7.4 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU

Mějme $f, a_0, a_1, \dots, a_n \in C((a,b))$ a uvažujme rovnici

$$\boxed{(20) \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)}$$

Protože je diferenciální operátor

$$\underline{L} : C^k((a,b)) \to C((a,b)),$$

definovaný předpisem

$$L(x)y = Ly := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

lineární, tak rovnice (20) je

> lineární ODR s pravou stranou f a koeficienty $a_0, \dots, a_n$ a to řádu n, pokud $\boxed{a_n(x) \neq 0 \text{ na } (a,b), \quad (21)}$
> což budeme nadále předpokládat.
> Je-li $f \equiv 0$, pak přidáváme k rci (20) slovo homogenní.

Věta 7.4 (O globální existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro rovnici (20)). Nechť $f, a_0, \dots, a_n \in C((a,b))$ a $a_n \neq 0$ na (a,b). Pak pro každé $x_0 \in (a,b)$ a pro každou n-tici $(y_0, \dots, y_n)$ existuje právě jedno řešení $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ rovnice (20) splňující

(22) $\quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_n \quad \leftarrow$ POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

Důkaz **KROK 1** Převedení $\boxed{(20)+(22)}$ na počáteční úlohu pro systém ODR 1. řádu.

Podělíme (20) fcí $a_n(x)$ a označme $u_1 := y, u_2 := y', \dots, u_n := y^{(n-1)}$.
Pak dostáváme

(23)
$$\boxed{\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= -\frac{a_0(x)}{a_n(x)}u_1 - \frac{a_1(x)}{a_n(x)}u_2 - \dots - \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}u_n + \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{aligned}}$$
splňuje
$$\boxed{\begin{aligned} u_1(x_0) &= y_0 \\ u_2(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ u_n(x_0) &= y_n \end{aligned}}$$

což lze psát v kompaktním tvaru pro $\vec{u} := (u_1, \dots, u_n)$:

(24) $\boxed{\vec{u}\,' = A(x)\,\vec{u} + \vec{f}(x) =: \vec{F}(x, \vec{u}) \quad \text{spolu s} \quad \vec{u}(x_0) = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T.}$

KROK 2 Lokální existence a jednoznačnost řešení (24) a tedy $\boxed{(20)+(22)}$

Protože $\vec{F}$ (definovaná v (24)) závisí na $\vec{u}$ lineárně, je fce $\vec{F}$ lipschitzovsky spojitá vzhledem k $\vec{u}$.

Dle Picard-Lindelöfovy věty 7.3 tak existuje $\delta > 0$ a $\boxed{\vec{u} : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n}$ splňující (24), tj. platí

$$\vec{u}\,'(x) = \vec{F}(x, \vec{u}(x)) \quad \text{pro} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

a

$$\vec{u}(x_0) = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T.$$

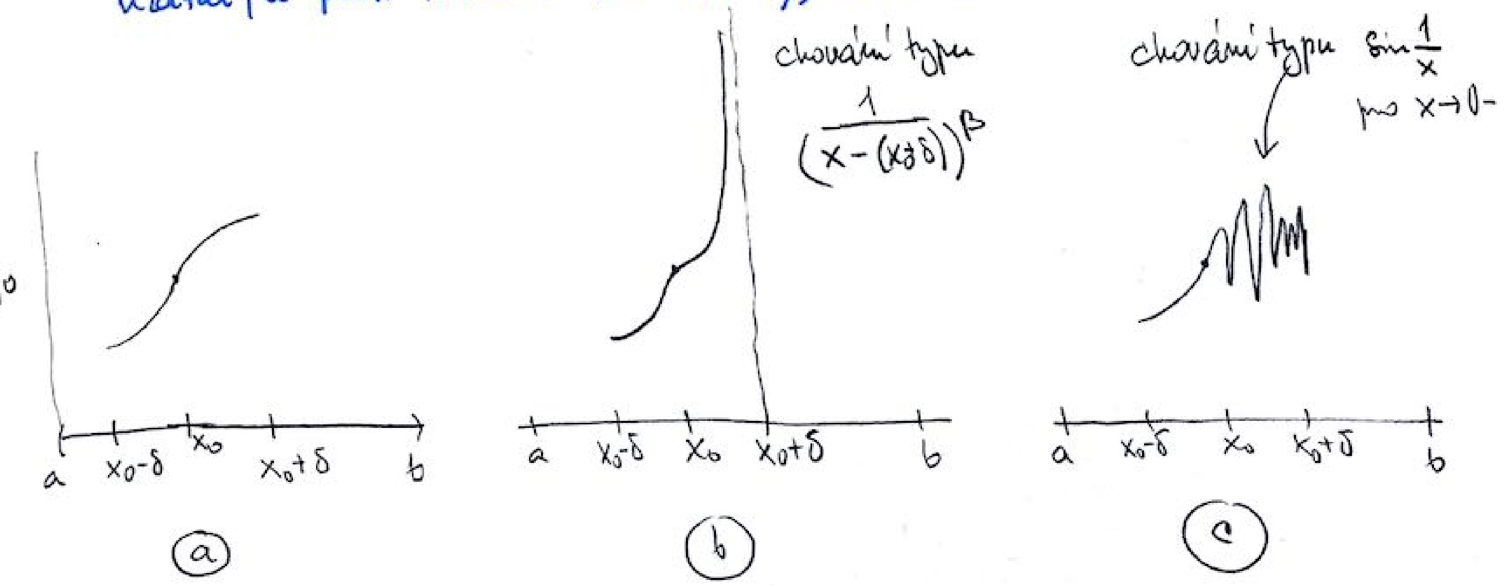
Navíc, toto $\vec{u}$ je jediné.

