Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	3	9	12	12	36
Získáno					

[3] 1. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\, \cos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Řešení:

Protože

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \qquad \text{a} \qquad \left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

tak platí, že existuje nějaké prstencové okolí $P_\delta(0)$ tak, že $\forall x \in P_\delta(0)$

$$\left|\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\, \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| = \left|\sqrt[3]{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}\, \cos\left(\frac{2}{x}\right)\, x^{\frac{1}{3}}\right| \le 2|x|^{\frac{1}{3}}.$$

Dle sendvičové věty (a protože $\lim_{x\to 0} |x|^{\frac{1}{3}} = 0$) dostáváme, že

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\, \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

[9] 2. 1) Pro $a \in \mathbb{R}$, uveďte definici výroku

$$f(x) = o(|x-1|^a) \quad \text{pro } x \to 1.$$

2) Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ určete

$$\lim_{x\to 1} x^\alpha \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1} x^{x^\alpha}.$$

3) Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určete $a \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x^\alpha - x^\beta = o(|x-1|^a) \quad \text{pro } x \to 1.$$

4) Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určete $a \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x^{x^\alpha} - x^{x^\beta} = o(|x-1|^a) \quad \text{pro } x \to 1.$$

Řešení:

1)

$$f(x) = o(|x-1|^a) \quad \text{pro } x \to 1 \quad \stackrel{\text{def}}{\equiv} \quad \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{|x-1|^a} = 0.$$

2) Z definice mocniny přímo získáme

$$\lim_{x\to 1} x^\alpha = \lim_{x\to 1} \exp(\alpha \ln x) = \exp(\lim_{x\to 1} \alpha \ln x) = \exp(0) = 1,$$

kde jsme využili spojitosti funkcí exp a ln a faktu, že $\ln(1) = 0$. Pro druhou limitu spočteme obdobným způsobem

$$\lim_{x\to 1} x^{x^\alpha} = \lim_{x\to 1} \exp(x^\alpha \ln x) = \exp(\lim_{x\to 1} x^\alpha \ln x) = \exp(0) = 1,$$

kde jsme využili navíc znalost první limity.

3) Pokud $\alpha = \beta$, pak $x^\alpha - x^\beta \equiv 0$ a tedy tvrzení platí $\forall a \in \mathbb{R}$.
Pokud $\alpha \neq \beta$, pak

$$\begin{aligned} x^\alpha - x^\beta &= (\exp(\alpha\ln x) - 1) - (\exp(\beta \ln x) - 1) = \alpha \ln x \frac{\exp(\alpha \ln x) - 1}{\alpha \ln x} - \beta \ln x \frac{\exp(\beta \ln x) - 1}{\beta \ln x} \\ &= (x-1)\left(\alpha \frac{\ln x}{x-1}\frac{\exp(\alpha\ln x)-1}{\alpha \ln x} - \beta\frac{\ln x}{x-1}\frac{\exp(\beta \ln x) - 1}{\beta \ln x}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Protože

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad , \lim_{y \to 0} \frac{\exp(y)-1}{y} = 1$$

můžeme použít větu o aritmetice limit a z (1) získáváme, že

$$(x^\alpha - x^\beta) \simeq (\alpha - \beta)(x-1), \qquad \text{pro } x \to 1$$

a odtud máme, že

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{|x-1|^a} = \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha - x^\beta}{x-1}\frac{x-1}{|x-1|^a} = (\alpha-\beta)\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|^a} = 0$$

jenom tehdy, když $a < 1$.

4) Postupujeme obdobně

$$x^{x^\alpha} - x^{x^\beta} = x^{x^\beta}(x^{x^\alpha - x^\beta} - 1) = x^{x^\beta}\frac{\exp((x^\alpha - x^\beta)\ln x) - 1}{(x^\alpha - x^\beta)\ln x}\frac{\ln x}{x-1}(x^\alpha - x^\beta)(x-1)$$

S použitím kroků 2) a 3) tedy získáváme, že

$$x^{x^\alpha} - x^{x^\beta} \simeq (\alpha - \beta)(x-1)^2$$

a obdobně dostáváme, že tvrzení platí pro $a < 2$.

Alternativně se dají obě limity spočítat pomocí l'Hopitalova pravidla, neboť jde o limity typu $\frac{0}{0}$ (za předpokladu existence derivací a limit na pravé straně).

