Témata 3. přednášky z ÚVODU DO VARIAČNÍHO POČTU

- Terminologie : Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru
  Gateaux diferenciál
  Frechétův diferenciál
- (Další) nutné a postačující podmínky existence minimizéru
- Hladkost L, y v $\Phi[y] = \int_a^b L(x, y, y')\,dx$
- Dořešení úlohy ① (i)–(iii).

LITERATURA : Pokorný – přednášky formou videozáznamu
Kopáček II – MAF (2003), kap. 11
B. Dacorogna : Introduction to Calculus of Variations
Imperial College Press, 3. vydání (2015)

$\boxed{\text{Terminologie}}$ $x_0 \in X$ lineární

- $\delta\Phi[x_0](h) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Phi[x_0 + th] - \Phi[x_0]}{t}$ pro $h \in X$

$\boxed{\text{Pozn}}$ $\delta\Phi[x_0](h) =$ variace (Calculus of variations) Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru h

- $\delta\Phi[x_0] : h \longmapsto \delta\Phi[x_0](h)$ tj. zobrazení $X \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál – Gateaux diferenciál

- Φ má v $x_0 \in X$ Frechétův diferenciál pokud existuje lineární zobrazení, označme jej $d\Phi[x_0]$, z $X \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\Phi[x_0 + h] - \Phi[x_0] - d\Phi[x_0](h)}{\|h\|_X} = 0$$

Platí (podobně jako v $\mathbb{R}^d$): Existuje-li $d\Phi[x_0]$, pak existuje $\delta\Phi[x_0]$ a rovnají se.

$\boxed{\text{Pozn.}}$ Studiem matematických vlastností lin. funkcionálů vznikla část matematiky – funkcionální analýza

Nutné a postačující podmínky existence extremál

Buď $L \in C^2(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a $\Phi[y] \overset{df}{=} \int_a^b L(x,y(x),y'(x))\,dx$

a

nalézt $y \in X$:

$$\Phi[y] = \inf_{\xi \in X} \Phi[\xi] \qquad (P)$$

Dokážeme následující variantu Věty 2.

<u>Věta 2*</u>

(1) Existuje-li minimizér $y \in Z \cap C^2(\langle a,b\rangle)$ úlohy (P), pak nutně

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0 \qquad (E\text{-}L)$$

neboli

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x,y,y')\,y'' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y}(x,y,y')\,y' - \frac{\partial L}{\partial y' \partial x}(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0$$

(2) Naopak, je-li y řešením (E-L) a

$(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ je konvexní pro $\forall x \in [a,b]$

pak y je minimizér (P)

(3) Je-li navíc $(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ ostře konvexní pro $\forall x \in [a,b]$,

pak je minimizér, pokud existuje, <u>jediný</u>.

<u>Pozn.</u> • Řešení (E-L) se obecně nazývají kritické (stacionární) body.

• Požadavek na hladkost minimizéru je příliš silné, nemusí být ani C^1.

$\boxed{\text{Platí}}$ $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je (ostře) konvexní $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$ $(x \neq y)$ a $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{(<)}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Je-li $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$, pak jsou ekvivalentní:

(i) f je konvexní

(ii) $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^m$

(iii) $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) \geq 0 \qquad$ —"—

Je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$,

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\nabla^{(2)} f(x)\, v \cdot v \geq 0 \qquad \forall x, v \in \mathbb{R}^m$

Zformulujeme a dokážeme malinko obecnější tvrzení:

Věta 8.32 Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a konvexní. Platí:

* Je-li $f \in C^1(\Omega)$, pak jsou ekvivalentní

(i) f je konvexní v Ω

(ii) $\underbrace{E(x,y) := f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y-x)}_{\text{Weierstrassova fce}} \geq 0 \quad \forall x,y \in \Omega$

(iii) ∇f je monotónní v Ω: $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (y-x) \geq 0$ pro $\forall x,y \in \Omega$

** Je-li $f \in C^2(\Omega)$, pak

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\nabla^{(2)} f$ je v Ω pozitivně definitní tzn.

