

# §8 FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

## 8.1 Prostor $\mathbb{R}^d$

Bud'  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 2$ . Prostorem  $\mathbb{R}^d$  rozumíme všechny možné  $d$ -tice reálných čísel, tzn.

$$\mathbb{R}^d := \{ (x_1, \dots, x_d); x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i=1, 2, \dots, d \}.$$

Prvky  $\mathbb{R}^d$  se bud' značí tučně  $\mathbf{x}$ , nebo se súprou  $\vec{x}$ , nebo s vlnovkou  $\underline{x}$ , nebo se píšě  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  či  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ .

Víme z LA, že  $\mathbb{R}^d$  je vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{R}$ ,

kde  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \stackrel{\text{df}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$  pro  $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$\lambda \mathbf{x} \stackrel{\text{df}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$   $x = (x_1, \dots, x_d)$   
 $y = (y_1, \dots, y_d)$

Tak  $(\mathbb{R}^d, +)$  je Abelova grupa s nulovým prvkem  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ .

Na rozdíl od  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ , na  $\mathbb{R}^d$  není definován součin, který by z  $\mathbb{R}^d$  vytvořil těleso.

"Jistým" obecněním součinu na  $\mathbb{R}$  je skalární součin  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ , který však  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$  nepřivádí prvek z  $\mathbb{R}^d$ , ale číslo.

Def. Bud'  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ , pak  $\sum_{i=1}^d x_i y_i$  se nazývá skalární součin  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ .

Píšeme  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^d x_i y_i \stackrel{\text{Einsteinova sumační konvence}}{=} x_i y_i$  či  $(\vec{x} | \vec{y}) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$

**Věta 8.1** (Vlastnosti skalárního součinu) Platí:

(S1) Pro každé  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  a  $\vec{y} \in \mathbb{R}^d$  a pro každé  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2 | \vec{y}) = \alpha (\vec{x}_1 | \vec{y}) + \beta (\vec{x}_2 | \vec{y})$$

**LINEARITA**

(S2) Pro každé  $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d$ :

$$(\vec{x}_1 | \vec{x}_2) = (\vec{x}_2 | \vec{x}_1)$$

**SYMETRIE**

(S3) Pro každé  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ :  $(\vec{x} | \vec{x}) \geq 0$

$$\text{a } (\vec{x} | \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

(D4) plyne přímo z definice.

Definujeme zobrazení  $|\cdot|_E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  předpisem

$$|\vec{x}|_E = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}$$

Euklidovská

norma  
indukovaná  
skalárním  
součinem

Platí:

**Věta 8.2** ( $|\cdot|_E$  splňuje vlastnosti normy) Platí:

(N1)  $|\vec{x}|_E \geq 0$  pro  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$  a  $|\vec{x}|_E = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$  NEZÁPORNOST NORMY

(N2) Pro libovolné  $\lambda \in \mathbb{R}$  a  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ :  $|\lambda \vec{x}|_E = |\lambda| |\vec{x}|_E$  1-HOMOGENITA

(N3) Pro každé  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ :  $|\vec{x} + \vec{y}|_E \leq |\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E$  Δ-NEROVNOST

Také platí Cauchy-Schwarzova nerovnost:

(C-S) Pro každé  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ :  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}|_E |\vec{y}|_E$   
přičemž rovnost nastane právě když  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  jsou  $\perp$ .

lineární  
závislé

(Dě) • (N1) a (N2) plyne z definice  $(\vec{x}, \vec{y})$  a (S3).

• **Ad (C-S)** • Je-li  $\vec{y} = \vec{0}$ , pak  $(\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{x}, \vec{0} + \vec{0}) = (\vec{x}, \vec{0}) + (\vec{x}, \vec{0})$   
a tedy  $(\vec{x}, \vec{0}) = 0$ .

Tedy (C-S) platí pro  $\vec{y} = \vec{0}$ .

• Je-li  $\vec{y} \neq \vec{0}$ , pak  $|\vec{y}|_E \neq 0$  a máme pro  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$  libovolné:

(\*)  $0 \leq (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = |\vec{x}|_E^2 + 2t(\vec{x}, \vec{y}) + t^2|\vec{y}|_E^2 = f(t)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{y}|_E^2}$  a pro toto  $t$  dostáváme z (\*):

$$0 \leq |\vec{x}|_E^2 - \frac{2(\vec{x}, \vec{y})^2}{|\vec{y}|_E^2} + \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{|\vec{y}|_E^2} = |\vec{x}|_E^2 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{|\vec{y}|_E^2}$$

což dává (C-S).

Jsou-li  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  lineárně nezávislé, pak  $\vec{x} + t\vec{y} \neq \vec{0}$ , a první nerovnost v (\*) je ostrá. Jsou-li naopak  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  lineárně závislé, pak

$\vec{x} = s\vec{y}$  a

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = |(s\vec{y}, \vec{y})| = |s| |(\vec{y}, \vec{y})| = |s| |\vec{y}|_E^2 = |s| |\vec{y}|_E |\vec{y}|_E = |s| |\vec{y}|_E |\vec{y}|_E = |\vec{x}|_E |\vec{y}|_E,$$

a rovnost v (C-S) platí.

- Zbývá dodat  $\Delta$ -normu. Využijeme-li (e-s) normu,

maže

$$\begin{aligned} |\vec{x} + \vec{y}|_E^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &\stackrel{e-s}{\leq} |\vec{x}|_E^2 + 2|\vec{x}|_E|\vec{y}|_E + |\vec{y}|_E^2 \\ &= (|\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E)^2, \end{aligned}$$

což dává (N3).

Pozorování (1) Ukažte, že skalární součin v  $\mathbb{R}^d$  je invariantní vzhledem k otočení (reprezentovaným ortogonální maticí  $Q$ , splňující  $QQ^T = I$ ).

Rěšení Pro  $\vec{x}^* = Q\vec{x}$ ,  $\vec{y}^* = Q\vec{y}$  platí:

$$(\vec{x}^*, \vec{y}^*) = (Q\vec{x}, Q\vec{y}) = \sum_{i=1}^d \underbrace{Q_{is} x_s}_{\text{sumární součet}} \underbrace{Q_{ik} y_k}_{\text{(sčítání přes } s, k \text{ od 1 do } d)}$$

definice transponované matice

$$= \sum_{i=1}^d (Q^T)_{si} Q_{ik} y_k x_s$$

$$Q^T Q = I \quad \sum_{s=1}^d y_k x_s = \sum_{k=1}^d y_k x_k$$

$$= (\vec{x}, \vec{y}).$$

(2) Buď  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ ,  $|\vec{x}|_E = |\vec{y}|_E = 1$ . Paž vhodným pootočením lze ztotožnit  $\vec{x}$  s vektorem  $(1, 0, \dots, 0)$  a vektor  $\vec{y}$  umístít do roviny dané vektory  $(1, 0, \dots, 0)$  a  $(0, 0, \dots, 1)$

Paž (viz obrázek)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = y_1 = \cos \theta,$$

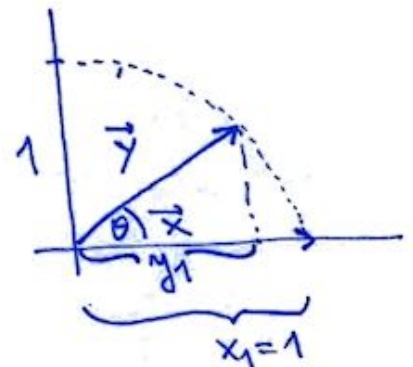
kde  $\theta$  je úhel sevřený mezi vektory  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ .

