8.4 Limita, spojitost a derivace (vektorových) funkcí více proměnných

- Buď $f: M \to \mathbb{R}^m$, kde $M \subset \mathbb{R}^d$, $d, m \in \mathbb{N}$, typicky $d \geq 2$.

Úmluva: přestaneme používat šipek, ale důsledně budeme psát, kam dané objekty patří. Tak

$$f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m \text{ znamená}$$

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, f_m(x_1, \dots, x_d)) \quad \text{kde } \underset{(x_1,\dots,x_d)}{\overset{}{x}} \in M$$

- Je-li $m = 1$, mluvíme o skalárních funkcích.

Def. (limity) Řekneme, že f má v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ limitu $A \in \mathbb{R}^m$, (píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$), právě když,

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0|_{\infty, \mathbb{R}^d} < \delta)(|f(x) - A|_{\infty, \mathbb{R}^m} < \varepsilon)}$$

≡ neboli:

$$(\forall U_\varepsilon(A))(\exists P_\delta(x_0))\,\underbrace{(x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A))}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(P_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)$$

≡ neboli:

$$\boxed{(\forall U(A))(\exists P(x_0))(f(P(x_0)) \subset U(A))}$$

topologická definice spojitosti

$U(A)$ .... libovolná otevřená množina obsahující A

$P(x_0)$ .... libovolná otevřená množina obsahující x_0 mínus $\{x_0\}$. tj. $P(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Def. (spojitosti f v x_0) Řekneme, že f je v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ spojitá, právě když, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

≡ neboli

$$(\forall U(f(x_0)))(\exists U(x_0))\quad(f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))).$$

Rozmyslete si, že i v $\mathbb{R}^d$ (a také v libovolném úplném vektorovém metrickém prostoru (M,ϱ)) platí následující tvrzení známá z teorie funkcí jedné reálné proměnné (viz ZS):

- o jednoznačnosti limity
- o aritmetice limit
  - ▶ $f,g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$
  - ▶ $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = A+B$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = AB$
  - pokud $B \neq 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

  o dvou strážnících:
  - ▶ je-li navíc $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková, že $P(x_0) \subset D_h \cap D_f \cap D_g$

    a $f(x) \le h(x) \le g(x)$ pro $x \in P(x_0)$

    a $A = B$, pak $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$

- o limitě složeného zobrazení

(A)
  - ▶ Jsou-li (M,ϱ_1), (N,ϱ_2) a (P,ϱ_2) tři metrické prostory

    a $f : M \to N$ a $g : N \to P$ a $x_0 \in M$
  - ▶ Pokud $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in N$ a $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0 \in P$

    a x_0 je hromadným bodem $D_{g\circ f}$
  - ▶ Pokud • buď $\exists\, P(x_0)$ tak, že $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in P(x_0)$

    nebo g je spojitá v y_0

  Pak $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

- o spojitosti složeného zobrazení
  - ▶ Platí-li (A) a g je spojitá v $f(x_0)$ a f je spojitá v x_0,

    pak <u>$g\circ f$ je spojitá v x_0</u>, tj. $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$.

- o existenci okolí, kde je ji funkce omezená
- Heineho věta (obě varianty)

▶ (M,ρ_1), (N,ρ_2) metrické a $x_0\in M$ je hromadným bodem D_f

$f:(M,\rho_1)\to(N,\rho_2)$ a $y_0\in N$

Pak

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0 \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D_f\setminus\{x_0\}: \boxed{x_n\to x_0 \text{ v } (M,\rho_1)} \Rightarrow \boxed{f(x_n)\to y_0 \text{ v } (N,\rho_2)}$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff$ —||— existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Pro $d=1$ jsme měli větu o jednostranných limitách:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existuje a $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existuje a obě se rovnají.

! Následující příklad ukazuje, že i když limity po všech přímkách existují a rovnají se, tak existence $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ zaručena <u>není</u>!

<u>Příklad</u> ① Buď $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ definována vztahem $x_0=(x_{01},x_{02})$

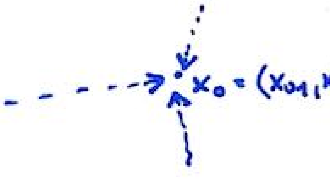
$$f(x)=f(x_1,x_2)=\frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}$$

Pak $x_2=kx_1$, $k\in\mathbb{R}$, popisují přímky procházející počátkem.

