NOFY152, LS 2019-2020 — Teoretická část zkouškové písemné práce — 11. června 2020

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1. Určete, jaký je vztah (ekvivalence respektive implikace pouze v jednom směru) mezi následujícími výroky (a, b jsou konečná reálná čísla):

(1) Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

(2) Funkce f je stejnoměrně spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

(3) Na intervalu $[a, b]$ existuje Riemannův integrál funkce f, to jest $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) = L$, kde $L \in \mathbf{R}$.

Výroky přesně zadefinujte. Implikace (celkem jich je šest), které platí, dokažte nebo odůvodněte. Jinak uveďte protipříklad.

$\boxed{\text{Řešení}}$ $\boxed{\text{Definice}}$

(1) $\overset{\text{df.}}{=}$ $\forall x \in \langle a,b\rangle\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x' \in U_\delta(x) \cap \langle a,b\rangle\ |f(x')-f(x)|<\varepsilon$

(2) $\overset{\text{df.}}{=}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x', x \in \langle a,b\rangle :\ |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x)|<\varepsilon$

(3) $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje $\overset{\text{df}}{=} (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, kde pro f omezenou

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_D S(D,f) \quad \text{a}$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup s(D,f)$$

(3) je ekvivalentní $\forall \varepsilon>0\ \exists D$ dělení $\langle a,b\rangle$ $S(D,f)-s(D,f)<\varepsilon$.

$\boxed{\text{Vztahy}}$ $\underbrace{(1) \Leftrightarrow (2)}$, $(1) \Rightarrow (3)$, $(2) \Rightarrow (3)$, $\underbrace{(3) \not\Rightarrow (1) \text{ a } (3) \not\Rightarrow (2)}$

(2) $\Rightarrow$ (1) z definice

(1) $\Rightarrow$ (2) Cantorova věta, dokazuji se např. sporem (1) & $\neg$(2) s využitím Weierstrassovy věty a Heineho věty.

například Riemannova fce, má (R) integrál, ale není spojité

$\exists \varepsilon_0>0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n, x_n' \in \langle a,b\rangle\ |x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n)-f(x_n')| > \varepsilon_0$

Weierstrass $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ a $x_0 \in \langle a,b\rangle : x_{n_k} \to x_0\ (k\to\infty)$

$\exists \{x'_{n_k}\} \subset \{x'_n\}$ a $x_0' \in \langle a,b\rangle : x'_{n_k} \to x_0'\ (k\to\infty)$

ale $x_0 = x_0'$ neb $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$

Heine a $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, $f(x'_{n_k}) \nearrow$ $\lightning$ neboť $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| > \varepsilon_0$

(2) $\Rightarrow$ (3) K danému $\varepsilon>0$ najdu δ a sestrojím ekvidistantní dělení, kde $x_i - x_{i-1} < \delta$. Pak

$$S(D,f) - s(D,f) = \sum_{i=1}^{N} \Big[\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\Big](x_i - x_{i-1})$$

$$< \delta N \varepsilon < \delta \frac{(b-a)}{\delta} \varepsilon = (b-a)\varepsilon \quad \blacksquare$$

[8] 2. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y''' + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{1}$$

kde funkce $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

(1) Uveďte, o jaký typ diferenciální rovnice se jedná.

(2) Zadefinujte pojem maximálního obecného řešení. Na jakém intervalu je toto řešení definováno?

(3) Zformulujte počáteční úlohu pro danou rovnici. Je řešení této úlohy vždy jediné? Odůvodněte.

(4) Převeďte danou počáteční úlohu spojenou s rovnicí (1) na systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a k počáteční úloze tohoto systému napište ekvivalentní integrální formulaci.

(5) Lze k rovnici (1) vždy nalézt partikulární řešení. V kladném případě stručně vysvětlete, jak je najdete, v opačném případě uveďte, proč partikulární řešení nelze nalézt.

Řešení

Ad (1) LINEÁRNÍ ODR 3. řádu (s PROMĚNNÝMI KOEF.)

