② Spočtěte $I_1 := \int_0^\infty \cos x^2 \, dx$, $I_2 := \int_0^\infty \sin x^2 \, dx$ Fresnelovy integrály

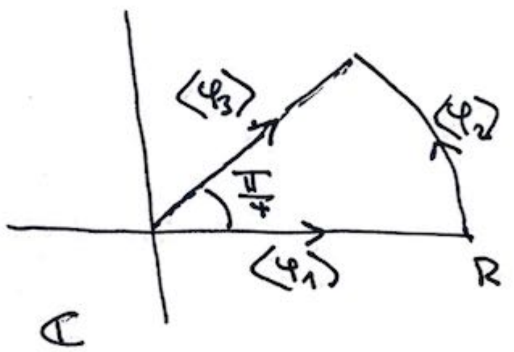
Řešení: Uvažme $f(z) = e^{iz^2}$, $z \in \mathbb{C}$. Pak $f \in H(\mathbb{C})$.

Uvažujme křivku $\gamma = \langle \varphi_1 \rangle + \langle \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_3 \rangle$, kde (viz obrázek)

$\varphi_1(t) = t \quad t \in (0, R)$

$\varphi_2(t) = Re^{it} \quad t \in (0, \frac{\pi}{4})$

$\varphi_3(t) = te^{i\frac{\pi}{4}} \quad t \in (0, R)$



Dle Cauchy-Goursatovy věty 15.5

(*) $$0 = \int_{\langle \varphi_1 \rangle + \langle \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_3 \rangle} e^{iz^2} \, dA$$

Dále

▷ $$\int_{\langle \varphi_1 \rangle} e^{iz^2} dA = \int_0^R e^{it^2} dt = \int_0^R \cos t^2 dt + i \int_0^R \sin t^2 \xrightarrow{R \to \infty} I_1 + i I_2$$

(pokud obyčejné členy mají limitu)

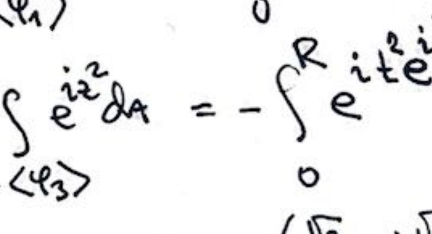
▷ $$\int_{-\langle \varphi_3 \rangle} e^{iz^2} dA = -\int_0^R e^{it^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt$$

$$\xrightarrow[R \to \infty]{} -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^\infty e^{-t^2} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

▷ $$\int_{\langle \varphi_2 \rangle} e^{iz^2} dA = iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} e^{it} dt \qquad \text{Protože } e^{iR^2 e^{2it}} = e^{iR^2 \cos 2t} e^{-R^2 \sin 2t},$$

tak $$\left| \int_{\langle \varphi_2 \rangle} e^{iz^2} dA \right| \le R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2t} dt \underset{\substack{x = 2t \\ dx = 2dt}}{=} \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin x} dx$$

$$\le \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \frac{2x}{\pi}} dx$$



$$= -\frac{\pi R}{2 \cdot 2R^2} \left[e^{-\frac{2R^2 x}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$y = ax + b$

$$= \frac{\pi}{4R} \left[1 - e^{-R^2} \right] \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

Tedy celkově z (*):

$$\boxed{I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad a \quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$$

Tvrzení (derivace integrálu podle komplexního parametru) aneb záměna komplexního (křivkového) integrálu a komplexní derivace)

[Buď • $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ otevřená
• $\gamma \subset \Omega$ regulární křivka
• $f : \underset{z}{\Omega} \times \underset{w}{G} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\gamma \times G$
• $\frac{\partial f}{\partial w} : \Omega \times G \to \mathbb{C}$ spojitá na $\gamma \times G$ }

$\boxed{\text{Pak}}$
• $g(w) := \int_\gamma f(z,w)\,dz \in H(G)$
• $g'(w) = \frac{d}{dw}\int_\gamma f(z,w)\,dz = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\,dz$