Platí
$$f(x_1,kx_1)=\frac{x_1^2\,kx_1}{x_1^4+k^2x_1^2}=\frac{kx_1}{k^2+x_1^2}\to 0 \quad\text{pro } x_1\to 0.$$

Tedy kandidát na $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ je 0. Přesto $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje,

neboť vezmeme-li $x_2=kx_1^2$ (tzn. jdeme do počátku po parabole)



pak
$$\lim_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=kx_1^2}=\lim_{x_1\to 0}\frac{kx_1^4}{x_1^4+k^2x_1^4}=\lim_{x_1\to 0}\frac{k}{k^2+x_1^4}=\frac{1}{k}$$
pro $k\neq 0$.

② Buď $f(x)=\dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$. Pak $\lim\limits_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=0}=0$

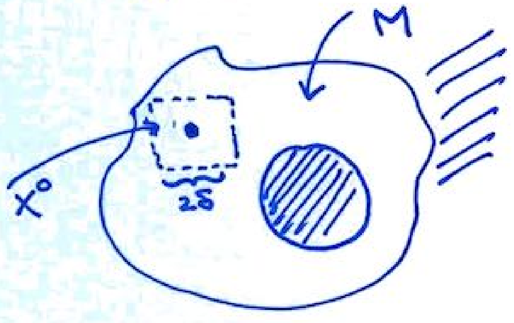
a $\lim\limits_{x_2\to 0} f(x)\Big|_{x_1=0}=0$, ale $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

<u>Řešení</u>: $\lim\limits_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=x_1}=\dfrac{1}{2}$.

Definice ($\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f$) Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $x^0 \in M$. Pro $f: M \to \mathbb{R}$ definujme

$$\left.\begin{aligned} g_1(\xi) &= f(\xi, x_2^0, \dots, x_d^0) \\ g_2(\xi) &= f(x_1^0, \xi, \dots, x_d^0) \\ &\vdots \\ g_d(\xi) &= f(x_1^0, \dots, x_{d-1}^0, \xi) \end{aligned}\right\}$$

Pak $g_i : (x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta) \to \mathbb{R}$



neboli g_i jsou funkce jedné reálné proměnné ($i = 1, \dots, d$)

Předpokládejme, že $g_i'(x_i^0)$ existuje, tzn.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_1^0 + t, \dots, x_d^0) - f(x_1^0, \dots, x_d^0)}{t} \quad \text{existuje,}$$

pak $g_i'(x_i^0)$ nazveme parciální derivace f podle proměnné x_i

a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$. Tedy máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{\xi \to x_i^0} \frac{g_i(\xi) - g_i(x_i^0)}{\xi - x_i^0} = \lim_{\xi \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \dots, \xi, \dots, x_d^0) - f(x^0)}{\xi - x_i^0}$$

$$h := \xi - x_i^0 \longrightarrow \quad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots) - f(x^0)}{h}$$

Jiná značení: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \partial_{x_i} f(x_0) = \partial_i f(x_0)$.

DEFINICE

Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0)\right)$ se nazývá gradient f v x_0 a značí se $\nabla f(x^0)$, nebo $\operatorname{Grad} f(x^0)$.

Je-li $f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, M otevřená, $x^0 \in M$, pak matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x^0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(x^0) \end{pmatrix}$$

$m \dots$ řádků, $d \dots$ sloupců

se nazývá JAKOBIÁN nebo JAKOBIho matice a značí se $Df(x^0)$ nebo $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(x^0)$.

Definice Je-li $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pak Jakobián je čtvercová matice a její stopa (součet prvků na diagonále) se nazývá divergence f v bodě x^0, tj.

$$\operatorname{div} f(x^0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) = \operatorname{tr} Df(x^0).$$

Einstein $\sum$ konvence

FYZICI: $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$

$\boxed{\text{Je-li } d=3}$, pak

$$\operatorname{curl} f(x^0) = \operatorname{rot} f(x^0) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

FYZICI: $\operatorname{curl} \vec{f} = \nabla \times \vec{f}$

rotace f v x^0

Také: pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$Df(x^0) = \frac{Df(x^0) + [Df(x^0)]^T}{2} + \frac{Df(x^0) - [Df(x^0)]^T}{2}$$

jen pro $d=3$ pro jednoduchost

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right] & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right] \\ & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right] \\ & & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}(x^0) + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right] & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right] \\ - & 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right] \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\text{symetrická část}}{\mathbb{E}f(x^0)} + \underset{\text{antisymetrická část}}{\mathbb{W}f(x^0)}$$