Pro libovolné  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^d$ , paž

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|_E} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|_E} = \cos \theta, \text{ což implikuje}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \theta |\vec{u}|_E |\vec{v}|_E.$$

viz Pozorování (1)



Pomocí normy lze definovat vzdálenost (neboli metriku)

$$\text{dist}_E(\vec{x}, \vec{y}) := |\vec{x} - \vec{y}|_E.$$

Platí:

**Věta 8.3** (Vlastnosti metriky)

(M1)  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d: \text{dist}_E(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$  a  $\text{dist}_E(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$  NEZÁPORNOST

(M2)  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d: \text{dist}_E(\vec{x}, \vec{y}) = \text{dist}_E(\vec{y}, \vec{x})$  SYMETRIE

(M3)  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^d: \text{dist}_E(\vec{x}, \vec{z}) \leq \text{dist}_E(\vec{x}, \vec{y}) + \text{dist}_E(\vec{y}, \vec{z})$   $\Delta$ -CVA NEROVNOST

(D2) (Mi) plynou z (Ni) ve Věte 9.2.  $\blacksquare$

Zobecněné struktury

pre-Hilbertův prostor neboli prostor se skalárním součinem je jakýkoliv vektorový prostor  $H$ , na kterém je definováno zobrazení

$$(\cdot, \cdot)_H: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

splňující (S1)-(S3), tj. linearitu, symetrii a nezápornost.

Příklad 1 Uvažujme prostor  $l_2 := \{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$  a definujme pro  $x, y \in l_2$  tak.  $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  a  $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$(x, y)_H := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

Paž  $(l_2, (\cdot, \cdot)_H)$  je pre-Hilbertův. Overte.

2) Uvažujme  $R(a, b)$  prostor Riemannovských integrovatelných funkcí na  $(a, b)$ . Ukaže, že  $R(a, b)$  je vektorový prostor.

Pro  $f, g \in R(a, b)$ , definujme

$$(f, g)_H := \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Q: Proč není  $(f, g)_H$  skalárním součinem na  $R(a, b)$ ?

Vždy lze v pre-Hilbertově prostoru definovat  $\|\cdot\|_H: H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  předpisem

$$\|u\|_H := \sqrt{(u, u)_H}$$

jednoduše.

Pak  $\|\cdot\|_H$  splňuje vlastnosti (N1) a (N2). Opakujeme-li důkaz (C-S) nerovnosti a následně  $\Delta$ -nerovnosti úplně stejně jako v lemmě 8.2, pozorujeme, že

$\|\cdot\|_H$  je norma na prostoru  $H$ .

Přidáme, že  $\|\cdot\|_H$  je norma indukovaná skalárním součinem

**Normovaný prostor**

Je-li  $X$  vektorový prostor, na kterém existuje zobrazení  $\|\cdot\|_X: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  splňující (N1)–(N3), pak  $(X, \|\cdot\|_X)$  se nazývá normovaný prostor

Příklad 1 Prostor  $C(\langle a, b \rangle)$  je vektorový prostor  $\infty$ -dimenze neboť  $x^k \in C(\langle a, b \rangle), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a se vztahem  $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i = 0$  pro  $\forall x \in \langle a, b \rangle$  plyne  $\lambda_i = 0$  a tak  $\{1, x_1, \dots, x^k, \dots\}$  jsou lineárně nezávislé.

Definujeme  $\|f\|_{C(\langle a, b \rangle, \max)} := \|f\|_{\infty} := \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x)|$

Pak  $\|f\|_{\infty}$  je norma, Ověřte, a prostor

$(C(\langle a, b \rangle), \|\cdot\|_{\infty})$  je normovaný prostor.

2) Definujeme-li na stejném prostoru

$$\|f\|_{C(\langle a, b \rangle, \text{int})} := \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx,$$

pak  $\|f\|_1$  je na  $C(\langle a, b \rangle)$  opět norma.

Prostor  $(C(\langle a, b \rangle), \|\cdot\|_1)$  je opět normovaný prostor.

nepřidělané, u dne  $n \rightarrow +\infty$

Tvrzení Buď  $H$  vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$ , na kterém je definován skalární součet  $(\cdot, \cdot)_H: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

(S1) $_{\mathbb{C}}$   $\forall x_1, x_2 \in H$  a  $y \in H$  a  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y)_H = \alpha(x_1, y)_H + \beta(x_2, y)_H$$

(S2) $_{\mathbb{C}}$   $\forall x, y \in H$ :  $(x, y)_H = \overline{(y, x)_H}$  kde  $\bar{z} := z_1 - iz_2$   
 $\text{nebo } \bar{z} = z_1 + iz_2$

(S3) $_{\mathbb{C}}$   $\forall x \in H$ :  $(x, x)_H \geq 0$  a  $(x, x)_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Definujme  $|\cdot|_H := \sqrt{(\cdot, \cdot)_H}$  tj.  $|x|_H = (x, x)_H^{\frac{1}{2}}$ .

Pak  $|\cdot|_H: H \rightarrow \mathbb{R}^+$  vždy splňuje vlastnosti normy (N1)-(N3).

D<sub>1</sub>  $\boxed{\text{Ad(N1)}}$   $\boxed{|x|_H \geq 0}$  a  $\boxed{|x|_H = 0 \Leftrightarrow x = 0}$  plyne resp. z ekvivalenci (S3) $_{\mathbb{C}}$

$\boxed{\text{Ad(N2)}}$   $| \lambda x |_H^2 = (\lambda \bar{x}, \lambda \bar{x})_H \stackrel{(S1)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda (\bar{x}, \lambda \bar{x})_H \stackrel{(S2)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda (\lambda x, x)_H \stackrel{(S1)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda \bar{\lambda} (x, x)_H = \lambda \bar{\lambda} |x|_H^2$ , což implikuje  
 $\stackrel{(S3)_{\mathbb{C}}}{\rightarrow} | \lambda x |_H = |\lambda|_{\mathbb{C}} |x|_H$  pro  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x \in H$ .

$\boxed{\text{Ad(N3)}}$   $|x+y|_H^2 = (x+y, x+y)_H = (x, x)_H + (x, y)_H + (y, x)_H + (y, y)_H$   
 $\stackrel{(S2)_{\mathbb{C}}}{=} |x|_H^2 + \underbrace{(x, y)_H + \overline{(x, y)_H}}_{z + \bar{z} = 2\text{Re } z} + |y|_H^2 = |x|_H^2 + 2\text{Re}(x, y)_H + |y|_H^2$   
 $\leq |x|_H^2 + 2|(x, y)_H|_{\mathbb{C}} + |y|_H^2 \leq |x|_H^2 + 2|x|_H|y|_H + |y|_H^2 = (|x|_H + |y|_H)^2$   $\square$

$\boxed{\text{Cauchy-Schwarzova } \leq}$   
 $\forall x, y \in H: |(x, y)_H| \leq |x|_H |y|_H$

D<sub>2</sub>  $y=0 \Rightarrow (x, 0) = \overline{(0, x)}$  a  $(0, x) = (0+0, x) = (0, x) + (0, x) \Rightarrow (0, x) = 0$   
 a  $\mathbb{C}$ -S) pozn.