INTERMEZZO

Zbývá ukázat, že $\vec{u}$ lze jednoznačným způsobem rozšířit na (a, b).
Budeme uvažovat jen rozšíření za $x_0 + \delta$ v případě kdy $x_0 + \delta < b$.
[Rozšíření vlevo tj. před $x_0 - \delta$ se udělá analogicky (pokud $x_0 - \delta > a$).]
Víme, že řešení $\vec{u}$ je spojité a má spojité první derivace na $(x_0, x_0 + \delta)$.
Stačí ukázat, že existuje $\lim_{x \to x_0 + \delta -} \vec{u}(x)$ a je konečná, tj.

(25) $$\boxed{\exists\, \vec{U} \in \mathbb{R}^n \text{ tak, že } \lim_{x \to x_0 + \delta -} u_i(x) = U_i.}$$

Jakmile (25) platí, lze opět využít Picard-Lindelöfovu větu 7.3 a sestrojit řešení začínající v $x_0 + \delta$, řešící rci $\vec{u}\,' = \vec{F}(x, \vec{u})$ s počátečními podmínkami $\vec{u}(x_0 + \delta) = U_i$. Zhruba řečeno, chceme ukázat, že platí situace na Obr. a), a nenastane situace na Obr. b) a c).



$\boxed{\text{KROK 3}}$ Omezenost řešení $\vec{u}$ a jeho derivací na $\langle x_0, x_0+\delta)$

Připomeň: $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\|\vec{u}\|^2_{\mathbb{R}^m} := \sum_{i=1}^m u_i^2$.

Tak

$$\frac{d}{dx}\|\vec{u}\|^2_{\mathbb{R}^m} = 2\sum_{i=1}^m u_i u_i' \overset{(23)}{=} 2\sum_{i=1}^{m-1} u_i u_{i+1} - \left(2\sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(x)}{a_m(x)} u_{j+1} u_m\right) + 2\frac{f(x)}{a_m(x)} u_m$$

(26)
$$\leq \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2 + u_{i+1}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \max_{[x_0, x_0+\delta]} \frac{|a_j(x)|}{|a_m(x)|}(u_{j+1}^2 + u_m^2) + \max_{x\in[x_0,x_0+\delta]} \frac{1}{|a_m(x)|}\left(\max_{x\in[x_0,x_0+\delta]} |f(x)|^2 + u_m^2\right)$$

$$\leq C_1 \|\vec{u}\|^2_{\mathbb{R}^m} + C_2$$

kde $C_1, C_2 > 0$ (závisí na $n, x_0, x_0+\delta$) VYUŽÍVÁME FAKT, že $\boxed{x_0+\delta < b}$ a spojitost dat (koeficientů a pravé strany na $[x_0, x_0+\delta]$.