POROVNEJ SLOŽKY $\mathbb{W}f(x^0)$ SE SLOŽKAMI $\operatorname{curl} f(x^0)$

$\boxed{\text{Je-li } d=2}$ $f = (f_1, f_2)$

$$\operatorname{rot} f(x^0) = \underset{\text{VEKTOR}}{\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)} \qquad \operatorname{curl} f(x^0) = \underset{\text{SKALÁR}}{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}$$

Definice (SMĚROVÁ DERIVACE resp. DERIVACE f V BODĚ x_0 VE SMĚRU $\vec{v}$)

$$\partial_v f(x^0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}$$, pokud tato limita existuje.

$\left[\ x^0\in M,\ M\subset\mathbb{R}^d \text{ otevřená},\ v=(v_1,\dots,v_d) \text{ tak, že } |\vec{v}|_2=1\ \right]$

Odsud a z definice $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ plyne: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)=\partial_{e_i}f(x^0)}$

kde $e_i := (0,\dots,1,\dots,0)$ — 1 na i-té místo.

Definice (DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ) INDUKTIVNĚ.

např. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)=\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^0)$ kde $h(z)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(z)$ pro $z\in U_\delta(x^0)$.

$\boxed{\text{Příklady}}$ ① Buď $f(x)=\sin(x_1x_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Pak $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=x_2\cos(x_1x_2)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)=x_1\cos(x_1x_2)$

Také $\nabla f(x)=(x_2\cos(x_1x_2),\ x_1\cos(x_1x_2))$

② Je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ lineární (nebo afinní) funkce, tj.

$f(x)=\sum_{i=1}^d a_ix_i$ (resp. $f(x)=\sum_{i=1}^d a_ix_i+b$)

pak $\nabla f(x)=(a_1,\dots,a_d)\quad\forall x\in\mathbb{R}^d$

③ Podobně, je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ dáno předpisem

$$f(x)=\mathbb{A}x+b=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1d}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{md}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Pak

$Df(x)=\mathbb{A}$ pro $\forall x\in\mathbb{R}^d$.

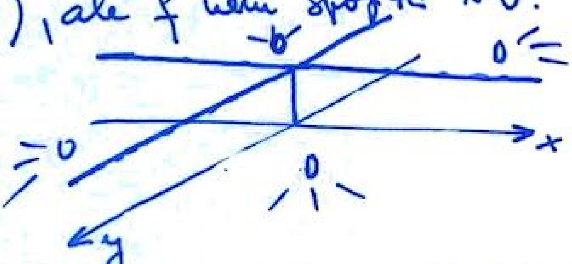
$\boxed{\text{Věta 8.12}}$ Existují-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)$ [a $g(x^0)\neq 0$ pro derivování podílu], pak existují $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x^0)$ a platí: $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial g}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

Dk: Dle vět o derivování součtu, součinu, podílu pro funkce jedné reálné proměnné. ☒

WARNING! Z existence parciálních derivací v x^0 <u>neplyne</u> spojitost f v x_0, jak ukazuje následující jednoduchý příklad

Př. Buď
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (Ověřte!), ale f není spojitá v 0.



$\boxed{\text{Věta 8.13}}$ (O derivování složené funkce)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $g: M \to \mathbb{R}^m$ má v $x \in M$ parciální derivace. Buď $g(M) \subset N$ a $f: N \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v N. Pak fce
$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$
je v M definována a má parciální derivace.

Navíc $[(f \circ g): M \to \mathbb{R}]$

(Ř1)
$$\boxed{\underbrace{\nabla(f \circ g)(x)}_{d\text{-vektor}} = \underbrace{(\nabla f)(g(x))}_{m\text{-vektor}} \ \underbrace{Dg(x)}_{\text{Matice } m \times d}}$$

$$\nabla(f \circ g)(x) = \nabla_y f(y)\Big|_{y=g(x)} Dg(x)$$

neboli
$$\left(\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_d}(x)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Je-li $f: \underset{}{\overset{\subset \mathbb{R}^m}{N}} \to \mathbb{R}^s$ $(s > 1, s \in \mathbb{N})$, pak $f \circ g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$

a platí

(Ř2)
$$\boxed{\underbrace{[D(f\circ g)](x)}_{s \times d\text{-matice}} = \underbrace{[Df](g(x))}_{s \times m \text{ matice}} \ \underbrace{[Dg](x)}_{m \times d\text{-matice}}}$$

(Dk) Buď $e^i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{di})$ jednotkový vektor v i-tém směru.

