NOFY152, LS 2019-2020 Teoretická část zkouškové písemné práce 25. června 2020

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1. Uvažujte posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1. část

(1) Zadefinujte pojmy *řada* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* a *řada* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverguje*.

(2) Je-li speciálně $a_n = \alpha q^n$, kde $\alpha, q \in (0, \infty)$: za jakých podmínek na tyto dva parametry odpovídající řada konverguje respektive diverguje? Dokažte. O jakou řadu se jedná?

(3) Zformulujte D'Alembertovo podílové a limitní podílové kritérium jak pro konveregenci tak pro divergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Všechna tvrzení dokažte.

4b

Uvažujte nyní posloupnost funkcí komplexní proměnné $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(z) := a_n(z - z_0)^n$ s a_n, z, $z_0 \in \mathbb{C}$.

2. část

(4) Jak se uvedená řada funkcí nazývá? Zadefinujte pojmy *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ***konverguje absolutně*** a *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje neabsolutně*.

(5) Vysvětlete, kdy a kde tato řada konverguje respektive diverguje a zda je konvergence absolutní respektive neabsolutní. Lze rozhodnout o konvergenci řady na základě limitního chování podílu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$? Všechna tvrzení dokažte.

(6) Mohou existovat $z \in \mathbb{C}$, kde řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n z$ konverguje neabsolutně? Pokud ano, kde tyto body leží?

4b

(7) Pro $z \in \mathbb{C}$ zadefinujte funkce $\sin z$ a $\cos z$. Ukažte, čemu se rovná výraz $\cos z + i \sin z$ pro $z \in \mathbb{C}$?

$\boxed{\text{Řešení}}$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONV $\equiv \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}_0^+ (\cancel{\text{nebo } \mathbb{C}})$ kde $s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k$ 1b

$\sum a_n$ DIV $\equiv \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$

(2) Protože $\underbrace{\alpha(1+q+\ldots+q^m)}_{s_n := \sum_{k=0}^{m} \alpha q^k}(1-q) = \alpha(1-q^{m+1})$ tak $s_m = \alpha \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \Rightarrow s_m \to \alpha \frac{1}{1-q}$ pro $q \in (0,1)$

GEOMETRICKÁ

$s_n \to +\infty$ pro $q > 1$

Pro $q = 1$, řada diverguje. 1b

(3) (i) IF $\exists q \in (0,1)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro $\forall n \geq n_0$, THEN $\sum a_n$ KONV

(ii) If $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro $\forall n \geq n_0$, THEN $\sum a_n$ DIV

0.5b

0.5b

(iii) If existuje $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum a_n$ KONV

(iv) If —"— $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum a_n$ DIV.

Z předpokladů plynou předpoklady předchozí věty – NAMALOVAT jak! to dokazuje (iii) a (iv)

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ pro $n \geq n_0$: $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \leq q^{n-n_0} a_{n_0}$ 0.5b

Protože $a_{n+1} \geq 0$ a $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n_0} q^{n-n_0}$ KONV, tak $\sum a_n$ KONV.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ $a_{n+1} \geq a_{n_0} > 0$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim a_{n+1}$ není rovna 0

$\Rightarrow$ NUTNÁ PODMÍNKA

Řada DIVERGUJE. 0.5b

NOFY152, LS 2019-2020 Teoretická část zkouškové písemné práce 25. června 2020

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1. Uvažujte posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4

(1) Zadefinujte pojmy *řada* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* a *řada* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverguje*.

(2) Je-li speciálně $a_n = \alpha q^n$, kde $\alpha, q \in (0, \infty)$: za jakých podmínek na tyto dva parametry odpovídající řada konverguje respektive diverguje? Dokažte. O jakou řadu se jedná?

(3) Zformulujte D'Alembertovo podílové a limitní podílové kritérium jak pro konveregenci tak pro divergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Všechna tvrzení dokažte.

Uvažujte nyní posloupnost funkcí komplexní proměnné $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(z) := a_n(z - z_0)^n$ s a_n, z, $z_0 \in \mathbb{C}$.