$\bullet \boxed{y \neq 0}$   $\lambda \in \mathbb{C}$   $0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y)_H = (x, x)_H + \lambda(y, x)_H + \bar{\lambda}(\overline{(y, x)})_H + |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 (y, y)_H$   
 $= (x, x)_H + \lambda(x, y)_H + \bar{\lambda}(\overline{(x, y)})_H + |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 (y, y)_H = (x, x)_H + 2\text{Re}(\lambda(x, y)_H) + |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 |y|_H^2$

Volbou  $\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)_H}$ :  $0 \leq (x, x)_H - \frac{(x, y)(\overline{(x, y)})}{(y, y)_H} - \frac{\overline{(x, y)}(x, y)_H}{(y, y)_H} + \frac{(x, y)(\overline{(x, y)})}{(y, y)_H} = \frac{(x, x)_H |y|_H^2 - |(x, y)_H|^2}{|y|_H^2}$

což dává tvrzení.  $\square$

Definice Bude  $X$  normovaný prostor s normami  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$ .  
 Přijmeme, že tyto normy jsou ekvivalentní pokud existují  
 $c_1, c_2 > 0$  tak, že  $\forall x \in X$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

Příklad • Normy  $\|f\|_\infty$  a  $\|f\|_1$  nejsou v  $C(\langle a, b \rangle)$   
 ekvivalentní.

**METRICKÝ PROSTOR** Bude  $M$  nějaká množina objektivně\*  
 neprázdná

kteří lze zavést zobrazení

$$\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

splňující (M1) - (M3). Pak  $(M, \rho)$  nazýváme metrický prostor

Příklad •  $C(\langle a, b \rangle)$  je metrický prostor a metrikou  
 $\rho_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x) - g(x)|$   
 •  $C(\langle a, b \rangle)$  je metrický prostor a metrikou  
 $\rho_1(f, g) := \|f - g\|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Je-li  $X = (X, \|\cdot\|_X)$   
 normovaný prostor, pak  $X$  je (vektorový) metrický  
 prostor a metrikou

$$\rho(x, y) := \|x - y\|_X$$

Tato metrika se nazývá metrika (vzdálenost) indukovaná  
normou.

\* Nemusí tedy  $M$  být vektorový prostor.

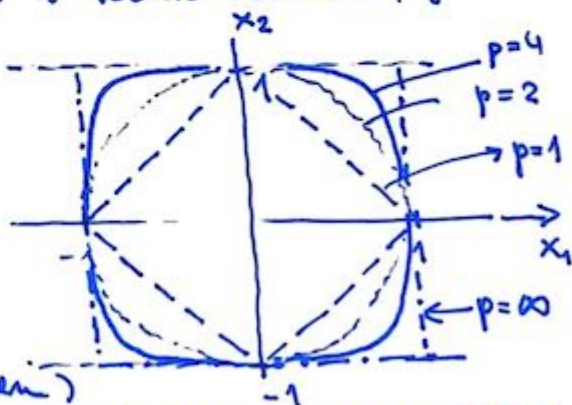
Definujeme v  $\mathbb{R}^d$  následující zobrazení pro  $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ :

$$\boxed{1 \leq p < +\infty} : \quad \|\vec{x}\|_p := \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\boxed{p = +\infty} : \quad \|\vec{x}\|_\infty := \max_{i=1,2,\dots,d} |x_i|$$

Paž  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  jsou normy. Sutečně 1-homogenita a nesápornost plynou přímo z definice normem (OVĚŘTE!), zatímco  $\Delta$ -nerovnost plyne z Minkovského nerovnosti, kterou uvažujeme za chvilu.

Všimněte si, jak vypadají jednotkové koule v těchto normách, tj. množiny  $B_1^p(0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d; \|\vec{x}\|_p \leq 1\}$ .



Všimněte si také, že  $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_E$  (jeu tato norma je generována skalárním součinem)

Norme  $\|\cdot\|_\infty$  se někdy říká supremová,  
Norme  $\|\cdot\|_1$  se někdy říká početová.

VŠECHNY TYTO NORMY JSOU VZÁJEMNĚ EKVIVALENTNÍ.

Na závěr si uvažujeme tři nerovnosti, které vedou k  $\Delta$ -nerovnosti.

Tvrzení (Youngova nerovnost) Pro  $a, b > 0$  platí:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

kde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  )  $p, q \in \langle 1, +\infty \rangle$

Někdy se píše  $q = p'$ ;  $p' = \frac{p}{p-1}$ .  
 $p, p'$  duální exponenty.

Ⓛe Plyne z (vyní) monotónie a konvexitě logaritmu:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left( \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right)$$

$$\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

a aplikujeme exponenciálu.  $\square$

Důkaz: Pro  $A, B > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  libovolně:

$$AB \leq \varepsilon A^p + \frac{p-1}{\varepsilon^{1/(p-1)}} \left(\frac{B}{p}\right)^{p'}$$

$$p' := \frac{p}{p-1}$$



Tvrzení (Hölderova nerovnost) Pro  $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$  a

$$\text{pro } \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d: \quad |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q$$

speciální případ  
 $\boxed{p=2}: \langle \cdot, \cdot \rangle \leq$

(Dě) Je-li  $\vec{x} = \vec{0}$  nebo  $\vec{y} = \vec{0}$ , pak je ne trivialní.

Je-li  $\boxed{p=1}$ , pak

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^d x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^d |x_i| |y_i| \leq \max_{i=1, \dots, d} |y_i| \sum_{i=1}^d |x_i|$$

$$= \|\vec{x}\|_1 \|\vec{y}\|_\infty.$$

Podobně pro  $\boxed{p=\infty}$ .

Je-li  $\boxed{1 < p < +\infty}$ , pak  
 $\boxed{a \|\vec{x}\|_p \neq 0 \text{ a } \|\vec{y}\|_q \neq 0}$

$$\frac{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|}{\|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q} \leq \sum_{i=1}^d \frac{|x_i|}{\|\vec{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\vec{y}\|_q} \stackrel{\text{Young}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^p}{\|\vec{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^d \frac{|y_i|^q}{\|\vec{y}\|_q^q}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \square$$

Tvrzení (Minkovského nerovnost)

Pro  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$  a  $p \in \langle 1, +\infty \rangle$  platí:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$$

(Dě) Pro  $\boxed{p=1}$  a  $\boxed{p=\infty}$  je důkaz jednoduchý (SAM).

Pro  $\boxed{p=2}$  jsme již nerovnost dokázali. Nyní převedeme jím obecnější důkaz Acklyje:  $p: \boxed{1 < p < +\infty}$ .

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^d |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^d |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^d |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\vec{x}\|_p \left( \sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + \|\vec{y}\|_p \left( \sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq (\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p) \|\vec{x} + \vec{y}\|_p^{p-1}, \text{ což dává tvrzení. } \square$$

## 8.2 Topologie $\mathbb{R}^d$

Def. Bud'  $\varepsilon > 0$ ,  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ . Pak  $\varepsilon$ -okolím bodu  $\vec{x}_0$  nazveme množinu

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) \text{ definovanou: } U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d; \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_\infty < \varepsilon \}$$

Pozorování

•  $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$  je krychle o straně  $2\varepsilon$

•  $\vec{x}_0 \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$

• Je-li  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ , pak  $U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \subset U_\varepsilon(\vec{x}_0)$

| Ze všech  $|\cdot|_p$  norm,  $1 \leq p \leq \infty$ , jsme zvolili  $|\cdot|_\infty$  normu, neboť s ní se nejlépe počítá. Další volba je  $|\cdot|_2$  norma.

Def. (VNITŘNÍ BOD MNOŽINY) Bud'  $M \subset \mathbb{R}^d$ . Řekneme, že

$\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  je vnitřní bod  $M$  pokud  $(\exists \varepsilon > 0) U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset M$ .