Chceme ukázat, že pro $i = 1, 2, \dots, d$

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i}$$

Avšak:

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$\overset{\text{Lagrange}}{\underset{\text{VOSH}}{=}} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x+\theta_1 he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_1(x+he^i) - g_1(x)}{h}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_2}(g_1(x), g_2(x+\theta_2 he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_2(x+he^i) - g_2(x)}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+\theta_m he^i)) \frac{g_m(x+he^i) - g_m(x)}{h}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x)$$

kde jsme využili:

(•) skutečnost, že $g_k(x+he^i) \to g_k(x)$ pro $h \to 0$, což plyne z existence $\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x)$.

(••) skutečnost, že $\frac{g_k(x+he^i) - g_k(x)}{h} \to \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x)$ dle předpokladu věty

(•••) věta o limitě složeného zobrazení v případě, kdy vnější funkce je spojitá.

∎

$\boxed{\text{Věta } 8.14}$ (Spojité $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v x $\Rightarrow$ existenci $\partial_{\vec v} f(x)$)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f: M \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace (1. řádu) v M. Pak pro každé $x \in M$

$$\boxed{\partial_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v = (\nabla f(x), v)_{\mathbb{R}^d}}$$

Dk. Víme, že pro $v = (v_1, \dots, v_d)$ s $|\vec v|_E = 1$ platí

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} \overset{\text{Věta } 8.13}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i$$

$$= (\nabla f(x), v)$$

Odsud a Cauchy-Schwartzovy nerovnosti plyne mimořádný důsledek.

Víme, že (dle (C-S) $\leq$):

$$|\nabla f(x)| \leq -|\nabla f(x)|\,|v| \leq (\nabla f(x), v) \leq |\nabla f(x)|_E |v|_E \leq |\nabla f(x)|_E$$

přičemž rovnost nastane jsou-li v a $\nabla f(x)$ kolineární, tzn. pro $v = \pm \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$. Tedy: směrová derivace, která udává v daném bodě a ve zvoleném směru směrnici tečny v daném směru tj. jak se funkce v daném směru v blízkosti x chová (roste, klesá a jak rychle),

je největší ve směru $\vec v = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

a je nejmenší —ıı— $\vec v = -\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

Tedy, gradient fce f v bodě x měří (tzn. je) směr největšího růstu/poklesu funkce f.

Zavedli jsme derivace vyšších řádů, a říkali jsme, že

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ znamená, že nejdříve derivuji podle proměnné x_j a poté podle proměnné x_i. Otázka zní, zda dostanu stejný výsledek, když budu nejdříve derivovat podle x_i, a poté podle x_j, tj. ptáme se, zda platí:

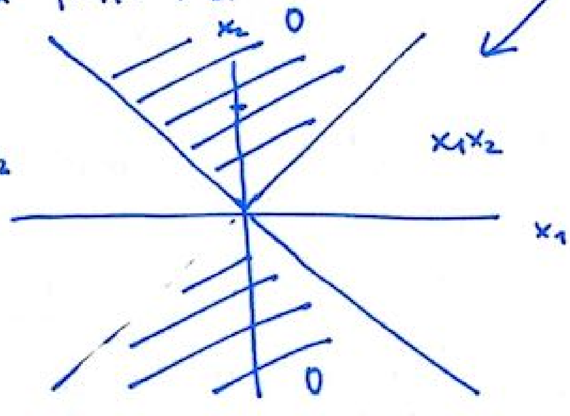
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}(x).$$

Následující příklad ukazuje, že tomu tak obecně není.

Příklad Buď

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } |x_1| \leq |x_2| \\ x_1 x_2 & \text{pokud } |x_1| > |x_2| \end{cases}$$

viz obrázek



Spočítejme nejdříve

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0)$

pro $x_2 \neq 0 \neq x_1$.

▷ $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, x_2)}{x_1} = \underline{\underline{0}}$$

neboť pro $x_1 = 0$ a $x_2 \neq 0$ je $f = 0$ nejen v těchto bodech, ale i v "x_1"-okolí.