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, z_i z_j \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \quad \forall x \in \Omega$$

Dk $\boxed{\text{Ad } *}$ Nejdříve pro $x_0, x_1 \in \Omega$ definujme

$$\boxed{g(t) := f(x_t)} \quad \text{kde } x_t := (1-t)x_0 + t x_1 \in \Omega \text{ pro } 0 \leq t \leq 1.$$

Pak $g'(t) = \nabla f(x_t) \cdot (x_1 - x_0)$

Z konvexity f plyne konvexita g, vskutku: pro $\alpha \in [0,1]$

tj. (i) $g((1-\alpha)s + \alpha t) = f((1-\alpha)x_s + \alpha x_t) \leq (1-\alpha) f(x_s) + \alpha f(x_t)$

$= \underline{(1-\alpha) g(s) + \alpha g(t)}$

Speciálně pro $\varepsilon \in (0,1)$

$$g(\varepsilon) = g((1-\varepsilon)0 + \varepsilon 1) \leq (1-\varepsilon) g(0) + \varepsilon g(1) \Rightarrow \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} \leq g(1) - g(0).$$

Pro $\varepsilon \to 0+$: $g'(0) \leq g(1) - g(0)$, což implikuje $\boxed{E(x_0, x_1) \geq 0}$ a (ii) platí

Je-li $E(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \Omega$, pak

$$0 \leq E(x_0, x_1) + E(x_1, x_0) = (\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)) \cdot (x_1 - x_0) \geq 0$$

a (iii) platí.

Jestliže (iii) platí, pak g' je také monotónní neboť

$$g'(t) - g'(s) = \frac{(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s)) \cdot (x_1 - x_0)}{t-s} \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq 1$$

$\Rightarrow$ g' je neklesající a

$$\underline{(1-\alpha)(g(\alpha) - g(0))} = (1-\alpha) \int_0^\alpha g'(t)\,dt \leq (1-\alpha)\alpha g'(\alpha) \leq \alpha \int_\alpha^1 g'(t)\,dt$$

$$= \underline{\alpha(g(1) - g(\alpha))} \Rightarrow \underline{g(\alpha) \leq (1-\alpha) g(0) + \alpha g(1)}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_\alpha) \leq (1-\alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in \Omega$$

což je (i).

$\boxed{\text{Ad } **}$ Je-li f konvexní, pak dle (iii)

$$0 \le \frac{1}{\varepsilon} z \cdot \left(\nabla f(x+\varepsilon z) - \nabla f(x)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} z \cdot \nabla^2 f(x) z$$

tedy $\nabla^2 f(x)$ je positivně definitní $\forall x \in \Omega$

<u>Naopak</u> Je-li $\nabla^2 f(x)$ positivně definitní $\forall x, y \in \Omega$, pak

$$\left(\nabla f(x) - \nabla f(y)\right) \cdot (x-y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \nabla f(y + s(x-y))\, ds \cdot (x-y)$$

$$= \int_0^1 \nabla f^{(2)}(y + s(x-y))(x-y) \cdot (x-y)\, ds \ge 0.$$

$\blacksquare$

a dle (iii) je f konvexní.

$\boxed{\text{Dk Věty } 2^*}$ $\boxed{\text{Ad (1)}}$ už dokázáno. Stručně ještě jednou:

Je-li y minimizér ϕ přes všechny body v X, pak

$$\phi[y] \le \Phi[y+th] \quad \forall h \in X \quad \text{a } t \in \mathbb{R}$$

Neboli pro lib. $h \in X$

$g(t) := \phi[y+th]$ má v 0 extrém a tedy

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow \delta\phi[y](h) = 0.$$

Avšak $\delta\phi[y](h) = 0 \quad \forall h \in X$

$\Updownarrow$

tzv. slabá forma (E-L) navíc

$$\boxed{\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\, h(x) \; dx = 0 \quad \forall h \in X}$$

" dostatečná hladkost funkcí

$\Updownarrow$

$$\int_a^b \left[-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') \right] h(x)\, dx = 0 \quad \forall h \,;\; h(a) = h(b) = 0$$

$\Downarrow$ Fund. lemma VP

(E-L) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Z ekvivalentní charakterizace konvexity $(y,z) \to L(x,y,z)$:

$$L(x, y+h, y'+h') \ge L(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\, h + \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\, h'$$

$\int_a^b \dots dx \Rightarrow$

$$\phi[y+h] \ge \phi[y] + \underbrace{\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\, h' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\, h \right] dx}_{=0 \text{ slabá forma (E-L)}}$$

$$\Rightarrow \quad \phi[y+h] \ge \phi[y] \quad \forall h \in X.$$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Nechť y a $\bar{y}$ jsou dva minimizéry. Definujme

$$\hat{y} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{y} \quad . \quad \text{zřejmě } \hat{y} \in X.$$

Z konvexity L vzhledem k y, z:

$$L(x,\hat{y},\hat{y}') = L\left(x, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\bar{y}, \tfrac{1}{2}y' + \tfrac{1}{2}\bar{y}'\right) \le \frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\bar{y},\bar{y}')}{2}$$