Def. (OTEVŘENÁ MNOŽINA) Řekneme, že  $M \subset \mathbb{R}^d$  je otevřená pokud každý bod  $M$  je vnitřní. Neboli:

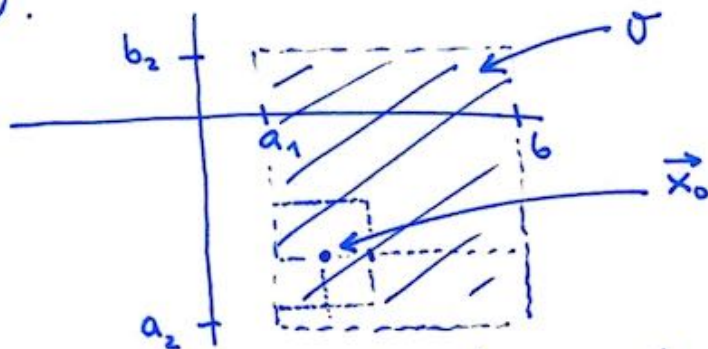
$$M \subset \mathbb{R}^d \text{ je otevřená} \stackrel{\text{df.}}{\iff} \forall \vec{x} \in M \exists \varepsilon > 0 \text{ tak, že } U_\varepsilon(\vec{x}) \subset M.$$

Příklad Necht'  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^d$ ,  $a_k < b_k$ ,  $k=1, \dots, d$ . Pak

$\mathcal{O} := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d; a_k < x_k < b_k, k=1, 2, \dots, d \}$  je otevřená v  $\mathbb{R}^d$ .

(Dě) Pro  $\vec{x}_0 \in \mathcal{O}$  libovolně položíme  $\varepsilon = \min_{k=1, 2, \dots, d} \{ x_{0k} - a_k, b_k - x_{0k} \}$

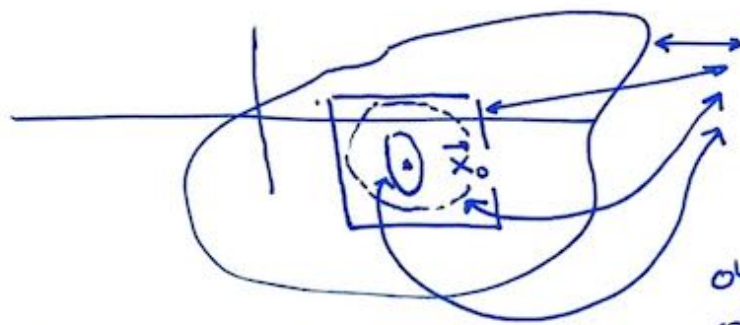
Pak  $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \mathcal{O}$ .



Také jsem mohl definovat  $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{k=1, \dots, d} \{ x_{0k} - a_k, b_k - x_{0k} \}$

Definice Otvorim bodu  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  rozumime libovolnou otevřenou množinu obsahující  $\vec{x}_0$ .

Příklad



tyto čtyři množiny (brambora, čtverec, kruh a elipsa) jsou otvory  $\vec{x}_0$ , pokud jsou otevřené. Napiš.

$\check{C}_1 := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| < \frac{1}{2} \}$  je otevřená, ale  
 $\check{C}_2 := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq \frac{1}{2} \}$  otevřená není.

**Věta 8.4** Systém všech otevřených množin v  $\mathbb{R}^d$  má následující vlastnosti:

- (T1)  $\emptyset, \mathbb{R}^d$  jsou otevřené
- (T2) sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřené
- (T3) průnik konečného počtu otevřených množin je otevřený

**Důl** **Ad (T1)** triviální

**Ad (T2)** Jsou-li  $G_\alpha$  otevřené a  $\vec{x}_0 \in \bigcup_\alpha G_\alpha$ , pak  $\exists$  do tak,  $\vec{x}_0 \in G_{\alpha_0}$ . Protože  $G_{\alpha_0}$  je otevřená, tak existuje  $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ ,  $\varepsilon$ -ové otvory, tak,  $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G_{\alpha_0}$ . Pak ale  $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ .

[ $\alpha$  je index, který vybírám z nějaké množiny indexů, napiš.  $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in \Gamma$ ,  $\Gamma$  množina indexů jiné mohutnosti]

**Ad (T3)** Bud  $\vec{x}_0 \in \bigcap_{i=1}^m G_i$ ,  $G_i$  otevřená. Pak  $\vec{x}_0 \in G_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, m$  a existují  $\varepsilon_i > 0$  tak,  $U_{\varepsilon_i}(\vec{x}_0) \subset G_i$ .

Definujme  $\varepsilon := \min_{i=1, \dots, m} \varepsilon_i$ . Pak  $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$ .

**Pozor!!**  $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$  nemusí být otevřená. Volme napiš.  $G_i := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid |\vec{x}|_\infty < \frac{1}{i} \}$ . Pak  $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{0\}$ .



**TOPOLOGICKÝ PROSTOR** Bud'  $X$  libovolná množina, na které uvažujeme (tzn. máme nebo zavedeme) systém  $\mathcal{T}$  podmnožin  $X$  takových, ů

$$(T1)^* \quad \emptyset, X \in \mathcal{T}$$

$$(T2)^* \quad \text{Jsou-li } G_\alpha \in \mathcal{T}, \text{ pak } \bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{T}$$

$$(T3)^* \quad \text{Jsou-li } G_i \in \mathcal{T}, \text{ } i=1, \dots, m, \text{ pak } \bigcap_{i=1}^m G_i \in \mathcal{T}.$$

KONEČNĚ

Pak  $\mathcal{T}$  se nazývá topologie,

a  $(X, \mathcal{T})$  je topologický prostor.

Příklady •  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  je triviální topologie, kterou lze zavést na libovolné množině.

• v  $\mathbb{R}^d$  je  $\mathcal{T}$  definována takto:  $[\text{pro } \forall \varepsilon > 0 \text{ a } \forall x \in \mathbb{R}^d \emptyset, \mathbb{R}^d \text{ a } U_\varepsilon(x) \in \mathcal{T}]$

vidíme, ů  $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  potenciální množina =  
systém všech podmnožin  $\mathbb{R}^d$ .

**Definice** Řekneme, ů  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  je uzavřená  $\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d \setminus M$  je otevřená (neboli doplněk  $M$  (angl. complement) značený  $\overline{M^c}$  je otevřený).

Protože platí:

$$\mathbb{R}^d \setminus \left( \bigcap_\alpha G_\alpha \right) = \bigcup_\alpha \left( \mathbb{R}^d \setminus G_\alpha \right) \quad \text{a} \quad \mathbb{R}^d \setminus \left( \bigcup_{i=1}^m G_i \right) = \bigcap_{i=1}^m \left( \mathbb{R}^d \setminus G_i \right)$$

tak z Věty 8.4. plyne:

**Věta 8.4\*** Systém všech uzavřených podmnožin  $\mathbb{R}^d$  má následující

vlastnosti:

(1)  $\emptyset, \mathbb{R}^d$  jsou uzavřené

(2) Jsou-li  $G_i$  uzavřené po  $i=1, \dots, m$ , pak  $\bigcup_{i=1}^m G_i$  je uzavřené

(3) Jsou-li  $G_\alpha$  uzavřené,  $\alpha$  libovolní, pak  $\bigcap_\alpha G_\alpha$  je uzavřená množina.