Ad (2) řeš. $y_1 : (c,d) \to \mathbb{R}$ je prodloužením řeš. $y_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$ jestliže

• y_1, y_2 řeší ODR ; $(a,b) \subset (c,d)$ a $y_1 = y_2$ na (a,b).

Maximální řeš. ≡ řešení, které nemá netriviální prodloužení.

V našem případě je max. řeš. definováno na $\mathbb{R}$, neboť rce je lineární a koeficienty spojité a definovány na $\mathbb{R}$.

Ad (3) Poč. úloha: $y(t_0) = y_{10}$, $y'(t_0) = y_{20}$, $y''(t_0) = y_{30}$ $t_0 \in \mathbb{R}$

Řešení je jediné a je definováno na $\mathbb{R}$, neboť po převodu na systém: Linearita implikuje Lipschitzovskost

Ad (4) $y_1 := y$ $y_2 := y'$, $y_3 := y''$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = f(t) - a_2(t)y_3 - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 \end{cases}$

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{30} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_0^t \mathbb{A}(\tau)\vec{y}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \vec{f}(\tau)\,d\tau$$

Ad (5) ANO,

Variace konstant. Buď $\{u_1, u_2, u_3\}$ F. Systém (báze) rce s $f = 0$.

$$y_{part}(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t) + C_3(t)u_3(t)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1'(t)u_1(t) + C_2'(t)u_2(t) + C_3'(t)u_3(t) &= 0 \\ C_1'(t)u_1'(t) + C_2'(t)u_2'(t) + C_3'(t)u_3'(t) &= 0 \\ C_1'(t)u_1''(t) + C_2'(t)u_2''(t) + C_3'(t)u_3''(t) &= f(t) \end{aligned}\right\}$$

$\exists!$ řešení

$\Downarrow$

integrací mezi $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$

[8] 3. Uvažujte posloupnost reálých čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(1) Zadefinujte pojmy *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*, *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* a *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *osciluje*.

(2) Zadefinujte pojmy *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně* a *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně*. Uveďte příklad řady, která konverguje neabsolutně, ale nekonverguje absolutně. Charakterizujte absolutní a neabsolutní konvergenci pomocí konvergencí řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Zadefinujte symboly x^+ a x^- pro $x \in \mathbb{R}$.

(3) Zadefinujte pojem *přerovnání řady*.

(4) Jaká tvrzení platí pro přerovnání absolutně konvergentních řad a neabsolutně konveregentních řad. Tvrzení zformulujte. Hlavní myšlenku důkazů stručně vysvětlete.

Řešení

Ad (1) $\boxed{s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i}$

- $\sum_{1}^{\infty} a_i < \infty$ (KONV) $\equiv$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ existuje a je vlastní
- $\sum a_i$ DIVERGUJE $\equiv$ $\lim_{n\to\infty} S_n = +/-\infty$
- $\sum a_i$ OSCILUJE $\equiv$ $\limsup_{n\to\infty} a_n \neq \liminf_{n\to\infty} a_n$ tj. jinak

Ad (2)

ABSOLUTNĚ

$\sum |a_n| < \infty$ $\left(\Rightarrow \sum a_n < \infty\right)$ $\Leftrightarrow$ $\sum a_n^+ < \infty$, $\sum a_n^- < \infty$

NEABSOLUTNĚ

$\sum |a_n| = +\infty$ a $\sum a_n < \infty$. $\Leftrightarrow$ $\sum a_n^+ = +\infty$, $\sum a_n^- = +\infty$

$x^- = \max\{0, -x\}$, $x^+ = \max\{0, x\}$.

Ad (3) Buď $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ prosté.

Pak $\sum_{1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ je přerovnání řady $\sum a_n$

Ad (4) $\sum a_n$ konverg. absolutně $\Rightarrow$
- $\sum a_{\varphi(n)}$ konv. absolutně
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum a_n$ konverguje neabsolutně $\Rightarrow$ $\forall A \in \mathbb{R}^*$ $\exists \varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ prosté tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = A$

Podrobnosti k důkazům lze nalézt na stranách 6/25 - 6/28 Poznámek k přednáškám.