TAKÉ $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1,0) - f(0,0)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{0}{x_1} = \underline{\underline{0}}$$

▷ $$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)}{x_2} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{x_1 x_2}{x_2} = \underline{\underline{x_1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f(0,x_2) - f(0,0)}{x_2} = 0$$

Z těchto výsledků počítáme dále

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}^{=0}}{x_2} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{0}{x_2} = 0$$

a $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}^{=0}}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1}{x_1} = 1$$

Tedy

$$1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = 0$$

$\boxed{\text{Věta 8.15}}$ (O záměnosti vyšších derivací) Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a nechť $f: M \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace v M. Pak pro každé $x \in M$, a pro každé $i,j \in \{1,2,\dots,d\}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)}$$

Dk [1] Označme

$$w(x) := \Delta_j^h f(x) := \frac{f(x+he^j) - f(x)}{h}$$

Pak

$$\Delta_i^h \Delta_j^h f(x) = \Delta_i^h w(x) = \frac{w(x+he^i) - w(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+he^i+he^j) - f(x+he^i) - f(x+he^j) + f(x)}{h^2}$$

Ten samý výraz však dostaneme pokud provedeme

$$\Delta_j^h \Delta_i^h f(x)$$

Tedy na úrovni diferenčních podílů rovnost platí, neboť máme:

$$\boxed{\Delta_j^h \Delta_i^h f(x) = \Delta_i^h \Delta_j^h f(x)}.$$

[2] Zbývá ukázat, že

$$(*) \qquad \underline{\Delta_j^h \Delta_i^h f(x) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \text{pro } h \to 0.} \quad \forall x \in M \ \forall i,j \in \{1,\dots,d\}.$$

Avšak:

$$\Delta_j^h f(x+he^i) = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+te^j+he^i)\,dt \qquad = \frac{f(x+he^j+he^i) - f(x+he^i)}{h}$$

a

$$\Delta_j^h f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+te^j)\,dt \qquad = \frac{f(x+he^j) - f(x)}{h}$$

a tedy

$$\Delta_j^h \Delta_i^h f(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underbrace{x+te^j}_{z}+he^i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underbrace{x+te^j}_{z})\Big]dt$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h \Big(\int_0^h \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\cancel{x}+te^j+se^i)\Big]ds\,dt$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h \Big(\int_0^h \underbrace{\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+te^j+se^i) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\Big]}_{\in(-\varepsilon,\varepsilon) \text{ pro } h \text{ dostatečně malé}}ds\,dt + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)}$$

$\boxed{\text{Tedy}}$

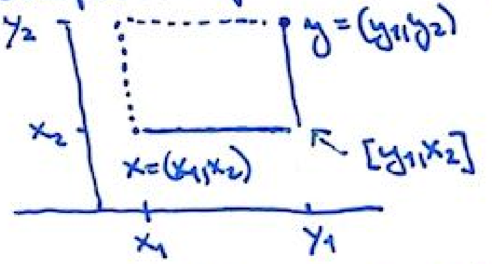
$$\left|\Delta_j^h \Delta_i^h f(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \varepsilon \quad \text{pro } h \text{ dostatečně malé} \quad (\varepsilon \text{ libovolné})$$

∎

8.5 Totální diferenciál a Taylorův rozvoj pro funkce více proměnných.

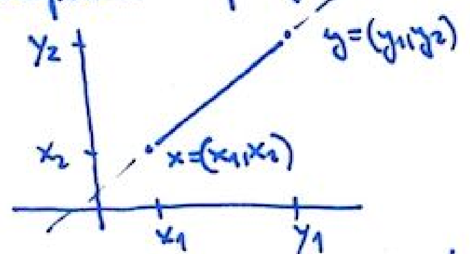
Často potřebujeme vyjádřit rozdíl $f(y)-f(x)$ pomocí derivace (jak jsme viděli například v důkazu předchozí věty). K tomu lze s úspěchem využít Langrangeovu větu o střední hodnotě. U fcí více proměnných máme dvě varianty jak postupovat:

(i) postupovat "po stěnách" (jako v předchozí větě).



NEVÝHODA: dává d-různých bodů, přesto užitečný postup v mnoha situacích

(ii) postupovat "po přímce spojující x a y"



O tom je následující věta.