**Definice** • **[Hraniční bod množiny]** Bud'  $M \subset \mathbb{R}^d$ . Bod  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$  nazveme hraničním bodem  $M$  nebo bodem hranice  $M$  právě tehdy, když libovolné (každé) okolí  $\vec{x}$  má neprázdný průnik s  $M$  i  $\mathbb{R}^d \setminus M$ , tzn.  $(\forall U(\vec{x})) (U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \wedge U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset)$

• **[HRANICE]** Množina všech hraničních bodů  $M$  se nazývá hranice  $M$  a značí se  $\partial M$ .

• **[UZÁVĚR MNOŽINY]** je sjednocení  $M$  a její hranice, tzn.

$$\bar{M} := M \cup \partial M.$$

$$\bar{M} = \text{uzáveř } M$$

**[Tvůrzení]** Bud'  $M \subset \mathbb{R}^d$  libovolná, pak  $\overline{(\bar{M})} = \bar{M}$ .

(Dě) Protože dle definice  $\overline{(\bar{M})} = \bar{M} \cup \partial \bar{M} = M \cup \partial M \cup \partial \bar{M}$ , stačí ukázat, že  $\underline{\partial \bar{M} \subset \partial M}$ .

Je-li však  $\vec{x} \in \partial \bar{M}$ , pak

$$(1) \quad \forall U(\vec{x}): \quad U(\vec{x}) \cap \bar{M} \neq \emptyset \quad \text{a} \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \bar{M}) \neq \emptyset$$

Chceme ukázat, že  $\vec{x} \in \partial M$ , tj.

$$(2) \quad \forall U(\vec{x}) \quad U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$$

Bud'  $U(\vec{x})$  libovolné okolí  $\vec{x} \in \partial \bar{M}$ , pak  $\underline{U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \bar{M}) \neq \emptyset}$  plyne  $U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$  (neboť  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{M} \subset \mathbb{R}^d \setminus M$ ).

Dále z  $U(\vec{x}) \cap \bar{M} \neq \emptyset$  plyne existence  $\vec{y} \in U(\vec{x})$  takové, že je buď  $\vec{y} \in M$  nebo  $\vec{y} \in \partial M$ . Je-li  $\vec{y} \in M$ , pak  $U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$  a jsme hotovi. Je-li  $\vec{y} \in \partial M$  (a také v  $U(\vec{x})$ )

pak určitě existují  $U(\vec{y}) \subset U(\vec{x})$  tak, že  $U(\vec{y}) \cap M \neq \emptyset$ ,

pak ale i  $U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$  a jsme hotovi. □

**Věta 8.5** Bud'  $M \subseteq \mathbb{R}^d$ . Pak  $\overline{M}$  je nejmenší uzavřená množina v  $\mathbb{R}^d$  obsahující  $M$ .

**Důk. Krok 1** Ukažeme nejprve, že  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$  je otevřená. Sporem. Kdyby  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$  nebyla otevřená, tak existuje  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$  takový, že pro jakékoli okolí  $U(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$ . (negace definice otevřené množiny)

Pak ale  $\vec{x} \in \partial \overline{M}$  a  $\partial \overline{M} \subset \overline{(\overline{M})} = \overline{M}$  a máme spor neboť  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$  ale také  $\vec{x} \in \overline{M}$ .

**Krok 2** Necht'  $N$  je uzavřená množina obsahující  $M$ . Chceme ukázat, že  $\overline{M} \subset N$  neboť  $\partial M \subset N$  (neboť  $M \subset N$ ).

Kdyby však existoval  $\vec{x} \in \partial M$  a zároveň  $\vec{x} \notin N$ , pak

$$(\forall U(\vec{x})) \quad U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$$

což však ale implikuje (neboť  $M \subset N$  a  $\vec{x} \notin N$ ), že

$$(\odot) \quad \forall U(\vec{x}) \quad U(\vec{x}) \cap N \neq \emptyset \quad \text{a} \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus N) \neq \emptyset,$$

což je spor, neboť  $N$  je uzavřená a tedy  $\mathbb{R}^d \setminus N$  je otevřená a existuje tedy okolí  $\hat{U}(\vec{x})$ , které je částí  $\mathbb{R}^d \setminus N$  a tak  $\hat{U}(\vec{x}) \cap N = \emptyset$ .

(a to je ve sporu s  $(\odot)$ ) □

Def. (VNITŘEK MNOŽINY) Bud'  $M \subset \mathbb{R}^d$ . Množina všech vnitřních bodů se nazývá vnitřek  $M$  a značí se  $M^\circ$ .

**Věta 8.6** Bud'  $M \subset \mathbb{R}^d$ . Pak  $(M^\circ)^\circ = M^\circ$  a  $M^\circ$  je největší otevřená podmnožina  $M$ .

**Důk. [1]**  $M^\circ$  je otevřená dle definice vnitřku  $M$  a dle definice otevřené množiny.

[2] Kdyby  $W$  byla jiná otevřená podmnožina  $M$ , pak každý bod  $z \in W$  je vnitřní bod  $M$  a patří tedy do  $M^\circ$ , tj.  $W \subset M^\circ$ .

[3]  $(M^\circ)^\circ$  je největší otevřená podmnožina  $M^\circ$ , ale  $M^\circ$  je otevřená.

Tedy  $(M^\circ)^\circ = M^\circ$ . □

Příklad Uvaž  $\mathbb{Q}$  množinu racionálních čísel. Pak  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  a  $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ .

**Věta 8.7** "Hausdorffův oddělovací axiom" <sup>otevřená okolí</sup>

Bud  $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d$ ,  $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ . Pak existují  $U(\vec{x}_1), U(\vec{x}_2)$  tak, že  $U(\vec{x}_1) \cap U(\vec{x}_2) = \emptyset$ .

(Dě) Položme  $\varepsilon := \frac{1}{4} \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|_\infty > 0$  a  $U(\vec{x}_i) := U_\varepsilon(\vec{x}_i)$ ,  $i=1,2$ .

Kdyby existovalo  $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_1) \cap U_\varepsilon(\vec{x}_2)$ , pak

$$4\varepsilon = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|_\infty = \|\vec{x}_2 - \vec{x} + \vec{x} - \vec{x}_1\|_\infty \leq \|\vec{x}_2 - \vec{x}\|_\infty + \|\vec{x} - \vec{x}_1\|_\infty < 2\varepsilon$$

a máme spor.  $\square$

Důsledek  $\forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ :  $\{\vec{x}_0\}$  je uzavřená (BODY JSOU UZAVŘENÉ MNOŽINY)

(Dě) Bud  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d - \{\vec{x}_0\}$  libovolně, pak dle věty 8.7 existují  $U(\vec{x}_0)$  a  $U(\vec{x})$  tak, že  $U(\vec{x}) \cap U(\vec{x}_0) = \emptyset$ . Tzn.  $U(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^d - \{\vec{x}_0\}$  a  $\vec{x}$  je vnitřní bod  $\mathbb{R}^d - \{\vec{x}_0\}$ . Tedy  $\mathbb{R}^d - \{\vec{x}_0\}$  je otevřená a dle definice  $\{\vec{x}_0\}$  je uzavřená.  $\square$

Definice Bud  $M \subset \mathbb{R}^d$ . Bod  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  je hromadný bodem  $M$  pokud  $\forall U(\vec{x}_0)$  existuje nekonečně bodů z  $M$  patřících do  $U(\vec{x}_0)$ .

**Věta 8.8** (Charakterizace uzavřených množin)

$M \subset \mathbb{R}^d$  je uzavřená  $\iff M$  obsahuje všechny své hromadné body.