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^\alpha - x^\beta)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1} - \beta x^{\beta-1}}{1} = \alpha - \beta,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{x^\alpha} - x^{x^\beta}}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^{x^\alpha} - x^{x^\beta})'}{((x-1)^2)'} = \lim_{x\to 1} \frac{(\exp(x^\alpha \ln x)(x^{\alpha-1} + \alpha x^{\alpha-1}\ln x) - (\exp(x^\beta \ln x)(x^{\beta-1} + \beta x^{\beta-1}\ln x)}{2(x-1)}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\exp(x^\alpha \ln x)(x^{\alpha-1} + \alpha x^{\alpha-1}\ln x) - \exp(x^\beta \ln x)(x^{\beta-1} + \beta x^{\beta-1}\ln x))'}{2(x-1)'}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\exp(x^\alpha \ln x)(x^{\alpha-1} + \alpha x^{\alpha-1}\ln x)^2 + \exp(x^\alpha \ln x)((\alpha-1)x^{\alpha-2} + \alpha x^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-1)x^{\beta-2}\ln x)}{2}$$

$$\frac{(\exp(x^\beta \ln x)(x^{\beta-1} + \beta x^{\beta-1}\ln x)^2 + \exp(x^\beta \ln x)((\beta-1)x^{\beta-2} + \beta x^{\beta-2} + \beta(\beta-1)x^{\beta-2}\ln x)}{2}$$

$$\frac{1 + 2(\alpha-1) - 1 - 2(\beta-1)}{2} = \alpha - \beta$$

[12] 3. Uvažujte funkci

$$f(x) = (1+x)\sqrt{|4-x^2|}.$$

1) Určete definiční obor f a maximální otevřený interval J, na kterém je f spojitá.
2) Na nalezeném intervalu J najděte primitivní funkci k f, tj. spočtěte $\int f(x)\mathrm{d}x$.

K řešení je možné využít některý z vztahů: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

Řešení:

1) Definiční obor funkce f je $\mathbb{R}$. Funkce f je spojitá na celém definičním oboru, proto primitivní funkce musí existovat na celém $\mathbb{R}$.

2) Hledanou primitivní funkci $F := \int f(x)\,dx$ rozdělíme na dvě části $F = F_1 + F_2$

$$F_1 := \int x\sqrt{|4-x^2|}\,dx, \qquad F_2 := \int \sqrt{|4-x^2|}\,dx.$$

Nejdříve se soustředíme na F_1. Použijeme první větu o substituci, kde $y = 4 - x^2$ a $dy = -2x\,dx$ a dostaneme

$$F_1 = \int x\sqrt{|4-x^2|}\,dx = -\frac{1}{2}\int (|\underbrace{4-x^2}_{y}|)^{\frac{1}{2}}\underbrace{(-2x)\,dx}_{dy} = -\frac{1}{2}\int |y|^{\frac{1}{2}}\,dy = -\frac{1}{3}|y|^{\frac{3}{2}}\mathrm{sgn}y|_{y=4-x^2}$$
$$= -\frac{1}{3}|4-x^2|^{\frac{3}{2}}\mathrm{sgn}(4-x^2).$$

Nyní se budeme věnovat druhé primitivní funkci F_2. Protože funkce $\sqrt{|4-x^2|}$ je sudá, budeme hledat lichou F_2, tzn. omezíme se pouze na interval $(0,\infty)$ a poté dodefinujeme funkci F liše na celé $\mathbb{R}$. Protože funkce mění znaménko v bodě $x = 2$, rozdělíme hledání primitivní funkce na dva intervaly a to na $(0,2)$ a na $(2,\infty)$.

Začneme s intervalem $(0,2)$. Použijeme substituci $x = 2\sin y$, pro $y \in (0, \frac{\pi}{2})$. Funkce $\sin y$ je prostá na tomto intervalu a funkce $2\sin y$ zobrazuje interval $(0, \frac{\pi}{2})$ na interval $(0,2)$ prostě a na. Uvedená substituce tedy lze použít a pokud uvážíme, že $dx = 2\cos y\,dy$, získáme (pro $x \in (0,2)$)

$$F_2 = \int \sqrt{|4-x^2|}\,dx \underset{dx=2\cos y\,dy}{\overset{x=2\sin y}{=}} 2\int \sqrt{|4-4\sin^2 y|}\,\cos y\,dy \overset{\cos y\geq 0}{=} 4\int \cos^2 y\,dy = 2\int (\cos(2y)+1)\,dy$$
$$= \sin(2y) + 2y|_{y=\arcsin(x/2)} = \sin y\sqrt{4-4\sin^2 y} + 2y|_{y=\arcsin(x/2)} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin(x/2)$$