Věta 8.16 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) Nechť:

- $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená
- f je spojitá v M a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují v každém bodě $x \in M$
- pro $x, y \in M$ je úsečka $\{z;\ z = tx + (1-t)y,\ t \in \langle 0,1\rangle\} \subset M$

Pak existuje $\theta \in (0,1)$ tak, že

$$\text{(L)} \qquad \boxed{f(y) = f(x) + \nabla f(x+\theta(y-x)) \cdot (y-x)}$$

zobecnění $f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$ kde $\xi \in (x,y)$ v $d=1$. I zde lze psát: $\xi = \theta x + (1-\theta) y$

Dk. Definujme
$$g(t) := f(x+t(y-x)), \quad t \in \langle 0,1\rangle.$$
Pak • $g \in C(\langle 0,1\rangle)$ a • $g'(t)$ existuje pro $\forall t \in (0,1)$

Navíc $g(1)-g(0) = f(y)-f(x)$.

Dle LVOSH (ZS 19/20):
$$f(y)-f(x) = g(1)-g(0) = g'(\theta) \overset{V\,8.13}{=} \nabla f(x+\theta(y-x))\cdot(y-x),$$
což jsme chtěli ukázat.

Než si ukážeme aplikaci předchozí věty a její rozšíření, zavedeme následující pojem "souvislé" množiny.

Definice Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^d$ je souvislá (angl. "path-connected")
jestliže pro každé $x, y \in M$
existují konečný počet bodů x^i, $i = 1, \dots, N$, tak, že
$x^1 = x$, $x^N = y$ a všechny $\{tx^i + (1-t)x^{i+1};\ t \in \langle 0,1 \rangle\} \subset M$
pro $i = 1, \dots, N-1$

Důsledek Věty 8.16 Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená a souvislá ("path-connected).
Nechť $\nabla f(x) = 0$ pro $\forall x \in M$
Pak $f \equiv C$ $(C \in \mathbb{R})$ (f je konstantní)

Dk plyne z předchozí Věty 8.16 a ze skutečnosti, že M je otevřená a libovolné $x \in M$ lze najít "cestu" (lomenou čáru) spojující x s pevným bodem $y \in M$. Tak
$$\underbrace{f(x)} = f(y) + \underbrace{\nabla f(\xi)}_{=0} \cdot (y-x) = \underbrace{f(y)} \quad \text{pro všechna } x \in M$$
$\blacksquare$

V následující větě budou hrát významnou roli funkce spojité, jejichž první derivace je také spojitá. Zavedeme označení, které na konci přednášky rozšíříme.

Definice Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Pak $C^0(M) \equiv C(M) = \{f : M \to \mathbb{R};\ f \text{ spojité v } M\}$,
a $C^1(M) := \{f : M \to \mathbb{R};\ f \in C(M), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(M) \quad i = 1, \dots, d\}$.

Také píšeme
$$C(M)^m := \{f : M \to \mathbb{R}^m;\ f = (f_1, \dots, f_m) \text{ a } f_i \in C(M) \text{ pro } i = 1, \dots, m\}$$
$$= \underbrace{C(M) \times \dots \times C(M)}_{m\text{-krát}}.$$

a podobně
$$C^1(M)^m := \{f : M \to \mathbb{R}^m;\ f_i \in C^1(M) \text{ pro } i = 1, \dots, m\}.$$

Poznámka:
$$C^1(M) = \{f : M \to \mathbb{R};\ f \in C(M) \wedge \nabla f \in C(M)^d\}.$$

Nyní začneme zkoumat podmínky, které zaručují (tedy jsou postačující) k tomu, aby ① existovaly parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

② f byla spojitá v uvažovaném bodě

③ existovaly směrové derivace

Důležitou roli zde bude hrát pojem totálního diferenciálu. Jeho definice (i existence) je motivována následujícím tvrzením.

$\boxed{\text{Věta 8.17}}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $x, x^0 \in M$ takové, že úsečka spojující x a x^0 leží v M. Buď $f \in C^1(M)$ resp. $C^1(M)^m$.

Pak

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(x^0) - \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\infty,\mathbb{R}^d}} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } x \to x^0$$

neboli

$\boxed{m=1}$ $$|f(x) - f(x^0) - \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)| = o(|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{pro } x \to x_0$$

resp.

$\boxed{m>1}$ $$\|f(x) - f(x^0) - Df(x^0)(x-x^0)\|_{\mathbb{R}^m} = o(|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{—"—}$$

Dk: Jen pro $\boxed{m=1}$. Užijeme-li výsledek věty 8.16, tak máme

$$W := \frac{f(x) - f(x^0) - \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}} = \frac{\left(\nabla f(x^0+\theta(x-x^0)) - \nabla f(x^0)\right)\cdot(x-x^0)}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}}$$

Odtud

$$|W| \overset{C-S}{\leq} |\nabla f(x^0+\theta(x-x^0)) - \nabla f(x^0)|_{\mathbb{R}^d}\, |x-x_0|_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^d}}$$

$$= |\nabla f(x^0+\theta(x-x^0)) - \nabla f(x^0)|_{\mathbb{R}^d} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } x \to x_0$$

díky předpokladu $f \in C^1(M)$ ▨

Pozorování: Zobrazení: $L : z \mapsto \nabla f(x_0)\cdot z \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^d$, je lineární

Poznámka: Vidíme, že by stačilo předpokládat, že f je $C^1(O)$, kde O je otevřená množina obsahující úsečku spojující x a x_0.