Metodou ála integrační faktor:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-C_1(x-x_0)}\|\vec{u}\|^2_{\mathbb{R}^m}\right) = \left(\frac{d}{dx}\|\vec{u}\|^2_{\mathbb{R}^m} - C_1\|\vec{u}\|^2_{\mathbb{R}^m}\right) e^{-C_1(x-x_0)} \overset{(26)}{\leq} C_2 e^{-C_1(x-x_0)} \leq C_2 .$$

Odtud, integrací od x_0 do x, kde $x \in (x_0, x_0+\delta]$, dostáváme:

(27)
$$\begin{cases} \|\vec{u}(x)\|^2_{\mathbb{R}^m} \leq \|\vec{u}(x_0)\|^2_{\mathbb{R}^m} e^{C_1(x-x_0)} + C_2(x-x_0) \\ \qquad \leq |(y_0, \dots, y_m)|_{\mathbb{R}^m} e^{C_1(b-x_0)} + C_2(b-x_0) =: M > 0 \end{cases}$$

Tedy $\vec{u} \in C(\langle x_0, x_0+\delta))$ a omezená na $\langle x_0, x_0+\delta)$. [Chování řešení načrtnuté na obr. (b) je vyloučeno.]

Navíc, z rovnice (24) plyne

$$\|\vec{u}'(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq |\mathbb{A}(x)\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + |\vec{f}(x)|_{\mathbb{R}^m} \leq \|\mathbb{A}(x)\| \, |\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + \frac{|f(x)|}{|a_m(x)|}$$

což implikuje, že pro $\forall x \in [x_0, x_0+\delta)$

$$|\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m} \overset{(27)}{\leq} \widetilde{M}.$$

předpoklady na data.

Tedy*)
$$\sup_{x\in\langle x_0, x_0+\delta)} \left(|\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + |\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m}\right) \leq M + \widetilde{M} < +\infty.$$

*) což $\sin\frac{1}{x}$ nesplňuje

$\boxed{\text{KROK 4}}$ Pro každé $i\in\{1,\dots,m\}$ existují $U_i\in\mathbb{R}$ tak, že

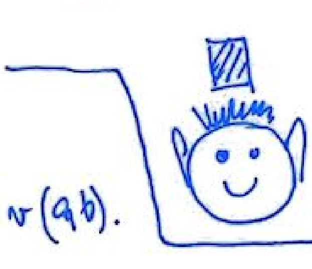
(28) $$\boxed{\lim_{x\to x_0+\delta-} u_i(x) = U_i}$$

$\boxed{\text{Tedy (25) platí a důkaz bude hotov.}}$

Mějme nějakou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n\longrightarrow x_0+\delta-$. Uvažujme $\{u_i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je omezená, dle kroku 3, konstantou $\sqrt{M}$. Dle Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{x_n\}$ a $U_i\in\mathbb{R}$ tak, že
$$u_i(x_{n_k})-U_i\longrightarrow 0 \quad \text{pro } k\to\infty. \qquad (*)$$

Pak však, pro $x\in(x_0,x_0+\delta)$,
$$|u_i(x)-U_i| \le |u_i(x)-u_i(x_{n_k})| + |u_i(x_{n_k})-U_i|$$
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} |u_i'(\xi)|\,|x-x_{n_k}| + |u_i(x_{n_k})-U_i|$$
$$\overset{\text{KROK 3}}{\le} \tilde{M}\,|x-x_{n_k}| + |u_i(x_{n_k})-U_i|$$
$$\le \tilde{M}\big(|x-(x_0+\delta)| + |x_{n_k}-(x_0+\delta)|\big) + |u_i(x_{n_k})-U_i|$$

a členy na pravé straně lze udělat libovolně malé pro k dostatečně velké a x blízké $x_0+\delta$. Tak (28) platí, a důkaz je hotov. Definujme-li totiž
$$b_* := \sup_{z\in\mathcal{M}}, \text{ kde } \mathcal{M} := \left\{[x_0,z)\subset[a,b);\ (24) \text{ má řešení na } [x_0,z)\right\}$$
Víme, že $\mathcal{M}\neq\emptyset$ a $b_*\in(x_0,b)$. Pokud $b_*=b$ jsme hotovi. Pokud $b_*<b$, pak dostaneme spor pomocí argumentace v kroku 3 a 4.



$\boxed{\text{Důsledek A}}$ Úloha $Ly=0$ s počátečními podmínkami
$y(x_0)=y'(x_0)=\dots=y^{(n-1)}(x_0)=0$ má jediné řešení $y\equiv 0$ v (a,b).
Zde Ly označuje levou stranu rovnice (20).