(Dě)  $\implies$  Předpokládejme spor, že  $M$  je uzavřená a  $\exists \vec{x} \notin M$  tak, že libovolně  $U(\vec{x})$  obsahuje nekonečně bodů z  $M$ . Pak ale ihned dostáváme spor se skutečností, že  $\mathbb{R}^d - M$  je otevřená a pak po  $\vec{x}$  nutně musí existovat okolí tak, že  $U(\vec{x}) \cap M = \emptyset$ , což je v rozporu s definicí hromadného bodu.

$\impliedby$  Chceme ukázat, že  $\mathbb{R}^d - M$  je otevřená. Necht  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d - M$  je libovolný bod. Protože, dle předpokladu  $M$  obsahuje všechny hromadné body a  $\vec{x} \notin M$ , tak existují  $U(\vec{x})$  tak, že  $U(\vec{x}) \cap M = \emptyset$  a tedy, dle Důsledku věty 8.7,  $U(\vec{x}) \cap M$  je uzavřená. Neboli  $\mathbb{R}^d - (U(\vec{x}) \cap M) = (\mathbb{R}^d - U(\vec{x})) \cup (\mathbb{R}^d - M)$  je otevřená. Protože  $U(\vec{x})$  je otevřená, tak  $U(\vec{x}) \cap [(\mathbb{R}^d - U(\vec{x})) \cup (\mathbb{R}^d - M)] = U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d - M)$  je otevřená a podmnožinou  $(\mathbb{R}^d - M)$ . Tedy  $(\mathbb{R}^d - M)$  je otevřená.  $\square$

### 8.3. Konvergence posloupnosti, úplnost a kompaktnost v $\mathbb{R}^d$

Konvergenci posloupnosti lze definovat topologicky, metricky nebo v normě.

**Def (topologická)** Bud'  $(X, \mathcal{T})$  topologický prostor. Řekneme, že  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  konverguje k  $x \in X \stackrel{\text{def}}{=} (\forall U(x)) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) x_n \in U(x)$

Píšeme:  $x_n \rightarrow x$  v  $X$ .

**Def. (metrická)** Bud'  $(M, \rho)$  metrický prostor. Řekneme, že  $x_n \rightarrow x$  v  $M \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \rho(x_n, x) < \varepsilon$

**Tvrzení** Je-li  $(M, \rho)$  metrický prostor a  $x_n \rightarrow x$  v  $M$ , pak  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  splňuje

$$(B-C) \quad (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, m \geq n_0) \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Důk** Pro dané  $\varepsilon > 0$ , uvažme definici  $x_n \rightarrow x$  v  $M$  pro  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Ttu.

$\exists n_0 \in \mathbb{N} (\forall n \geq n_0) \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Vezme  $n, m \geq n_0$  libovolně. Pausci  $\Delta$ -nerovnosti (13):

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ což jsme chtěli ukázat. } \square$$

**Def. (CAUCHYOVSKÁ POSLOUPNOST)** Bud'  $(M, \rho)$  metrický prostor.

Řekneme, že  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$  je cauchyovská  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{platí (B-C)}$

**Příklad** Uvažme racionální čísla  $\mathbb{Q}$  s metrikou  $\rho(x, y) = |y - x|$ .

Pak  $(\mathbb{Q}, \rho(x, y))$  je metrický prostor. Definujme nyní

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} \text{ řaděm } x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Pak  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je cauchyovská, neboť  $x_n \rightarrow e$  v  $\mathbb{R}$  a  $x_n \in \mathbb{Q}$ .

Ale  $x_n$  nekonverguje v  $\mathbb{Q}$ , neboť  $e \notin \mathbb{Q}$ .

\* Definice [v normě]:  $x_n \rightarrow x$  v  $(X, \|\cdot\|_X) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \|x_n - x\|_X < \varepsilon$



**Def.** Úplný metrický prostor Řekneme, že metrický prostor  $(M, \rho)$  je úplný pokud každá Cauchyovská posloupnost má v  $M$  limitu.

Normovaný (vektorový/lineární) prostor, který je úplný se nazývá **BANACHŮV**.

**Příklady** ① Prostor  $(\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|)$  je úplný, neboť (B-C) podmínka je ekvivalentní s konvergencí posloupnosti, což plyne z Weierstrassovy věty a je důsledkem axiomu úplnosti ( ≠ skona omezená množina má supremum (v  $\mathbb{R}$ )).

② Prostor  $(\mathbb{R}^d, \|\vec{x}-\vec{y}\|_\infty)$  je úplný (tedy i zde (B-C) podmínka je ekvivalentní " $x_n \rightarrow x$  v  $\mathbb{R}^d$ ".)

③ Bud  $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$  Cauchyovská v  $\mathbb{R}^d$ . Pak:

• pro  $\forall \varepsilon > 0$   $\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\|_\infty < \varepsilon$  pro  $n, m$  dostatečně velké

$$\max_{i=1, \dots, d} |(x_n)_i - (x_m)_i| < \varepsilon$$

tedy

$$|(x_n)_i - (x_m)_i| < \varepsilon$$

Tedy  $\{(x_n)_i\}_{n=1}^\infty$  je Cauchyovská v  $\mathbb{R}$  ale  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  je úplný a tak  $\{(x_n)_i\}_{n=1}^\infty$  je konvergentní, tj.  $(\exists x_i \in \mathbb{R})$  tak, že  $(x_n)_i \rightarrow x_i$  v  $\mathbb{R}$ .

Polož  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)$ . Pak  $\|\vec{x}_n - \vec{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} |(x_n)_i - x_i| \rightarrow 0$   $n \rightarrow \infty$

③ Analogicky se ukáže, že  $(\mathbb{R}^d, \|\vec{x}-\vec{y}\|_p)$  je úplný.

Kandidáta na limitu najdu stejně, neboť pro každé

$i = 1, 2, \dots, d$  platí:

$$|x_i| \leq \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\text{resp. } |(x_m)_i - (x_n)_i| \leq \left( \sum_{i=1}^d |(x_m)_i - (x_n)_i|^p \right)^{1/p}$$

Tedy z Cauchyovskosti  $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$  v  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$  plyne Cauchyovskost  $\{(x_n)_i\}_{n=1}^\infty$  v  $\mathbb{R}$  a tedy existence  $x_i \in \mathbb{R}$  tak, že

$$x_{ni} \rightarrow x_i \text{ v } \mathbb{R}.$$

Po  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)$  pak máme

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^d |x_{ni} - x_i|^p \right)^{1/p} \leq d^{1/p} \max_{i=1, \dots, d} |x_{ni} - x_i| \rightarrow 0$$

Pozor!  $d^{1/p} \rightarrow +\infty$  pro  $d \rightarrow +\infty$

Argument se dá zlepšit.

jako v příkladu ②

④ Prostor  $(C(\langle a,b \rangle), \rho^\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty := \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)-g(x)|) =: X$  je úplný normovaný prostor (tedy Banachův).