Na intervalu $(2,\infty)$ použijeme substituci $x = 2\cosh y$. Funkce $2\cosh y$ zobrazuje interval $(0,\infty)$ na $(2,\infty)$ prostě a na a máme $dx = 2\sinh y\,dy$ a použitím druhé věty o substituci získáme pro $x \in (2,\infty)$

$$F_2 = \int \sqrt{|4-x^2|}\,dx \underset{dx=2\sinh y\,dy}{\overset{x=2\cosh y}{=}} 2\int \sqrt{|4-4\cosh^2 y|}\,\sinh y\,dy \overset{\sinh y\geq 0}{=} 4\int \sinh^2 y\,dy$$
$$= \int (\exp(y)-\exp(-y))^2\,dy = \int \exp(2y)+\exp(-2y)-2\,dy = \frac{\exp(2y)-\exp(-2y)-4y}{2}|_{y=\mathrm{arccosh}(x/2)}$$
$$= \frac{(\exp(y)-\exp(-y))(\exp(y)+\exp(-y))-4y}{2}|_{y=\mathrm{arccosh}(x/2)} = 2\sinh y\cosh y - 2y|_{y=\mathrm{arccosh}(x/2)}$$
$$\sqrt{4\cosh^2 y - 4}\cosh y - 2y|_{y=\mathrm{arccosh}(x/2)} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\,\mathrm{arccosh}(x/2) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)$$

kde jsme použili[1]vzorec

$$\mathrm{arccosh}(x/2) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right).$$

Zatím jsme vynechávali integrační konstantu. Tu teď využijeme k tomu abychom námi nalezené funkce vhodně nalepili a získali tak primitivní funkci na celém intervalu $(0,\infty)$. Máme tedy

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin(x/2) + C_1 & x \in (0,2), \\ \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + C_2 & x \in (2,\infty). \end{cases}$$

Požadujeme, aby funkce byla spojitá na $[0,\infty)$ a aby $F_2(0)=0$, abychom mohli funkci dodefinovat liše. To dává

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin(x/2)+C_1=C_1 \implies C_1=0$$

a

$$\pi=\lim_{x\to 2_-}\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin(x/2)+C_1=\lim_{x\to 2_+}\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)+C_2=C_2 \implies C_2=\pi$$

Nakonec tedy F_2 dodefinujeme liše a získáme

$$F_2(x):=\frac{x}{2}\sqrt{|4-x^2|}-2\begin{cases}-\arcsin(x/2) & |x|\le 2,\\ \operatorname{sign} x\ln\left(\frac{|x|+\sqrt{|x^2-4|}}{2}\right)-\pi\operatorname{sign} x & |x|>2\end{cases}$$

Konečně celá primitivní funkce se pak dá zapsat

$$F(x)=C-\frac{1}{3}|4-x^2|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(4-x^2)+\frac{x}{2}\sqrt{|4-x^2|}-2\begin{cases}-\arcsin(x/2) & |x|\le 2,\\ \operatorname{sign} x\ln\left(\frac{|x|+\sqrt{|x^2-4|}}{2}\right)-\pi\operatorname{sign} x & |x|>2\end{cases}$$

Alternativní výpočet: Pro úplnost uveďme ještě možnost výpočtu druhého integrálu pomocí standardních substitucí, které však vedou na rozklad "ošklivých"pariálních zlomků. Integrál opět musíme rodělitna dva intervaly. Začněme s intervalem $(0,2)$.

$$F_2=\int\sqrt{|4-x^2|}\,dx=\int\sqrt{(2-x)(2+x)}\,dx=\int(x+2)\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$$

Nyní zavedeme substituci

$$t=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\Leftrightarrow x=\frac{4}{t^2+1}-2,$$
$$dx=\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

a vidíme, že funkce $\frac{4}{t^2+1}-2$ zobrazuje interval $(0,1)$ na $(0,2)$ prostě a na a její derivace existuje a je nenulová. Můžeme tedy použít druhou větu o substituci a získáme

$$F_2=\int\frac{4}{t^2+1}t\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt=-\int\frac{32t^2}{(t^2+1)^3}\,dt$$

Tento integrál lze v principu řešit rozkladem na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{32t^2}{(t^2+1)^3}=\frac{At+B}{(t^2+1)}+\frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}+\frac{Et+F}{(t^2+1)^3}.$$