Definice (totálního diferenciálu) Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ je totální diferenciál funkce $f : M \to \mathbb{R}^m$ v $x^0 \in M$ pokud

$$(\mathrm{TD}) \qquad \|f(x) - f(x^0) - L(x-x^0)\|_{\mathbb{R}^m} = o(|x-x^0|_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{pro } x \to x_0$$

Věta 8.17 říká: $f \in C^1(M) \Rightarrow$ ① totální diferenciál L k fci f v bodě $x^0 \in M$ existuje

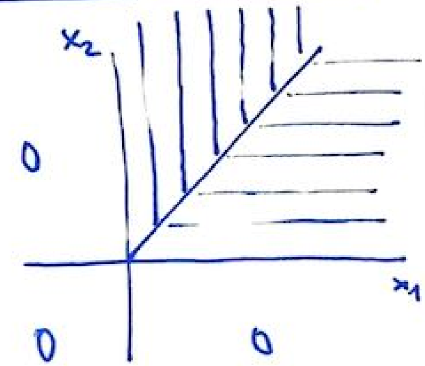
a ② $L(x-x^0) = \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0)$ $m=1$

$= Df(x^0)(x-x^0)$ $m>1$

WARNING! K existenci totálního diferenciálu NESTAČÍ $\boxed{\text{spojitost } f \text{ v } x^0}$ a $\boxed{\text{existence } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \quad i=1,\dots,d}$

jak ukazuje následující příklad.

$\boxed{\text{Příklad}}$ Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definována vztahem



$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 & x_1>0,\ x_2>0,\ x_2 \geq x_1 \\ x_2 & x_1>0,\ x_2>0,\ x_1 \geq x_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Vidíme, že $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0)=0$

a také $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$.

Tedy $\boxed{Lx = (0,0)\cdot x}$ je kandidát na totální diferenciál fce f v bodě $(0,0)$.

Avšak:

$$z := \frac{f(x_1,x_2) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overset{=0}{Lx}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{f(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \overset{\text{pro } x_2=x_1>0}{=} \frac{x_1}{\sqrt{2}\,x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Tedy $\lim_{x\to 0} z$ neexistuje a tak f nemá v $(0,0)$ totální diferenciál. ∎

Často: (TD) ekvivalentně zapíšeme $\lim_{h\in\mathbb{R}^d,\, h\to 0} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)-L(x^0)h}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}} = 0$

Obvykle: $\underline{L(x^0)h} = df(x^0)(h) = \underline{df(x^0)h}$

Věta 8.18 NUTNÉ PODMÍNKY EXISTENCE DIFERENCIÁLU

Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ má v x^0 totální diferenciál. Pak

(1) Existují $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$ pro $\forall i \in \{1,\dots,d\}$ a $\forall j \in \{1,\dots,m\}$

a platí:
$$[df(x^0)]_{ji} = L_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$$

neboli
$$df(x^0)h = Df(x^0)h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^d$$

(2) Existují směrové derivace $\partial_v f(x^0)$ pro $\forall v = (v_1,\dots,v_d)$

a platí:
$$\boxed{\partial_v f(x^0) = df(x^0)v = Df(x^0)v}$$

(3) f je v bodě x^0 spojitá.