4

(4) Jak se uvedená řada funkcí nazývá? Zadefinujte pojmy *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje absolutně* a *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje neabsolutně*. 0.8

(5) Vysvětlete, kdy a kde tato řada konverguje respektive diverguje a zda je konvergence absolutní respektive neabsolutní. Lze rozhodnout o konvergenci řady na základě limitního chování podílu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$? Všechna tvrzení dokažte. 1.2 → 1

(6) Mohou existovat $z \in \mathbb{C}$, kde řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konverguje neabsolutně? Pokud ano, kde tyto body leží? 0.7

(7) Pro $z \in \mathbb{C}$ zadefinujte funkce $\sin z$ a $\cos z$. Ukažte, čemu se rovná výraz $\cos z + i \sin z$ pro $z \in \mathbb{C}$? 0.8

0.3

Řešení II. část

(4) MOCNINNÁ Ř. , ABS. KONV $\equiv \sum |f_n(z)| < \infty$

0.2 NEABS. -"- $\equiv \sum f_n(z)$ KONV a $\sum |f_n(z)| = +\infty$.

0.3

(5) $\exists R \in [0, +\infty]$ tak, že 0.4

$\sum f_n(z)$ ~~ABS~~ KONV. ABSOLUTNĚ na $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0|_{\mathbb{C}} < R\}$ 0.4

NEKONVERGUJE na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)}$

Pokud $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existuje, vlastní, pak je tato limita rovna $\frac{1}{R}$ 0.4

Dk. • $\sum a_n (z - z_0)^n$ KONV (ABS.) pokud $\lim \frac{|a_{n+1}| |z - z_0|^{n+1}}{|a_n| |z - z_0|^n} < 1$ tj. 1

$|z - z_0| \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \iff |z - z_0| < \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = R$

• Naopak pro $|z - z_0| > R$ je $\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = |z - z_0| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > R \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \frac{1}{R}$ v limitě.

(6) Leží na konvergenční kružnici: 0.5

např. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ v $z = 1$ nek.

$z = -1$ konv., ale ne absolutně.

sudé/liché

(7) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$

$\cos z + i \sin z \overset{z \in \mathbb{C}}{=} \exp iz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} =$

0.5

[8] 2. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y' = f(y), \qquad \text{kde } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

(1) Je tato obyčejná diferenciální rovnice lineární nebo nelineární? Pečlivě odůvodněte.

(2) Zadefinujte pojem stacionárního řešení. Jak poznáte z tvaru rovnice (1), zda rovnice má stacionární řešení?

(3) Napište definici: funkce f uvedená v rovnici (1) je na intervalu $[-R, R]$ pro $R > 0$ lipschitzovská (respektive lipschitzovsky spojitá).

(4) Nechť speciálně $f(y) = y^2$, kde $y \in \mathbb{R}$. Je tato funkce lipschitzovská na intervalu $[-R, R]$ pro $R > 0$?

(5) Nechť speciálně $f(y) = y^{\frac{2}{3}}$, kde $y \in \mathbb{R}$. Je tato funkce lipschitzovská na intervalu $[-R, R]$ pro $R > 0$?

(6) Zformulujte Picard-Lindelöfovu větu pro rovnici (1).

(7) Pro $f(y) = y^2$, $y \in \mathbb{R}$, najděte všechna maximální řešení rovnice (1) splňující $y(0) = 1$. Kolik takových řešení existuje a na jakém intervalu jsou definovány?

Řešení: $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Rovnice je lineární je pokud $f(y) = a(x)y + b(x)$. Pak totiž 1b
$Ly := y' - a(x)y$ splňuje $L(y_1+y_2) = Ly_1 + Ly_2$ a $L(\alpha y) = \alpha Ly$.
Jinak je rovnice (1) nelineární. 0.5b

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Stac. řeš. $y(x) = y_* \ \forall x \in \mathbb{R}$ kde $y_* \in \mathbb{R}$ splňuje $f(y_*) = 0$
0.5 0.5

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ $\exists \lambda > 0 \ (=\lambda_R) \ \forall y_1, y_2 \in [-R, R] \quad |f(y_1) - f(y_2)| \le \lambda |y_1 - y_2|$ 1b

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| \le (|y_1| + |y_2|)|y_1 - y_2| \le 2R|y_1 - y_2|$ 1b
ANO

$\boxed{\text{Ad (5)}}$ NE neboť pro $y_1 \to y_2$ je $\dfrac{y_1^{2/3} - y_2^{2/3}}{y_1 - y_2} \to \left(y_1^{2/3}\right)' = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{y_1^{1/3}} \to \pm\infty$ ($y \to 0$)

1b tedy v okolí 0 není šance konstantu Lipschitzovskosti nalézt.