Tedy po integraci $\int_a^b dx$

$$\inf \le \Phi[\hat{y}] \le \frac{1}{2}\Phi[y] + \frac{1}{2}\Phi[\bar{y}] = \inf$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \underbrace{\left[\frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\bar{y},\bar{y}')}{2} - L\left(x, \frac{y+\bar{y}}{2}, \frac{y'+\bar{y}'}{2}\right)\right]}_{\ge 0 \ \& \ > 0 \text{ pokud } y \ne \bar{y}} dx = 0$$

Tedy nutně $y = \bar{y}$ ∎

$\boxed{\text{Řešení úlohy ① (i) - (iii)}}$

$\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ Tedy $L(x,y,z) = L(z) = \sqrt{1+z^2}$

(i) $X^1 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ \boxed{z(a) = A},\ \boxed{z(b) = B}\}$ Dvě Dirichletovy podmínky

(ii) $X^2 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ z(a) = A\}$ 1 Dirichletova podmínka, 1 Neumannova

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$$

(iii) $X^3 = C^1(\langle a,b\rangle)$ Dvě Neumannovy podmínky

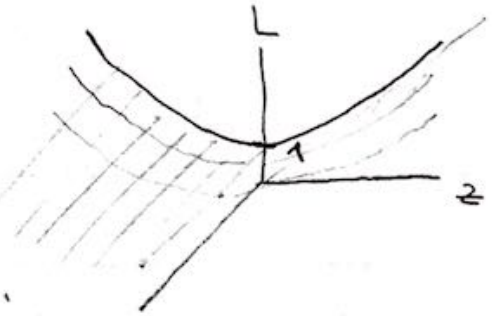
Protože L nezávisí na y, tak z (E-L) je

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y') = \text{const.} \quad \text{tedy} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C \in (-1,1),$$

což implikuje $\quad y' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \alpha x + \beta$

$\boxed{\text{(i)}}$ $y(x) = \frac{B-A}{b-a}x + \frac{Ab-Ba}{b-a}$ $\quad \boxed{\text{(ii)}}$ $y(x) = A$

$\boxed{\text{(iii)}}$ $y(x) = \beta \in \mathbb{R}$ libovolné.



L je sice striktně konvexní vzhledem k z, ale vzhledem k proměnným y, z je "jen" konvexní.

Tedy nalezené stacionární body jsou minimizéry, ale jejich jednoznačnost v případech (i) a (ii) neplyne z Věty 2*, část (3).

V případě (iii) máme ∞ minimizérů.

$\boxed{\text{Def.}}$ $\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi[y_0+th]\Big|_{t=0}$ ▨

$\boxed{\text{Věta 3}}$ (1) Nechť y_0 je extremála $\Phi: X \to \mathbb{R}$, Nechť $\delta^2\Phi[y_0](h,h)$ ex. $\Rightarrow \delta^2\Phi[y_0](h,h) \underset{\text{MIN}}{\overset{\text{MAX}}{\gtrless}} 0$

(2) Nechť
- $L, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2} \in C(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$
- $\delta\Phi[y_0](h) = 0 \quad \forall h \in X$ [tzn. y_0 je stacionární nebo extrémní bod]
- $\exists c>0$ a $\delta_1>0$ $\quad \delta^2\Phi[y_0](h,h) \geq c\|h\|_X^2 \quad \forall h \in X$, $\|h\|_X \leq \delta_1$

pak Φ má v y_0 ostré lok. minimum.

Dk (1) SAMI z věty o fci reálné proměnné

(2) Připomeňme definici $g(t) = \phi[y_0+th]$ h lib.

Pak $\Phi[y_0+h] - \phi[y_0] = g(1) - g(0) \underset{\text{Taylor}}{=} g'(0) + \frac{g''(\xi)}{2}$ pro jisté $\xi \in (0,1)$

Ale $g'(0)=0$ z 2. předpokladu. Tedy

$$\Phi[y_0+h] - \phi[y_0] + \frac{g''(0) - g''(\xi)}{2} = \frac{g''(0)}{2}$$

Z třetího předpokladu

$$\frac{c}{2}\|h\|_X^2 \leq \frac{g''(0)}{2} \leq \Phi[y_0+h] - \phi[y_0] + \frac{c}{4}\|h\|_X^2$$

pro $\|h\|_X$ dostatečně malé.

$\Rightarrow \quad \phi[y_0] \leq \phi[y_0+h] \quad \forall h \quad (\|h\|_X \leq \delta_1)$.