Nicméně mnohem efektivnější je použít integraci per partes. Pokud si uvědomíme, že díky první větě o substituci platí pro $k>1$

$$\int\frac{2t}{(t^2+1)^k}\,dt\underset{dy=2t\,dt}{\overset{y=t^2+1}{=}}\int\frac{1}{y^k}\,dy=\frac{y^{1-k}}{1-k}=\frac{(t^2+1)^{1-k}}{1-k},$$

pak můžeme F_2 postupně pomocí integrace per partes spočítat jako

$$\begin{aligned}F_2&=-16\int\underbrace{t}_{v}\underbrace{\frac{2t}{(t^2+1)^3}}_{u'}\,dt=-16(uv)+16\int v'u=\frac{8t}{(t^2+1)^2}-8\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\\
&=\frac{8t}{(t^2+1)^2}-8\int\frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{8t}{(t^2+1)^2}-8\int\frac{1}{(t^2+1)}-\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\\
&=\frac{8t}{(t^2+1)^2}-8\arctan t+4\int t\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{8t}{(t^2+1)^2}-8\arctan t+4\left(\frac{-t}{t^2+1}+\int\frac{1}{t^2+1}\,dt\right)\\
&=\frac{8t}{(t^2+1)^2}-4\arctan t-\frac{4t}{t^2+1}\Bigg|_{t=\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}}=\frac{8\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}}{(\frac{4}{x+2})^2}-4\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}-\frac{4\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}}{\frac{4}{x+2}}\\
&=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}-4\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}\end{aligned}$$

Pro interval $x\in(2,\infty)$ zavedeme substituci

$$t=\sqrt{\frac{x-2}{2+x}}\Leftrightarrow x=\frac{4}{1-t^2}-2,$$
$$dx=\frac{8t}{(1-t^2)^2}\,dt$$

která zobrazuje interval $(0,1)$ na $(2,\infty)$ prostě. Opět použijeme druhou větu o substituci a dostáváme, že

$$F_2 = \int \sqrt{|4-x^2|}\, dx = \int \sqrt{(x-2)(2+x)}\, dx = \int (x+2)\sqrt{\frac{x-2}{2+x}}\, dx = \int \frac{32t^2}{(1-t^2)^3}\, dt$$

Opět bychom mohli rozložit výsledek na parciální zlomky

$$\frac{32t^2}{(1-t^2)^3} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3} + \frac{D}{1+t} + \frac{E}{(1+t)^2} + \frac{F}{(1+t)^3}.$$

Nicméně mnohem efektivnější je použít integraci per partes. Pokud si uvědomíme, že díky první větě o substituci platí pro $k > 1$

$$\int \frac{-2t}{(1-t^2)^k}\, dt \underset{dy=-2t\,dt}{\overset{y=1-t^2}{=}} \int \frac{1}{y^k}\, dy = \frac{y^{1-k}}{1-k} = \frac{(1-t^2)^{1-k}}{1-k},$$

pak můžeme F_2 postupně pomocí integrace per partes spočítat jako

$$\begin{aligned}
F_2 &= -16 \int \underbrace{t}_{v} \underbrace{\frac{-2t}{(1-t^2)^3}}_{u'}\, dt = -16(uv) + 16 \int v'u = \frac{8t}{(1-t^2)^2} - 8 \int \frac{1}{(1-t^2)^2}\, dt \\
&= \frac{8t}{(1-t^2)^2} - 8 \int \frac{t^2+1-t^2}{(1-t^2)^2}\, dt = \frac{8t}{(1-t^2)^2} - 8 \int \frac{1}{(1-t^2)}\, dt + 4 \int t \frac{-2t}{(1-t^2)^2}\, dt \\
&= \frac{8t}{(1-t^2)^2} - \frac{4t}{1-t^2} - 4 \int \frac{1}{(1-t^2)}\, dt \\
&= \frac{8t}{(1-t^2)^2} - \frac{4t}{1-t^2} - 2 \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\, dt = \frac{8t}{(1-t^2)^2} - \frac{4t}{1-t^2} - 2\ln \frac{1+t}{1-t}\Big|_{t=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}} \\
&= \frac{8\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{(\frac{4}{x+2})^2} - \frac{4\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{\frac{4}{x+2}} - 2\ln \frac{1+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{1-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}} = \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\ln \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}
\end{aligned}$$

Dále už pokračujeme stejně jako před tím, tj. funkci nalepíme v bodu $x = 2$ a dodefinujeme liše.