$\boxed{\text{Ad (6)}}$ Je-li f splňuje podmínku Lipschitzovskosti (3), tj. lokálně lipschitzovská v $\mathbb{R}$, 1b
pak $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ ($\forall y_0 \in \mathbb{R}$) $\exists \delta$ a $\underline{\exists!}$ $y : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ řešení (1) s poč. podmínkou $y(t_0) = y_0$

$\boxed{\text{Ad (7)}}$ $\boxed{y' = y^2 \wedge y(0) = 1} \underset{y \ne 0}{\iff} \dfrac{y'}{y^2} = 1 \wedge y(0) = 1 \iff \left(-\dfrac{1}{y}\right)' = (x + C)' \wedge y(0) = 1$
$y \equiv 0$ stac. řeš.

Po integraci od 0 do x: $-\dfrac{1}{y(x)} + \dfrac{1}{1 = y_0} = x \iff y(x) = \dfrac{1}{1 - x}$. 1,5b

Toto řešení existuje na $(-\infty, 1)$ a je tady jediné.

[8] 3.
- Uveďte metrickou definici (=definici založenou na pojmu konvergence) kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}^d$. [1]
- Dokažte, vycházeje z této definice a pojmu spojitosti funkce, že platí: *Obraz kompaktní množiny při spojitém zobrazení je kompaktní množina.* [3]
- Jaké další vlastnosti platí pro spojité funkce na kompaktních množinách v $\mathbb{R}^d$? Vlastnosti zadefinujte, tvrzení nedokazujte. 1,5
- Zadefinujte prostor ℓ^2 a shrňte jeho základní vlastnosti (zejména ty týkající se linearity, skalárního součinu, normy, metriky, dimenze). Speciálně: zadefinujte jednotkovou kouli v prostoru ℓ^2. Je uzávěr této koule kompaktní v ℓ^2? 2,5

0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

Řešení

- K je komp. $\equiv \forall \{x_n\} \subset K \ \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}$ a $\exists\, x \in K : x_{n_k} \to x$ v $\mathbb{R}^d$ 1
- $\underline{f(K) = f[K]}$ je kompakt (je-li $K \subset \mathbb{R}^d$ kompt.)

Dk $\{y^n\}_{n=1}^{\infty} \subset f[K] \Rightarrow \exists \{x^n\} \in K : f(x^n) = y^n$

Protože K je kpt: $\exists \{x^{n_k}\} \subset$ a $x \in K$: $x^{n_k} \to x$ v $\mathbb{R}^d$

f spojitá (Heine): $\underset{= y^{n_k}}{f(x^{n_k})} \to f(x) \in f[K]$

Tedy máme vybranou podposloupnost $y^{n_k} := f(x^{n_k})$, která konverguje k $f(x) =: y$ a $y \in f[K]$.

Tedy $f(K)$ je komp.

- $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ komp. $\Rightarrow$ f je omezená na K ($\exists M > 0 \ |f(x)| \le M \ \forall x \in K$)

$\Rightarrow$ f je stejnoměrně spoj. na K: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall x', x'' \ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ f nabývá v K maxima/minima $\equiv \exists\, x_{MIN}, x_{MAX} \in K$ tak, že $f(x_{MIN}) \le f(y) \ \forall y \in K$ a $f(x_{MAX}) \ge f(y) \ \forall y \in K$.

$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$

- ℓ^2 – lineární
  - Hilbertův $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$
  - normovaný $\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$
  - metrický $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$
  - úplný

$B^1_{\ell_2}(0) := \left\{ x \in \ell_2 ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < 1 \right\}$

$x^n \in \ell_2 : x_i^n = (\delta_{in}, \dots)$ nelze vybrat konv.