"Námař diřatů" Je-li  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  Cauchyovská v  $X$ , tak

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \forall n, m \geq n_0 \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

což implikuje dvě věci:

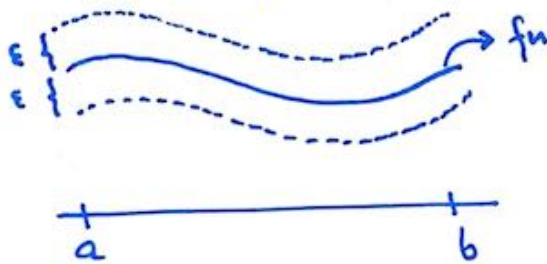
(i) podobně jako v Pi. ②: pro každé  $x \in \langle a,b \rangle$

a tedy  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  je Cauchyovská v  $\mathbb{R}$ , a tedy konvergentní. Existují vlastní limity  $f_n(x)$  pro  $n \rightarrow \infty$ , označme ji  $f(x)$ :

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{bodová limita}$$

Našli jsme kandidáta na limitu  $\{f_n\}$

(ii) Od jistého  $n_0$ : všechny  $f_n$  leží v  $2\varepsilon$ -ovém kanálku, viz obrázek:

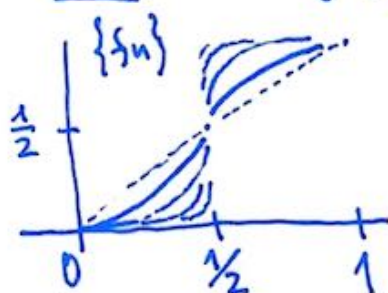


Odsud plyne, že  $f$  také musí ležet v  $\varepsilon$ -ovém kanálku, a navíc bude tato  $f$  spojitá, tzn.  $f \in C(\langle a,b \rangle)$ . ▣

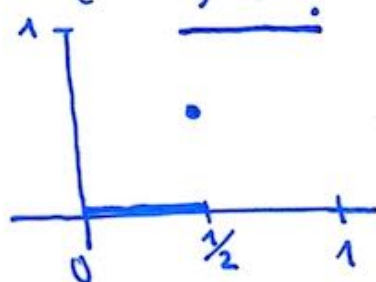
Budeme mít později (ZS 2020/21), že  $f_n \rightarrow f$  v  $X$  znamená, že  $f_n$  konverguje k  $f$  stejnoměrně na  $\langle a,b \rangle$ , píšeme  $f_n \rightrightarrows f$  v  $\langle a,b \rangle$ .

⑤ Prostor  $(C(\langle a,b \rangle), \rho^1(f,g) := \int_a^b |f(x)-g(x)| dx) =: Y$  nemá úplný.

Ořšená Uvažuj  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(\langle 0,1 \rangle)$  jako na obrázku:



$\Rightarrow$



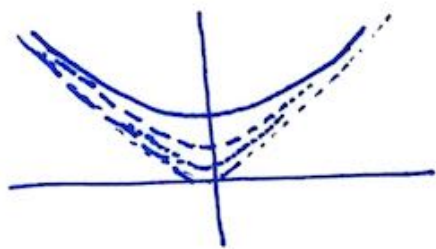
- Pak:
- $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  je Cauchyovská v  $Y$
  - $\rho^1(f_n, f) \rightarrow 0$   $n \rightarrow \infty$
  - !  $f \notin C(\langle 0,1 \rangle)$ .

[SROVNĚJ S  $(C(\langle 0,1 \rangle))$ ]

Podobně jako neúplnost  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  vedla k "rozšíření"/zavedení  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  
 tak neúplnost  $(C(\langle a, b \rangle), \|\cdot\|_1 := \int_a^b |\cdot| dx)$  vedla k "rozšíření"/zavedení  
 prostorů  $(L^1(\langle a, b \rangle), \|\cdot\|_1)$  a obecněji  $(L^p(\langle a, b \rangle), \|f\|_p := \int_a^b |f(x)|^p dx)$ .  
 Tyto prostory jsou úplné, zavedeme je v ZS 2020/21. Pro  $p=2$ ,  
 mají, mj., uplatnění v kvantové fyzice.

⑥ Prostor  $(C^1(\langle a, b \rangle), \|f-g\|_\infty = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x)-g(x)|)$  není úplný.

Rěšení Uvažujme  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\langle a, b \rangle)$  jako na obrázku:



Pak  $f_n$  konvergují k  $f(x) = |x|$   
 "stejněměrně" (ve smyslu  $\epsilon$ -ovéh  
 tunýlku)

ale  $|x| \notin C^1(\langle a, b \rangle)$ . Proč?  $\square$

⑦ Prostory  $l^p$ ,  $p \in \langle 1, \infty \rangle$ , definované

$1 \leq p < \infty$

$l^p := \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty; \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} < +\infty\} \triangleright \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}$

$p = \infty$

$l^\infty := \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty; \sup_{i=1,2,\dots} |x_i| < +\infty\} \triangleright \|x\|_\infty := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

jsou úplně normované (tedy Banachovy) prostory.

⑧ Viz eničení. Návod: vyjdi z definice konvergence číselné řady.  
 Utiž výsledky pro  $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_p)$ .  $\square$

Směrem ke kompaktnosti

Definice Systém množin  $\{U_i\}_{i \in J}$ ,  $J$  množina indexů, se nazývá potyčí  $M$  (zde  $M \subset (X, \tau)$ )  $\equiv_{df.} \bigcap_{x \in M} (\exists i \in J) x \in U_i$ .  
 Jsou-li  $U_i$  otevřené, mluvíme o otevřeném potyčí.

Definice (topologická definice kompaktnosti) Množina  $K \subset \mathbb{R}^d$  (v obecnějším případě topologického prostoru  $(X, \tau)$ ) je kompaktní pokud z každého otevřeného potyčí  $K$  lze vybrat potyčí konečné.

Následující citace je přičítována Hermannu Weylovi (1885-1955):  
 "If a city is compact, it can be guarded by a finite number of arbitrarily near-sighted policemen."  
 zdroj: Edwin Hewitt, "The rôle of compactness in analysis". The American Mathematical Monthly, 1960.

Věta 8.9 Buď  $A \subset M$ , kde  $(M, \rho)$  je metrický prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:  
 (otevřeného)

- (1) z každého potyčí lze vybrat potyčí konečné
- (2) Každá posloupnost bodů z  $A$  obsahuje podposloupnost konvergentní v  $A$
- (3)  $(A, \rho)$  je úplný a pro každé  $\epsilon > 0$  existuje konečné potyčí  $\epsilon$ -odolné ( $\epsilon$ -výjímí koule)

množina, která má tuto vlastnost, se nazývá totálně omezená

Důk (1)  $\Rightarrow$  (2) Předpokládejme existenci  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ , která neobsahuje konvergentní podposloupnost. Pak  
 $(\forall y \in A) (\exists r = r(y) > 0)$  tak, že  $N_y := \{k; x_k \in \underbrace{B_{r(y)}(y)}_{\text{" "}} \cap A\}$  je konečná.

Potom  $\bigcup_{y \in A} B_{r(y)}(y)$  je otevřené potyčí  $A$   $\{z \in M; \rho(z, y) < r(y)\}$

a dle předpokladu (1) existuje konečné množin  $B_{r(y_i)}(y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $A \subset \bigcup_{i=1}^m B_{r(y_i)}(y_i)$ . Pak ale  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je konečná,

což dává spor.  $\downarrow$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Dle (2) má každá cauchyovská posloupnost v  $A$  limitu, tedy  $(A, \rho)$  je úplný.

• Kdyby existovalo  $\epsilon > 0$  tak, že  $A$  nelze potyčit konečným počtem  $\epsilon$ -koulí, pak  $\forall k \in \mathbb{N} \exists x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{\epsilon}(x_i)$ . (iterativní proces)

Tato sestavená posloupnost  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  NEMÁ konvergentní podposloupnost, což je spor s (2). | 8/19

$(3) \Rightarrow (1)$  Bud'  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  otevřené pokrytí  $A$ .