$\boxed{\text{Důsledek B}}$ U lineárních rovnic (1., 2., …, n-tého řádu) s koeficienty závislými spojitě na x na (a,b) nemůže nastat "větvení".

VLASTNOSTI ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ RCE $Ly=0$

Věta 7.5 Množina $\{y \in C((a,b));\ Ly=0\}$ tvoří <u>n-dimenzionální</u> podprostor $C^n((a,b))$. BÁZE SE NAZÝVÁ <u>FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM</u>.

Dk • Je-li $y \in C((a,b))$ a řeší $Ly=0$, pak např. z přepisu na systém ODR 1. řádu vidíme, že $y \in C^n((a,b))$. Skutečnost, že $K := \{y \in C^n((a,b));\ Ly=0\}$ je uzavřená na součet a násobení skalárem je snadné ověřit. Proveďte.

• <u>Ukážeme, že</u> $\dim K = n$.

▶ Buď $w_1, \dots, w_n$ <u>definovány jako řešení počátečních úloh</u>

(❀)
$$\boxed{\begin{aligned} L w_i &= 0 \ \text{ v } (a,b) \\ w_i^{(j-1)}(x_0) &= \delta_{ij} \qquad \text{pro } j = 1,2,\dots,n \end{aligned}}$$

neboli
$$\boxed{w_1} \quad Lw_1=0 \text{ v } (a,b) \qquad w_1(x_0)=1,\ w_1'(x_0)=0, \dots, w_1^{(n-1)}(x_0)=0$$
$$\boxed{w_2} \quad Lw_2=0 \text{ v } (a,b) \qquad w_2(x_0)=0,\ w_2'(x_0)=1, \dots, w_2^{(n-1)}(x_0)=0$$
$$\vdots$$
$$\boxed{w_n} \quad Lw_n=0 \text{ v } (a,b) \qquad w_n(x_0)=0,\ w_n'(x_0)=0, \dots, w_n^{(n-1)}(x_0)=1.$$

Tvrdíme, že $\{w_1, \dots, w_n\}$ jsou lineárně nezávislé (LN). Je-li totiž $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i(x) = 0}$ v (a,b), pak dosazením x_0 dostanu $\lambda_1 = 0$,

zderivováním ↓ v (a,b), a dosazením x_0 — " — $\lambda_2 = 0$,

atd.

Tedy $\dim K \geq n$.

▶ Je-li y <u>libovolné řešení $Ly=0$</u>, tj. $y \in K$, pak položíme $\lambda_j = y^{(j-1)}(x_0)$. Tvrdíme, že pak $y(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j(x)$, kde w_j jsou zavedeny v (❀). Definujme
$$z(x) := y(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j(x).$$
Pak • $z(x_0) = z'(x_0) = \dots = z^{(n-1)}(x_0) = 0$
• $Lz = 0$ v (a,b)

a máme

a dle Důsledku A Věty 7.4 $z \equiv 0$, což implikuje
$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j(x) \quad \forall x \in (a,b).$$
Tedy $\dim K = n$. ∎

Pro ověření lineární nezávislosti řešení $Ly=0$ je užitečný pojem Wronskiánu.

$\boxed{\text{Definice}}$ (WRONSKIÁN) Mějme n funkcí $u_1,\dots,u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$.
Pak Wronskián těchto funkcí v bodě $x_0 \in (a,b)$ definujeme:

$$W_{[u_1,\dots,u_n]}(x_0) := \det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} =: \det \mathbb{V}(x_0)$$

jiné pomocné značení

$\boxed{\text{Věta 7.6}}$ Jsou-li $u_1,\dots,u_n$ lineárně závislé, pak $W_{[u_1,\dots,u_n]}(x)=0$ pro všechna $x\in(a,b)$.

