[8] 3.
- Uveďte metrickou definici (=definici založenou na pojmu konvergence) kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}^d$. [1]
- Dokažte, vycházeje z této definice a pojmu spojitosti funkce, že platí: *Obraz kompaktní množiny při spojitém zobrazení je kompaktní množina.* [3]
- Jaké další vlastnosti platí pro spojité funkce na kompaktních množinách v $\mathbb{R}^d$? Vlastnosti zadefinujte, tvrzení nedokazujte. 1,5
- Zadefinujte prostor ℓ^2 a shrňte jeho základní vlastnosti (zejména ty týkající se linearity, skalárního součinu, normy, metriky, dimenze). Speciálně: zadefinujte jednotkovou kouli v prostoru ℓ^2. Je uzávěr této koule kompaktní v ℓ^2? 2,5

Řešení

- K je komp. $\equiv \forall \{x_n\} \subset K \; \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}$ a $\exists x \in K : x_{n_k} \to x$ v $\mathbb{R}^d$ 1
- $f(K) = f[K]$ je kompakt (jestliže $K \subset \mathbb{R}^d$ kompt.)

Dk: $\{y^n\}_{n=1}^{\infty} \subset f[K] \Rightarrow \exists \{x^n\} \in K : f(x^n) = y^n$

Protože K je kpt: $\exists \{x^{n_k}\} \subset$ a $x \in K$: $x^{n_k} \to x$ v $\mathbb{R}^d$

f spojitá (Heine): $\underbrace{f(x^{n_k})}_{= y^{n_k}} \to f(x) \in f[K]$

Tedy máme vybranou podposloupnost $y^{n_k} := f(x^{n_k})$, která konverguje k $f(x) =: y$ a $y \in f[K]$.

Tedy $f(K)$ je komp.

- $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ komp. $\Rightarrow f$ je omezená na K $(\exists M > 0 \; |f(x)| \leq M \; \forall x \in K)$

$\Rightarrow f$ je stejnoměrně spoj. na K: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; \forall x', x'' \; |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ nabývá v K maxima/minima $\equiv \exists x_{MIN}, x_{MAX} \in K$ taky, že $f(x_{MIN}) \leq f(y) \; \forall y \in K$ a $f(x_{MAX}) \geq f(y) \; \forall y \in K$.

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$$

- ℓ^2 – lineární
  - Hilbertův $\quad (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$
  - normovaný
  - metrický $\quad d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$
  - úplný $\quad B^1_{\ell_2}(0) := \left\{ x \in \ell_2 ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < 1 \right\}$

$x^m \in \ell_2 : x^m_i = (\delta_{im}, \ldots)$ nelze vybrat konv.

[8] 2. Matematickými symboly zapište objekt *homogenní skalární lineární obyčejná diferenciální rovnici 4-tého řádu s konstantními reálnými koeficienty.*

- Pro tuto rovnici zformulujte počáteční úlohu.
- Převeďte tuto skalární rovnici (a tuto počáteční úlohu) na systém rovnic prvního řádu $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ (a odpovídající počáteční úlohu). Uveďte explicitně tvar $\mathbf{f}(\mathbf{y})$.
- Zadefinujte pojem řešení pro takto zavedenou počáteční úlohy systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.
- Zaveďte takto zavedenou počáteční úlohu pro systém rovnic prvného řádu ekvivalentní integrální formulaci a ekvivalenci dokažte.
- Co lze říci o existenci a dalších kvalitativních vlastnostech (jako jsou jednoznačnost, hladkost) řešení této úlohy?
- Ukažte, že $\mathbf{f}$, uvedená v druhém puntíku, je lipschitzovsky spojitá (uveďte definici tohoto pojmu) na D_f

Řešení

- (1) $\underline{y'''' + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$ $\quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, 3$ (1)

- Počáteční úloha: nalézt, pro dané $t_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0^*, y_1^*, y_2^*, y_3^* \in \mathbb{R}$, funkci $y: (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}$ splňující (1) a poč. podmínky:
$$y(t_0) = y_0^*,\ y'(t_0) = y_1^*,\ y''(t_0) = y_2^*,\ y'''(t_0) = y_3^*$$ (1)

- $y_1 := y,\ y_2 := y',\ y_3 := y'',\ y_4 := y''' \Rightarrow$

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 - a_3 y_4 \end{aligned}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$ (1)

$$f(y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 - a_3 y_4 \end{pmatrix}$$

- Řekneme, že $\vec{y}: (t_0-\delta, t_0+\delta)$ je řešením (*) a splňuje $\vec{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0^* \\ \vdots \\ y_3^* \end{pmatrix}$, pokud ~~řeší~~ existuje $\vec{y}'(t)$ $\forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ a $\vec{y}$ splňuje jak (*) v $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ tak poč. podmínku.