Definujeme

$\mathcal{F} := \{B \subset M, B \text{ nelze pokrýt konečnou množinou } U_i\}$   
 Chceme ukázat, že  $A \notin \mathcal{F}$ . De předpokladu (3) je však  $A$  totálně omezená. Tedy

$[K \varepsilon = 1$  existuje konečně 1-odvě  $B_1(x_i), i=1, \dots, N$ , tak, že  $A \subset \bigcup_{i=1}^N B_1(x_i)]$

Paž však existuje  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$  tak, že  $C_1 := A \cap B_1(x_{i_0}) \in \mathcal{F}$ . Kdyby totiž takový index neexistoval, tak  $A \notin \mathcal{F}$  a jsme hotovi.  
 Mějme tedy  $C_1 \in \mathcal{F}$ . Opět  $C_1 \subset A$ , tak  $C_1$  je totálně omezená.

$[K \varepsilon = \frac{1}{2}$  existuje konečně  $\frac{1}{2}$ -odvě  $B_{\frac{1}{2}}(\hat{x}_i), i=1, \dots, N_1$ , tak, že  $C_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} B_{\frac{1}{2}}(\hat{x}_i)]$

Opět musí existovat  $\hat{i}_0 \in \{1, \dots, N_1\}$  tak, že  $C_2 := C_1 \cap B_{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{\hat{i}_0}) \in \mathcal{F}$ .  
 V opačném případě by byl důkaz hotov.

Iterujeme .... dostaneme

$$C_0 := A \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \supset \dots \quad \text{ kde } C_k := C_{k-1} \cap B_{\frac{1}{k}}(\xi_k)$$

$$\text{ kde } \xi_k \in B_{\frac{1}{k-1}}(\xi_{k-1})$$

Tedy  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$  je Cauchyovská v  $A$  a  $(A, \rho)$  je úplný, dle předpokladu (3), takže existuje  $x_0 \in A$  tak, že  $\xi_k \rightarrow x_0$  v  $A$ .

Ale  $x_0 \in U_l$  pro jisté  $l$  a  $U_l$  je otevřená. Paž nutně existuje  $k_0$  dostatečně velké tak, že

$$C_k \subset U_l \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

což dává spor, neboť  $C_k \in \mathcal{F}$  dle konstrukce.  $\square$

**Věta 8.10** (Charakterizace uzavřených množin)

$$A \subset \mathbb{R}^d \text{ je uzavřená} \Leftrightarrow \left[ \left( \forall \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \right) \vec{x}_n \rightarrow \vec{x} \text{ v } \mathbb{R}^d \Rightarrow \vec{x} \in A \right]$$

$(D_1) \Rightarrow$  Když je  $A$  uzavřenou a libovolnou  $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \cap \vec{x}_n \rightarrow \vec{x} \text{ v } \mathbb{R}^d$  bylo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d - A$ , paž, podle  $\mathbb{R}^d - A$  otevřená existuje  $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^d - A$  a máme  $\vec{x}$  neboť  $x_n$  paž nemohou konvergovat k  $\vec{x}$ .

$\Leftarrow$  Verměme  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d - A$  libovolně.

Když  $U_{\frac{1}{n}}(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , paž existují  $\vec{x}_n \in A$

tal, že  $\vec{x}_n \rightarrow \vec{x}$  v  $\mathbb{R}^d$ . Paž ale nutně  $\vec{x}$  patří do  $A$ ,

což dává spor s předpokladem.  $\square$

Def. • Bud'  $(M, \rho)$  metrický prostor. Řekneme, ť  $A \subset M$  je omezená  $\equiv \text{df. } (\exists R > 0) A \subset B_R(0) := \{x \in M; \rho(x, 0) < R\}$ .

• Bud'  $(X, \|\cdot\|_X)$  normovaný prostor. Množina  $A \subset X$  je omezená  $\equiv \text{df. } (\exists R > 0) A \subset B_R(0) := \{x \in M; \|x\|_X < R\}$ .

**Věta 8.11** (Charakterizace kompaktních množin v  $\mathbb{R}^d$ )  
 Množina  $K \subset \mathbb{R}^d$  je kompaktní  $\Leftrightarrow K$  je omezená a uzavřená

! Tato charakterizace platí jen v prostorech konečné dimenze. Neboli, je-li  $(M, \rho)$  úplný metrický prostor (nebo Banachův nebo Hilbertův prostor) a  $K \subset M$  je kompaktní, pak  $K$  je uzavřená a omezená. Avšak neplatí obrácená implikace. Platí totiž tato Heine-Borelova věta:

$\overline{B_1(0)} := \{x \in M; \rho(x, 0) \leq 1\}$  je v  $(M, \rho)$  kompaktní  $\Leftrightarrow \dim M < \infty$ .

Návrh důkazu Uvažujme nejprvejšít n-rozměrný prostor  $\mathbb{R}^d$  měrem  $l_2$  prostorem  $\infty$ -dimenze. Dokažeme prostorem

$$l_2 := \left\{ x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} ; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\} \text{ s normou } \|x\|_{l_2} := \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Uvažujme následující posloupnost  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$  ležící v uzavřeném jednotkové kouli v  $l_2$ :

$$x^1 := (1, 0, \dots, \dots)$$

$$x^2 := (0, 1, \dots, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x^m := (0, 0, \dots, \overset{1}{\uparrow}, \dots)$$

$n$ -tí prvek

Pat: •  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x^n\|_{l_2} = 1$

•  $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m, \quad \|x^n - x^m\|_{l_2} = \sqrt{2}$

Tedy, NELZE Z  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$  VYTRAF KONVERGENTNÍ

PODPOSOUPNOST  $\Rightarrow \overline{B_1(0)}$  v  $l_2$  NEJ KOMPACTNÍ.

(Dz) Věty 8.11

Dle věty 8.9, ekvivalence (1) a (3), máme

$$\boxed{K \subset \mathbb{R}^d \text{ je kompaktní}} \Leftrightarrow \boxed{(K, \|\cdot\|_\infty) \text{ je úplný a } K \text{ je totalně omezená}}$$

Ale dle věty 9.10:

$$\boxed{(K, \|\cdot\|_\infty) \text{ je úplný}} \Leftrightarrow \boxed{K \text{ je uzavřený}}$$

Tedy zbyvá určit, že

$$\boxed{K \text{ totalně omezená v } \mathbb{R}^d} \Leftrightarrow \boxed{K \text{ je omezená v } \mathbb{R}^d}$$

$\Rightarrow$  Je-li  $K$  totalně omezená, tj.  $K \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(\vec{x}_i)$ , pak  
definujeme  $R := \max_{\substack{j=1, \dots, d \\ i=1, \dots, m}} |\vec{x}_i|_j + \varepsilon = \max_{i=1, \dots, m} \|\vec{x}_i\|_\infty + \varepsilon$

Pak  $K \subset B_R(\vec{0})$  a  $K$  je omezená.

$\Leftarrow$  Je-li  $K$  omezená, pak existuje  $R > 0$  tak, že  $K \subset B_R(\vec{0})$ ,  
což je kugle v  $\mathbb{R}^d$  o straně  $2R$ . Uváž  $k \in \mathbb{N}$  tak, že  
 $k := \left\lceil \frac{R}{\varepsilon} \right\rceil + 1$  & danému libovolnému  $\varepsilon > 0$ .  
↑ celočíselná

Pak  $K$  pokryje  $k^d$  kuglicíků o straně  $2\varepsilon$ . Tedy  $K$  je  
totalně omezená. ◻