 + 1 \cdot (0{,}5) = 1{,}5$ $\qquad \underset{e}{\overset{\doteq}{y_2}} = 1{,}5 + 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 2{,}25$

$\vdots$

$\boxed{k=4}$ $\qquad y_4 = 2{,}44141$

$\boxed{k=8}$ $\qquad y_8 = 2{,}56578$ $\qquad$ PŘESNÁ HODNOTA

$\boxed{k=16}$ $\qquad y_{16} = 2{,}63793$ $\qquad$ [$e = 2{,}71828\dots$]

$\vdots$

Další obecnou, ale technicky náročnou a "nepřehlednou" metodou pro řešení DR je metoda hledání řešení pomocí rozvojů do mocninných řad. Výhoda spočívá v její obecnosti, lze užít i na PDR, lze algoritmizovat.
Nevýhoda spočívá, kromě pracnosti, v požadavku, aby koeficienty rovnice byly v okolí t_0 reálně analytické, tzn. existovalo okolí $(t_0-\Delta, t_0+\Delta)$, kde se koeficienty rovnice dají rozvinout do mocninné řady se středem v t_0 a poloměr Δ. Metoda těží z vlastností analytických funkcí, které jsou uzavřeny na sčítání, násobení, skládání, derivování.

Obecné schéma: Uvažujme lineární ODR 2. řádu

$$(*) \qquad Ly = a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t) = 0 \qquad (\text{nebo } f(t))$$

a předpokládejme, že

$$(**) \begin{cases} a_i \text{ lze reprezentovat pomocí mocninných řad s poloměrem} \\ \text{konvergence } R \text{ a středem v } 0 \end{cases}$$

Pokud $a_2(t) \neq 0$ v $(-R,R)$ tak existují dvě lineárně nezávislá řešení (báze), která jsou navíc (reálně) analytická v $(-R,R)$. Označme tato řešení y_1, y_2. Pak obecné řešení $(*)$ je lineární kombinací y_1, y_2.

dáno Buď y analytické řešení $(*)$. Hledejme jej tedy ve tvaru

$$(***) \qquad y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j$$

Cílem je určit koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$

Protože

$$(***)_1 \begin{cases} y'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\alpha_{j+1} t^j \\ \text{a} \\ y''(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)\alpha_{j+2} t^j, \end{cases}$$

tak rozvojem funkcí a_0, a_1, a_2 do mocninných řad a po dosazení těchto řad a řad $(***)$ a $(***)_1$ do $(*)$ upravíme na tvar

$$Ly(t) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \ t^j = 0,$$

kde d_j jsou výrazy obsahující některé z (neznámých) koeficientů α_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Požadavek

$$d_j = 0 \qquad j = 0, 1, \dots$$

dostaneme systém algebraických rovnic, které se snažíme vyřešit vzhledem k $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$. Příklady mohou situaci lépe ilustrovat.

Příklad 1 Uvažujme úlohu

(e) $$\boxed{y' = y \quad \wedge \quad y(0) = 1}$$

[Cíl: hledejme řešení pomocí mocninných řad.] Předpokládejme, že

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j. \quad \text{Pak} \quad y'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} t^j$$

Zároveň z počáteční podmínky plyne

$$\boxed{a_0 = 1}$$

Po dosazení mocninných řad do (e) dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left((j+1) a_{j+1} - a_j\right) t^j = 0,$$

což dává

$$(j+1) a_{j+1} - a_j = 0 \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

tj.

$$\boxed{a_{j+1} = \frac{a_j}{j+1} = \dots = \frac{a_0}{(j+1)!} \qquad j = 0, 1, 2, \dots}$$

a tak

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \left(= e^t\right).$$

Příklad 2 (Besselova rovnice) Nechť $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uvažujme úlohu

(b) $$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

Cíl: nalézt obecné řešení metodou rozvoje do mocninných řad.

Řešení: Hledejme řešení ve tvaru $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Protože $$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \Rightarrow x y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

a $$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \Rightarrow x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

tak z (b):

$$\boxed{-n^2 a_0 + a_1 (1 - n^2) x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(k(k-1) a_k + k a_k - n^2 a_k + a_{k-2} \right) x^k = 0}$$

což dává
$$\boxed{n^2 a_0 = 0} \quad \boxed{(1-n^2)a_1 = 0} \quad a \quad \boxed{(k^2-n^2)\,a_k + a_{k-2} = 0} \quad \forall k \geq 2$$

Následuje diskuse v závislosti na $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

▶ $\boxed{n=0}$ $\Rightarrow$ $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, $a_1 = 0$ a také $a_{2\ell+1} = 0$ $\ell \in \mathbb{N}$

a $$a_{2\ell} = -\frac{a_{2\ell-2}}{(2\ell)^2}$$

Tedy
$$\boxed{y(x) = a_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(\ell!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell}}$$

▶ $\boxed{n=1}$ $\Rightarrow$ $a_0 = 0$, $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné

$\forall \ell \in \mathbb{N}$ $a_{2\ell} = 0$, $$a_{2\ell+1} = -\frac{a_{2\ell-1}}{(2\ell+1)^2-1} = -\frac{a_{2\ell-1}}{4\ell(\ell+1)}$$

Tedy
$$y(x) = 2a_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(\ell+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell+1}$$

▶ $\boxed{n \geq 2}$ $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_{n-1} = 0$, $a_n \in \mathbb{R}$ libovolné.

Pak $a_{n+2\ell-1} = 0$ a $$a_{n+2\ell} = -\frac{a_{n+2\ell-2}}{(2\ell+n)^2 - n^2} = -\frac{a_{n+2\ell-2}}{4\ell(\ell+n)}$$

Tedy
$$y(x) = n!\, 2^n a_n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(\ell+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\ell}$$

Normalizací $a_n = \frac{1}{n!\,2^n}$ (i pro $n = 0, 1, \dots$)

dostáváme
$$\boxed{y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(\ell!)(\ell+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\ell}}$$

KANONICKÝ TVAR BESSELOVÝCH FUNKCÍ 1. DRUHU