! (SPOJITOST NEPLYNE Z EXISTENCE $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^0)$)

Dk $\boxed{\text{Ad (2)}}$ Máme
$$\partial_v f(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)-df(x^0)(tv)}{|t|\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\|v\|_{\mathbb{R}^d}}}\frac{|t|}{t}}_{\to 0 \text{ dle definice diferenciálu}}$$
$$+ \lim_{t\to 0} \frac{df(x^0)(tv)}{t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearita diferenciálu}}}{=} df(x^0)v$$

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ plyne z dokázaného volbou $v = e^j$, $j = 1,\dots,d$.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$
$$f(x^0+h)-f(x^0) = \underbrace{\frac{f(x^0+h)-f(x^0)-df(x^0)h}{\|h\|_{\mathbb{R}^d}}}_{\xrightarrow{h\to 0}\, 0 \text{ z definice diferenciálu.}} \|h\|_{\mathbb{R}^d} + \underbrace{df(x^0)h}_{\xrightarrow{h\to 0}\, 0 \text{ z linearity}}$$

Tedy $\lim_{h\to 0}\left(f(x^0+h)-f(x^0)\right) = 0 \iff \lim_{h\to 0} f(x^0+h) = f(x^0)$. ▨

Shrňme si situaci graficky

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

[A] Existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ v $\mathcal{U}(x^0)$ $i=1,2,\dots,d$ a jejich spojitost v x^0

$\Downarrow$ Věta 8.17

[B1] Existence $df(x^0)$ tj. existenci totálního diferenciálu

a také Věta 8.18 část (1)

[B2] $df(x^0)h = \begin{cases} \nabla f(x^0)\cdot h & m=1 \\ Df(x^0)h & m>1 \end{cases}$

$\Downarrow$ Věta 8.18 $\Downarrow$ Věta 8.18 $\Downarrow$ Věta 8.18

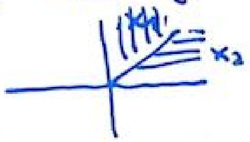
[C1] Existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ a platí $\boxed{B2}$ ...

[C2] Existence $\partial_v f(x^0)$ pro $\forall v \in \mathbb{R}^d$ $|v|=1$: $\partial_v f(x^0) = df(x^0)v \overset{(B2)}{=} \dots$

[C3] f je v x^0 spojitá

Poznámka, příklady

① Víme (viz Příklad pod Větou 8.18), že $\boxed{C1} + \boxed{C3} \not\Rightarrow \boxed{B1}$



ANI $[C1]+[C2]+[C3]$ NEIMPLIKUJE $\boxed{B1}$

②

Příklad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nulová až na polokružnici, kde $f \equiv 1$, viz obrázek

Pak $\partial_v f(0,0) = 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $|v|_E = 1$,

ale $df(0,0)$ neexistuje, neboť by muselo

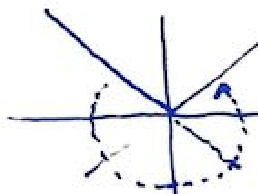
$\frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ konvergovat k 0 pro $|h| \to 0$

ale pro $h_1 > 0$ $f \equiv 1$ a $\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to +\infty$.

Tedy $\boxed{C2}$ (a ani $[C1]$ a $[C2]$ neimplikují $[B1]$)

Zkuste si vymyslet příklad (modifikaci tohoto příkladu), který by ukazoval, že $[C1]+[C2]+[C3] \not\Rightarrow [B1]$.

③ Funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná $f(x) = |x|$ nemá v 0 diferenciál, ačkoliv f je spojitá. Kandidátem by mohlo být jakékoliv $a \in \langle -1, 1 \rangle$. Ale



$$\underbrace{\frac{|h| - 0 - ah}{|h|}} = \begin{cases} 1 - a \neq 0 & h > 0 \quad \text{vyjma } a = 1 \\ 1 + a \neq 0 & \quad \text{vyjma } a = -1. \end{cases}$$

tedy limita neexistuje a f diferenciál nemá.

$$\boxed{\text{v } \mathbb{R} \text{ pojmy } f'(x^0) \text{ a } df(x^0) \text{ splývají, tj. } df(x^0)h = f'(x^0)h}$$

④ Geometrická interpretace diferenciálu pro $f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$.

$$df(x^0)(x - x^0) = \nabla f(x^0) \cdot (x - x^0) \overset{d=2}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0)$$

Víme, že $z - z^0 = a_1(x - x^0) + a_2(y - y^0)$ je rovnice roviny v $\mathbb{R}^3$

Pro $z^0 = f(x_1^0, x_2^0)$ uvažujme množinu všech $x = (x_1, x_2, x_3)$ takových, že

$$-(x_3 - x_3^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) = 0 \quad \text{TEČNÁ NADROVINA}$$

neboli je to množina všech $x = (x_1, x_2, x_3)$ takových, že

$$(x - x^0) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), -1 \right) = 0$$

tj. množina všech bodů kolmých na $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), -1 \right)$, což je tedy vektor ve směru normály k tečné nadrovině.