Dk: Počítejme $g'(w)$ z definice:

$$(\bullet)\left\{\begin{aligned}
\frac{g(w+h)-g(w)}{h} &= \frac{1}{h}\int_\gamma \left[f(z,w+h) - f(z,w)\right] dz \\
&\overset{\text{Newtonův vzoreček}}{=} \frac{1}{h}\int_\gamma \int_0^1 \frac{d}{dt} f(z, w+th)\,dt\,dz \\
&= \frac{1}{h}\int_\gamma \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z, w+th)\,h\,dt\,dz \\
&= \int_\gamma \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\,dt\,dz + \int_\gamma \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(z,w+th) - \frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\,dt\,dz
\end{aligned}\right.$$

$$= \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\,dz + I_{rest}$$

Protože

$$|I_{rest}| \leq \underbrace{\sup_{z\in\gamma} \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial w}(z, w+th) - \frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\right| dt}_{\to 0} \cdot l_\gamma$$

délka křivky γ

spojitost na kompaktu $\gamma \times B_\varrho(w)$

$\blacksquare$

Pomocí Cauchy-Goursatovy věty a výše uvedeného tvrzení dokážeme následující významný výsledek, tzv.

Cauchyův vzorec pro kruh

Věta 15.7. **Cauchyův integrální vzorec pro kruh a jeho 1. významný důsledek**

Buď $f\in H(B_R(a))$. Buď $\varrho\in(0,R)$. Pak pro každé $w\in B_\varrho(a)$

$$\boxed{f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(a)}\frac{f(z)}{z-w}\,dz}$$

! Hodnota f uvnitř se dá spočítat z hodnot f na hranici

Navíc

$$\boxed{f^{(k)}(w)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(a)}\frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}}\,dz} \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

tzn. $f^{(k)}\in H(B_\varrho(a))$ $(\forall \varrho\in(0,R))$ $\Rightarrow$ $f^{(k)}\in H(B_R(a))$

neboli existence derivace $f'(z)$ $\forall z\in B_R(a)$ implikuje automaticky existenci $f^{(k)}(z)$ $\forall z\in B_R(a)$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

(Dk) • Začneme obrázkem.

• Dále víme, že $f\in H(B_R(a))$, $\frac{1}{z-w}\in H(\mathbb{C}\setminus\{w\})$

a tedy určitě

$$\frac{f(z)}{z-w}\in H(\underbrace{B_\varrho(a)\setminus B_\varepsilon(w)}_{\mathcal{O}})$$

• Dle Cauchy-Goursatovy věty 15.5 $\quad \int_{\partial\mathcal{O}}\frac{f(z)}{z-w}\,dz=0$

Ale: $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{O}}\frac{f(z)}{z-w}\,dz=\int_{\partial B_\varrho(a)}\frac{f(z)}{z-w}-\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{f(z)}{z-w}\,dz$

• Stačí tedy dokázat, že

$$\boxed{\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{f(z)}{z-w}\,dz\xrightarrow[\varepsilon\to0+]{}2\pi i\,f(w)\qquad (*)}$$

— Nejdříve pozorujme, že

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{f(w)}{z-w}\,dz=f(w)\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{dz}{z-w}\underset{\substack{z=w+\varepsilon e^{it}\\ t\in(0,2\pi)}}{=}f(w)\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}}\,dt=2\pi i\,f(w).$$

— Naopak

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{f(z)}{z-w}\,dz=\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{f(w)}{z-w}\,dz+\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,dz\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}2\pi i\,f(w)$$

neboť

$$\int_{\partial B_\varepsilon(w)}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,dz\underset{\substack{z=w+\varepsilon e^{it}\\ t\in(0,2\pi)}}{=}i\int_0^{2\pi}\left[f(w+\varepsilon e^{it})-f(w)\right]dt\xrightarrow{\varepsilon\to0}0$$

díky spojitosti f v $B_R(a)$.

K důkazu druhé části (vyšší $\mathbb{C}$-diferencovatelnosti) využijeme Cauchyův vzorec (platný pro $k=0$), matematickou indukci a Tvrzení o derivaci komplexního křivkového integrálu dle komplexního parametru.

Tvrzení aplikujeme na situaci:

- $\gamma = \partial B_\varrho(a)$, • $f(z,w) := \dfrac{f(z)}{z-w}$ která je spojitá na $\gamma \times B_\varrho(a)$
- $\dfrac{\partial f(z,w)}{\partial w} = \dfrac{f(z)}{(z-w)^2}$, která je také spojitá v $\left\{ \right.$ či $\gamma \times B_{\tilde\varrho}(a)$ $(\tilde\varrho < \varrho)$

Tedy $$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(a)} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz. \quad \text{atd.}$$

Q.E.D. 