[1] Protože $y \geq 0$

$$\cosh y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \exp(y) + \frac{1}{\exp(y)} = x \Leftrightarrow (\exp(y))^2 - x\exp(y) + 1 = 0 \Leftrightarrow \exp(y) = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

[12] 4. **Vyšetřete průběh funkce** (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bode D_f, nulové body, body nespojitosti, diferencovatelnost, $D_{f'}$; intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot H_f, limity derivací v krajních bodech $D_{f'}$ tj. směrnice tečen, asymptoty; intervaly konvexity, konkávity funkce f, inflexní body; pečlivý náčrtek grafu)

$$f(x) = e^{-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}$$

Řešení:

Funkce je definována všude kromě $x = \pm 1$, je tedy $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, funkce není periodická.
Funkce je sudá, neboť

$$e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} = e^{-\arctan\left(\frac{1}{(-x)^2-1}\right)}.$$

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1\pm} e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} &= e^{\mp\frac{\pi}{2}},\\
\lim_{x\to -1\pm} e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} &= e^{\pm\frac{\pi}{2}},\\
\lim_{x\to \pm\infty} e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} &= 1,
\end{aligned}$$

funkce tudíž bude mít horizontální asymptotu určenou rovnicí $y = +1$.
Funkce je na svém definičním oboru spojitá, neboť je zde složením spojitých funkcí.
Spočteme první derivaci

$$\left(e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\right)' = 2\frac{xe^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}}{(x^2-1)^2\left(1+\frac{1}{(x^2-1)^2}\right)} = 2\frac{xe^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}}{1+(x^2-1)^2},$$

ihned vidíme, že funkce bude rostoucí na intervalech $(0,1)$ a $(1,+\infty)$ a bude klesající na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,0)$.
Limity derivací v bodech $x = \pm 1$ jsou zřejmě

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1\pm} 2\frac{xe^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}}{(x^2-1)^2\left(1+\frac{1}{(x^2-1)^2}\right)} &= 2e^{\mp\frac{\pi}{2}},\\
\lim_{x\to -1\pm} 2\frac{xe^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}}{(x^2-1)^2\left(1+\frac{1}{(x^2-1)^2}\right)} &= -2e^{\pm\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}$$

rovnice „tečen" v bodu $x = 1$ jsou tedy

$$\begin{aligned}
y &= 2xe^{\frac{\pi}{2}} + \left(-2e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right),\\
y &= 2xe^{-\frac{\pi}{2}} + \left(-2e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right),
\end{aligned}$$

obdobně v $x = -1$ máme (využíváme toho, že funkce je sudá)

$$\begin{aligned}
y &= -2xe^{\frac{\pi}{2}} + \left(-2e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right),\\
y &= -2xe^{-\frac{\pi}{2}} + \left(-2e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Derivace je rovná nule pro $x = 0$ (z již získaných poznatků a elementárních úvah vidíme, že bod $x = 0$, $f(x) = e^{\frac{\pi}{4}}$ je lokálním – ale nikoliv globálním – minimem funkce $f(x)$). Funkce je omezená, ale nemá maximum ani minimum.
Spočteme druhou derivaci

$$\begin{aligned}
\left(e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\right)'' &= \left(2\frac{xe^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}}{1+(x^2-1)^2}\right)'\\
&= e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\left(\left(\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}\right)^2 + \frac{2\left(1+(x^2-1)^2\right) - 2x2(x^2-1)2x}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2}\right)\\
&= 2e^{-\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\frac{-3x^4+4x^2+2}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Abychom mohli určit znaménko druhé derivace, je třeba vyřešit rovnici

$$-3x^4 + 4x^2 + 2 = 0,$$

což je snadné (užijeme substituci $y = x^2$)