Dk Z předpokladu plyne, že existuje netriviální kombinace $u_1,\dots,u_n$, která je nulová, tzn.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x) = 0 \ \text{ v } (a,b) \quad \text{a} \quad \lambda_i \text{ nejsou všechna nulová.}$$

Postupným derivováním

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^{(k)}(x) = 0 \ \text{ v } (a,b) \qquad \text{pro } k = 0,1,\dots,n-1$$

což implikuje $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{V}_i(x) = 0$ v (a,b) kde $\vec{V}_i(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1'(x) \\ \\ u_1^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}$

Tedy sloupce matice $\mathbb{V}(x)$ jsou lineárně závislé,
což implikuje $\det \mathbb{V}(x) = W_{[u_1,\dots,u_n]}(x) = 0$. ∎

- Obecně neplatí tvrzení: Jsou-li $u_1^{(x)},\dots,u_n^{(x)}$ lineárně nezávislé v (a,b), pak $W_{[u_1,\dots,u_n]}(x)\neq 0$ pro $x\in(a,b)$.

Skutečně: buď $I=\mathbb{R}$ a

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{v } (-\infty,0) \\ t^2 & \text{v } \langle 0,+\infty) \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} t^2 & \text{v } (-\infty,0) \\ 0 & \text{v } \langle 0,+\infty) \end{cases}$$

pak $\lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) = 0$ pro $\forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$,

ale

$$W_{[u_1,u_2]}(t) = \begin{cases} \det\begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t\end{pmatrix} = 0 & \text{v } (-\infty,0) \\ \det\begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0\end{pmatrix} = 0 & \text{v } \langle 0,+\infty). \end{cases}$$

- Pokud však $u_1, \dots, u_m$ řeší $Ly = 0$, pak již platí, že:
  " lineární nezávislost $\{u_1, \dots, u_m\} \Rightarrow W_{[u_1,\dots,u_m]} \neq 0$ "

Přesněji, platí následující věta.

$\boxed{\text{Věta 7.7}}$ Nechť $\{u_1, \dots, u_m\}$ řeší $L(y) = 0$. $\qquad L = L(x)$

Pak

$$(30) \qquad W'_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} W_{[u_1,\dots,u_m]}(x)$$

což je ekvivalentní s

$$(31) \qquad W_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = W_{[u_1,\dots,u_m]}(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{m-1}(s)}{a_m(s)}\, ds}.$$

Odsud plyne, že může nastat jen jedna z dvou možností:

$(\alpha) \quad \forall x \in (a,b): \quad W_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = 0$

$(\beta) \quad \forall x \in (a,b): \quad W_{[u_1,\dots,u_m]}(x) \neq 0.$

Navíc,

$(\neq)$ $\{u_1, \dots, u_m\}$ jsou lin. nezávislý systém v (a,b) $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in (a,b)$ tak, že $W_{[u_1,\dots,u_m]}(x_0) \neq 0$.

Dk $\boxed{\text{Ad (30)}}$ Tvrzení plyne z vlastností determinantu, což je součet vhodných součinů. Tak

$$W'_{[u_1,\dots,u_m]}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1^{(k+1)} & u_2^{(k+1)} & \dots & u_m^{(k+1)} \\ u_1^{(k+1)} & u_2^{(k+1)} & \dots & u_m^{(k+1)} \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OPAKUJÍ} \\ \text{SE ŘÁDKY} \\ \text{VYJMA POSLEDNÍHO}}}{=} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ u_1^{(m-2)} & u_2^{(m-2)} & \dots & u_m^{(m-2)} \\ u_1^{(m)} & u_2^{(m)} & & u_m^{m} \end{pmatrix}$$

užiji rovnici (ODR)

$$\underset{y_i^{(m)} = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(x)}{a_m(x)} y_i^{(j)}}{\overset{\downarrow}{=}} -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ u_1^{(m-2)} & u_2^{(m-2)} & & u_m^{(m-2)} \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} W_{[u_1,\dots,u_m]}(x),$$

což je ODR 1. řádu typu $y' + \frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} y = 0$, kterou umíme řešit. Tedy platí nejen (30), ale také $\boxed{(31), (\alpha), (\beta).}$ Zbývá ověřit ekvivalenci $(\neq)$.

$\boxed{\text{Ad}(\ddagger)}$ $(\ddagger)$ je ekvivalentní:

$(\bullet)$ $\{u_1, \dots, u_m\}$ jsou lineárně závislé $\iff$ $\forall x_0 \in (a,b)$ $W_{[u_1,\dots,u_m]}(x_0) = 0$

Dokažme tedy $(\bullet)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 7.6

$\boxed{\Leftarrow}$ Z předpokladu plyne, že sloupce matice W (viz definice Wronskián) jsou lineárně závislé. Vezměme $x_0 \in (a,b)$ lib., pevné. Pak existují $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ (ne všechna λ_j jsou nulová) tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j^{(k)}(x_0) = 0 \qquad \text{pro všechna } k = 0, 1, \dots, m-1$$

Pak $u(x) := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j(x)$ splňuje $\boxed{Lu = 0}$ (neb $Lu_j = 0$ dle předpokladu)

a $\boxed{u(x_0) = u'(x_0) = \dots = u^{(m-1)}(x_0) = 0}$. Dle Důsledku A Věty 7.4 $u \equiv 0$.