Ozn. $\vec{y}^*$

(0.5)

2,0

• Integrální formule

$$\boxed{\vec{y}(t) = \vec{y}^* + \int_{t_0}^{t} f(y(s))\,ds} \iff \boxed{\begin{array}{l}\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t)) \quad \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}^*\end{array}}$$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ • pro $t = t_0$ je $\int_{t_0}^{t_0} f(y(s))\,ds = 0$, tedy $\underline{y(t_0) = y^*}$

• $\vec{y}'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t} f(y(s))\,ds\right] = f(y(t))\,dt$

derivování integrálu dle horní meze

$\boxed{\Leftarrow}$ integrací $\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t))$ přes t od t_0 do t.

$$\int_{t_0}^{t} \vec{y}'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\vec{y}(s))\,ds$$

$$\overset{\text{Newton}}{=}\ \vec{y}(t) - \vec{y}(t_0), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}^*$$

1

• Protože je rovnice lineární s koeficienty konst. (definovány a hladké v $\mathbb{R}$), tak řeš. existuje, je jediné a je C^∞ na celém $\mathbb{R}$.

1

• $\vec{f}(y)$ je lipschitz. funkce na D_f $\equiv$ $\exists \lambda > 0\ \forall \vec{y}^1, \vec{y}^2 \in \mathbb{R}^4$

$$|f(\vec{y}^1) - f(\vec{y}^2)|_{\mathbb{R}^4} \le \lambda |\vec{y}^1 - \vec{y}^2|_{\mathbb{R}^4}$$

Po složkách:

1

1. ř. $|y_2^1 - y_2^2| \le 1\, |y^1 - y^2|_{\mathbb{R}^4}$

2. ř. $|y_3^1 - y_3^2| \le$ —//—

3. ř. $|y_4^1 - y_4^2| \le$ —//—

4. ř. $|a_0(y_1^1 - y_1^2) + a_1(y_2^1 - y_2^2) + a_2(y_3^1 - y_3^2) + a_3(y_4^1 - y_4^2)|$

$\le \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|\}\, |y^1 - y^2|_{\mathbb{R}^4}$

[8] 3. (1) Uveďte definici Banachova prostoru, dále značeného symbolem X, včetně definic všech pojmů, které k této definici potřebujete.

(2) Zadefinujte pojmy T je kontraktivní zobrazení na X a T má v X pevný bod.

(3) Zformulujte Banachovu větu o pevném bodě a dokažte část týkající se jednoznačnosti.

(4) Užijte Banachovu větu a ukažte, že existuje řešení rovnice $4x + 3\cos x = 15$.

• Banachův prostor:

0.5 • lineární (vektorový) $\equiv \forall x,y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}):\ \alpha x \in X,\ x+y \in X$

1 • normovaný $\equiv \exists\, \|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}_0^+$ splňující • ≥ 0, 1-hom. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, Δ-ner. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

0.5 • úplný $\equiv (\forall \text{ cauchy } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X)(\exists x_0 \in X)\ x_n \to x$ v X, $\|x_0 - x\|_X \to 0$

• $T: X \to X$ je kontr. $\equiv \exists\, \theta \in (0,1):\ \forall x,y \in X\quad \|Tx - Ty\|_X \leq \theta \|x-y\|_X.$

1

$T: X \to X$ má v X pevný bod. $\equiv \exists x_0 \in X:\ Tx_0 = x_0.$

1

• $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův, $T: X \to X$ kontrakce $\Big\} \Rightarrow \exists!\, x_0 \in X\quad Tx_0 = x_0.$

1

Dk jednoz. Kdyby existovaly $x_0^1, x_0^2 \in X$ dva pevné body:

$$\|x_0^1 - x_0^2\|_X = \|Tx_0^1 - Tx_0^2\|_X \underset{\text{kontr.}}{\leq} \theta \|x_0^1 - x_0^2\|_X \Rightarrow (1-\theta)\|x_0^1 - x_0^2\| = 0$$

pevný b.

vlastnost normy $\Downarrow$ $x_0^1 = x_0^2.$

1,0

• buď $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dáno předpisem

$$Tx = \frac{15}{4} - \frac{3}{4}\cos x$$

1

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je úplný 0.5

T je kontrakce $\quad |Tx^1 - Tx^2| = \frac{3}{4}|\cos x_1 - \cos x_2| \overset{\text{LVOSH}}{=} \frac{3}{4}|\sin\xi|\,|x_1 - x_2| \leq \frac{3}{4}|x_1 - x_2|$

0.5

Q.E.D.