$\Rightarrow y_0$ je lokální minimizér. ∎

$\boxed{\text{Ještě jedna postačující podmínka}}$ Platí

$$\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y+th,y'+th')h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y+th,y'+th')h(x)\right]\Big|_{t=0} dx$$

$$= \int_a^b \Big[\underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y'}(x,y,y')}_{P(x)}[h'(x)]^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\underbrace{2h(x)h'(x)}_{=[h^2(x)]'} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')h^2(x)\Big]dx$$

$$= \int_a^b P(x)(h'(x))^2 + Q(x)h^2(x)\,dx =: \Psi[h]$$

kde $Q(x) = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')$

Ψ je kvadratický funkcionál v h, jehož (E-L) má tvar

$[\ L(x,h,h') = P(x)[h']^2 + Q(x)h^2\ ]$

$$\boxed{-(P(x)h'(x))' + Q(x)h(x) = 0}$$
$$\boxed{h(a) = h(b) = 0}$$

JACOBIHO ROVNICE (J)

<u>Def.</u> Bod $x \in (a,b]$ se nazývá konjugovaný bod (J) pokud $\exists$ netriviální řeš. (J) s $h(a)=0$ a $h(x)=0$.

<u>Věta 4</u> (JACOBI)

(1) Nechť $\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x,y_0(x),y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$ a y_0 je lokální minimizér Φ $\Big\} \Rightarrow$ neexistuje konjugovaný bod v (a,b).

(2) Nechť $y_0 \in C^2(\langle a,b\rangle)$ řeší (E-L)
Nechť $\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x,y_0(x),y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$
Nechť v $(a,b]$ neexistuje konj. bod (J) $\Big\} \Rightarrow$ y_0 je lok. minimizér Φ.

$\boxed{\text{Dk}}$ Gelfand, Fomin: Calculus of Variations.

HLADKOST ŘEŠENÍ

Definice funkcionálu Φ má smysl pro $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz věty 2 vyžadoval, aby

$$(*) \qquad -\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y') \in C(\langle a,b\rangle),$$

abychom mohli použít fundamentální lemma.

Věta 2* přímo předpokládala $y \in C^2(\langle a,b\rangle)$.

OTÁZKA: Lze dokázat platnost Věty 2 bez předpokladu (*)?

Ke kladné odpovědi si nejdříve všimneme, že slabá forma (E-L) má tvar

VIZ DŮKAZ VĚTY 2*

$$\int_a^b \left[E(x)h'(x) + G(x)h(x)\right] dx = 0,$$

kde $E = \frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')$ a $G = \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y')$

Předpokládejme nyní, že E a G jsou pouze spojité, $E, G \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak nemůžeme "per-partesit" v 1. členu. Zadefinujeme-li však

$$P_G(x) = \int_0^x G(s)\,ds, \text{ pak } P_G' = G \text{ a } P_G \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

a lze "per-partesit" v 2. členu. Dostaneme

$$0 = \int_a^b \left[E(x) - P_G(x)\right] h'(x) + \underbrace{\left[P_G(x)h(x)\right]_a^b}_{=0 \ \forall h \in [C^1(\langle a,b\rangle)]_0}$$

Z varianty fund. lemmy variačního počtu (viz podle) plyne, že

$$E(x) - P_G(x) = \text{const.} \iff E = \text{const} + P_G(x) \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

Tedy $E \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a výraz v (*) tvaru $-E' + G$ je všude spojitý. Pomocný předpoklad (*)

v důkazu Věty 2 je tedy ověřen (tj. platí) a není jej třeba předpokládat.

Věta 2 tedy platí za předpokladu $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $L \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ (varianta fund. lemmy variačního počtu)

Nechť $G \in C(\langle a,b\rangle)$ splňuje $\boxed{\int_a^b G(x)\,h'(x)\,dx = 0 \quad \forall h \in C^1(\langle a,b\rangle),\ h(a)=h(b)=0}$

Pak $G \equiv \text{const.}$

Dk: Označme $c^* := \frac{1}{b-a}\int_a^b G(x)\,dx = \fint_a^b G(x)$ průměr G přes (a,b).

Definujme $h(x) = \int_a^x [G(s) - c^*]\,dx$.

Ověřte, že $h \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $h(a) = h(b) = 0$

Tedy h je přípustná "testovací" funkce v .

Po dosazení

$$0 = \int_a^b G(x)\big(G(x) - c_*\big) = \int_a^b \big(G(x) - c_*\big)\big(G(x) - c_*\big)\,dx$$

neboť $\int_a^b (G(x) - c_*)\,dx = 0$

což implikuje $G(x) \equiv c_*$ ▨