DALŠÍ FUNDAMENTÁLNÍ DŮSLEDKY CAUCHY-GOURSATOVY VĚTY a CAUCHYHO INTEGRÁLNÍ FORMULE PROJDEME POZDĚJI.

Sérii zakončíme shrnutím, které nazveme

Komplexní funkce a rovinná vektorová pole

Pro $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsme zavedli $\int_\gamma f(z)\,dz$, pro který platí (viz Věta 15.4)

$$(*) \quad \boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (f_1, -f_2)\cdot \vec{ds} + i \int_\gamma (f_2, f_1)\cdot \vec{ds}}$$

Tedy

- $\boxed{f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}}$ lze přiřadit dvě rovinná pole $\boxed{\vec{A} = (f_1, -f_2)}$ $\boxed{\vec{B} = (f_2, f_1)}$

  Protože $(f_1 - i f_2)i = f_2 + i f_1$ tak $\vec{B}$ je pole získané otočením $\vec{A}$ o $90°$.

- Dále $\vec{ds} = \vec{\varphi}'(t)\,dt = \vec{t}\,ds$ a tečný vektor $\vec{t}$ je otočením normálového vektoru $\vec{n}$ o $90°$.

Tedy $\underbrace{\vec{B}\cdot\vec{t}\,ds}_{\vec{B}\cdot\vec{ds}} = \vec{A}\cdot\vec{n}$ a tak z $(*)$:

$$(**) \quad \int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_\gamma \vec{A}\cdot\vec{t}\,ds}_{\text{cirkulace } \vec{A} \text{ podél } \gamma} + i \underbrace{\int_\gamma \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds}_{\text{tok } \vec{A} \text{ přes křivku } \gamma} = -\int_\gamma \vec{B}\cdot\vec{n}\,ds + i \int_\gamma \vec{B}\cdot\vec{t}\,ds$$

- VÝRAZY $\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} - \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \end{array}}$ z pohledu $\vec{A}, \vec{B}$ mají formulaci $\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{A} & \operatorname{curl} \vec{B} \\ \operatorname{div} \vec{B} & \operatorname{curl} \vec{A} \end{array} \right.$

Odsud:

- je-li f holomorfní v Ω (splňují (CR) podmínky) $\quad 0 = \operatorname{div}\vec{A},\ \operatorname{curl}\vec{A} = 0 \quad$ $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\operatorname{curl}\vec{B} = 0$

- Je-li γ uzavřená, f holomorfní

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{s} + i\int_\gamma \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds$$

$$\xrightarrow{\text{Green}} \quad \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

$$\underbrace{\int_\Omega \operatorname{rot}\vec{A}\,dx\,dy + i\int_\Omega \operatorname{div}\vec{A}\,dx\,dy}_{=0}$$

——— analogicky pro $\vec{B}$

- f má komplexní potenciál F v Ω $\overset{df.}{\equiv}$ f má v Ω primitivní fci $F \equiv F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

$$F = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

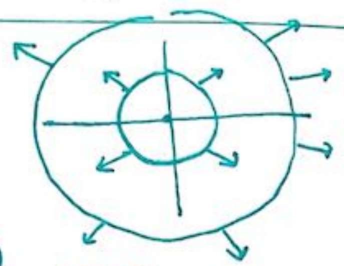
$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (f_1, -f_2) \qquad \vec{A} = \nabla\phi$$

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = (f_2, f_1) \qquad \vec{B} = \nabla\psi$$

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\nabla\phi) \qquad \Delta\phi = \operatorname{div}\vec{A}$$

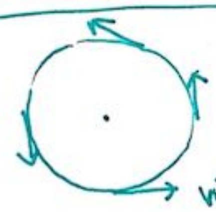
$$\Delta\psi = \operatorname{div}(\nabla\psi) \qquad \Delta\phi = \operatorname{div}\vec{B}$$

Příklad. $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2+y^2}$ $\qquad \vec{A} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$



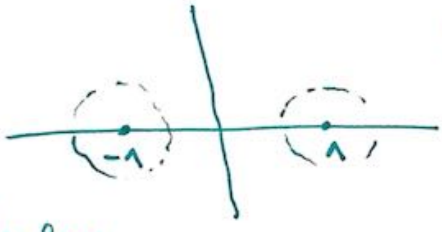
zdroj v 0 o intenzitě 2π

$$\vec{B} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$



vír o intenzitě 2π.

- $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$



Dva zdroje, dva víry → bipól

„Komplexní" popis vhodný pro kmitání/oscilace

$z + w$, $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$