■

VLASTNOSTI ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE $Ly = f$

Z lineární algebry víme, že pro lineární operátor $L : V \to V$ ($\dim V < +\infty$) mohou nastat dvě varianty řešení rovnice $Lx = a$:

- Buď • řešení neexistuje
- Nebo • $x \in W_\alpha = \{\alpha + W\}$, kde $L\alpha = a$ (jedno speciální řeš.) a $W = \operatorname{Ker} L$ (prostor všech řeš. $\triangleright$ $a = 0$)

Řešíme rovnici $\boxed{L(t)y = f}$, o které víme, dle Věty 7.4, že řešení na (a,b) má (a je jediné pokud specifikujeme poč. podmínky). Z lineární algebry tedy víme, že obecné řešení $L(t)y = f$ má tvar:

$$\boxed{y^f_{obec}(x) = y^f_{part}(x) + y_{obec,hom}(x)}$$

Následující věta nám dává návod jak najít y^f_{part}.

$\boxed{\text{Věta 7.8}}$ $\boxed{\text{Variace konstant}}$ Buď $\{u_i\}_{i=1}^m$ báze prostoru $\{y \in C(a,b) ; Ly = 0\}$. [fundamentální systém]

Nechť $c_i : (a,b) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ jsou takové, že c_i řeší

$$(\heartsuit) \quad \begin{cases} c_1'(x) u_1(x) + \dots + c_m'(x) u_m(x) = 0 \\ c_1'(x) u_1'(x) + \dots + c_m'(x) u_m'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x) u_1^{(m-1)}(x) + \dots + c_m'(x) u_m^{(m-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{a_m(x)} \end{cases}$$

Pak $y^f_{part}(x) := \sum_{i=1}^{m} c_i(x) u_i(x)$ řeší $L(t)y = f$.

Dk: Dosazuji y^f_{part} do rovnice a užiji $(\heartsuit)$. ■

Otázkou zůstává jak najít $c_i'(x)$ resp. $c_i(x)$. Pozorujme, že

$$(\heartsuit) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \cdots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}}_{\mathbb{W}} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{f}{a_m} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $\det \mathbb{W} = W_{[u_1,\dots,u_m]}$, který bude nenulový vždy pokud $\{u_1,\dots,u_m\}$ jsou lineárně nezávislé. Tedy dle Cramerova pravidla

$$c_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(x)} \quad \text{kde } W_i = \det \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_{i+1} & \cdots & u_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-1)} & \cdots & u_i^{(m-1)} & \frac{f}{a_m} & u_{i+1}^{(m-1)} & \cdots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i+m} \frac{f}{a_m} \det \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_{i-1} & u_{i+1} & u_m \\ \vdots & & & \\ u_1^{(m-2)} & u_{i-1}^{(m-2)} & u_{i+1}^{(m-2)} & u_m^{(m-2)} \end{pmatrix}}_{\text{matice } (m-1)\times(m-1)}.$$

Tak

$$y^f_{part}(x) = \sum_{i=1}^m c_i(x) u_i(x), \text{ kde}$$

$$c_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{a_m(s)} \frac{(-1)^{i+m}}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & \cdots & u_{i-1}(s) & u_{i+1}(s) & \cdots & u_m(s) \\ \vdots & & \vdots & & & \\ u_1^{(m-2)}(s) & \cdots & u_{i-1}^{(m-2)}(s) & u_{i+1}^{(m-2)}(s) & \cdots & u_m^{(m-2)}(s) \end{pmatrix}$$

neboli

$$\boxed{y^f_{part}(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{a_m(s)} \frac{1}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & \cdots & u_m(s) \\ & & \\ u_1^{(m-2)}(s) & \cdots & u_m^{(m-2)}(s) \\ u_1(x) & \cdots & u_m(x) \end{pmatrix} ds}$$