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+24}}{-6} = \frac{2}{3} \mp \frac{\sqrt{40}}{6},$$

odkud dostaneme (reálné) kořeny

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{40}}{6}},$$

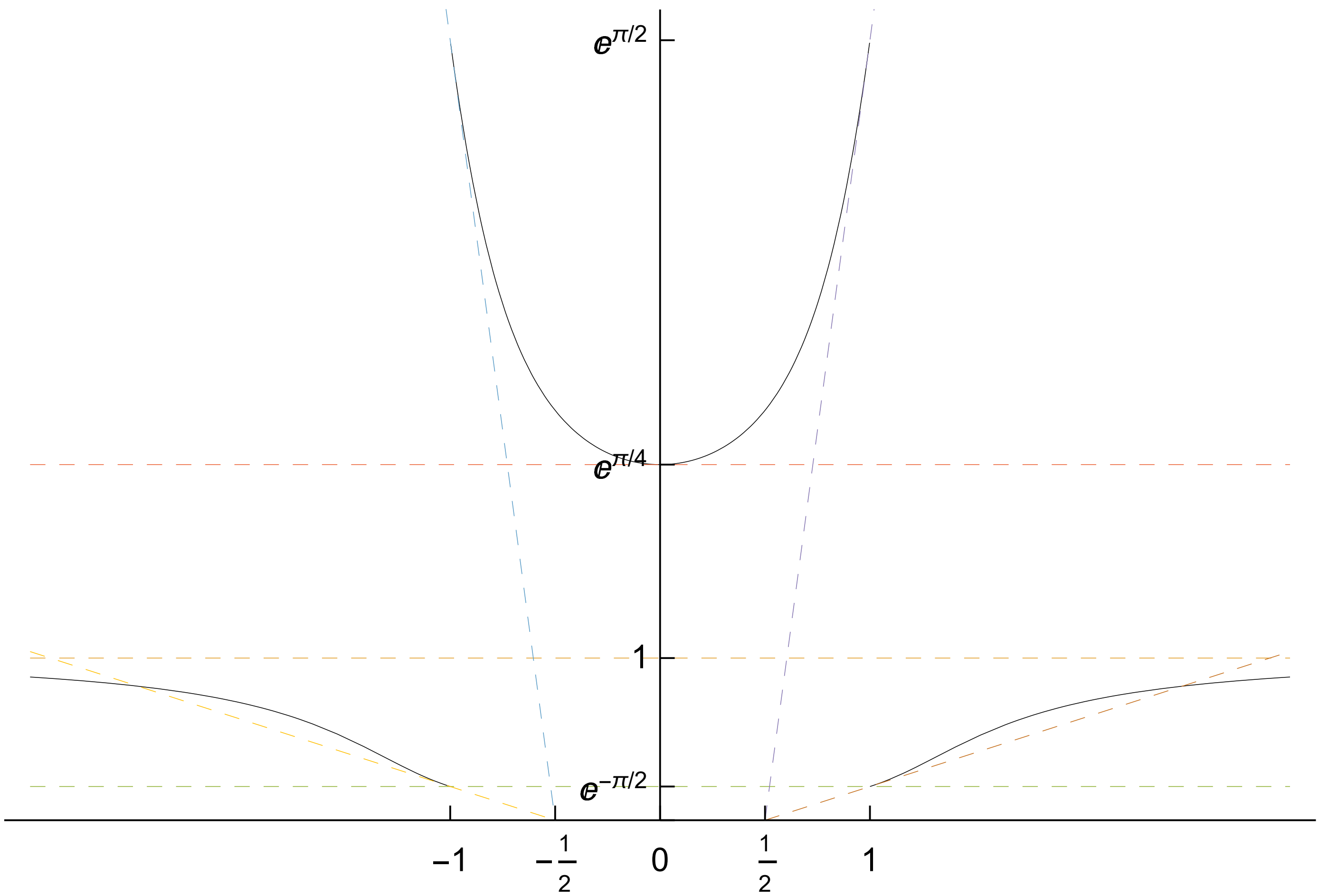
jednoduchým pozorováním odhalíme, že $|x_{1,2}| > 1$. Máme tedy dva inflexní body a tečny v inflexních bodech jsou

$$y_{1,2} = f'(x_{1,2})(x - x_{1,2}) + f(x_{1,2}).$$

Funkce je konkávní na intervalu $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{40}}{6}}\right)$ a na intervalu $\left(\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{40}}{6}}, +\infty\right)$ a je konvexní na intervalech $\left(-\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{40}}{6}}, -1\right)$ a $(-1, 1)$ a $\left(1, \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{40}}{6}}\right)$.

Máme dostatek informací k nakreslení grafu (viz obrázek 1), z něhož vyčteme doposud neurčené charakteristiky. Funkce není prostá, obor hodnot je $\left(e^{-\frac{\pi}{2}}, 1\right) \cup \left[e^{\frac{\pi}{4}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

Ačkoliv je funkce omezená, nenabývá maxima ani minima.



Obrázek 1: Průběh funkce