15.4. MOCNINNÉ (TAYLOROVY, McLAURINOVY) ŘADY, LAURENTOVY ŘADY (A FOURIEROVY) ŘADY A KLASIFIKACE SINGULARIT.

Věta 15.8 Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $a \in \Omega$, $B_R(a) \subset \Omega$ a $f \in H(\Omega)$.
Pak existují jednoznačně určené $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ tak, že

(*) $$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{pro } z \in B_R(a)}$$

(**) přičemž $$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz \qquad \rho \in (0,R)$$

Terminologie: Řada (*) je mocninná řada, protože však $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, což je důsledek (**) a Cauchyho integrálního vzorečku (a také důkazu Věty 15.8), je řada (*) Taylorova řada (která se pro $a=0$ nazývé McLaurinova řada).

Dk ► Jednoznačnost koeficientů c_n jsme si dokázali již v teorii mocninných řad, viz Věta 6.19: Kdyby byly dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^n$ tak po dosazení $z=a$ máme $c_0 = \tilde{c}_0$. Dále obě řady zderivujeme, atd ...

► Existenci získáme pomocí vzorečku pro součet geometrické řady a Cauchyho integrálního vzorečku. Buď $\rho \in (0,R)$, $w \in B_\rho(a)$.
Pak pro $z \in \partial B_\rho(a)$: $\frac{|w-a|}{|z-a|} < 1$ a tedy:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a-(w-a)} = \frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{w-a}{z-a}\right)}_{=:q}} \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

Dle Věty 5.7 (Cauchyův vzorec)

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^n}\, dz$$

$$\underset{\substack{\text{záměna } \int \text{ a } \sum \\ \text{dle Weierstrassové testu} \\ \text{a stejnoměrné konvergenci}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz\, (w-a)^n \underset{\substack{\text{2. tvrzení} \\ \text{Věty 15.7.}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (w-a)^n.$$

<u>Definice</u> <u>Laurentova řada</u> v $a \in \mathbb{C}$ je řada $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-a)^n$, kde $\{c_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty} \subset \mathbb{C}$. Tato řada <u>konverguje</u> právě když

- $S^+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje

a současně

- $S^-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$ konverguje

Řada $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n}$ se nazývá $\boxed{\text{regulární}}$ <u>část Laurentovy řady</u> (neboť je-li $f \in H(B_R(a))$ tak je její Laurentova řada je právě tato řada dle Věty 15.8)

Řada $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (z-a)^n}$ se nazývá $\boxed{\text{hlavní část}}$ Laurentovy řady (určuje charakter funkce v okolí bodu a, které tato řada popisuje)

Protože $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-m} \frac{1}{(z-a)^m} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-m} \xi^m$

(1) $q := -n$
(2) $n := q$

$\xi := \frac{1}{z-a}$

tak z teorie mocninných řad najdeme:

- z regulární části: $R \in \langle 0, +\infty)$ tak, že $\sum_{n=0} c_n (z-a)^n < \infty$ v $B_R(a)$
- z hlavní části: $\varrho \in \langle 0, +\infty)$ tak, že $\sum c_{-n} \xi^n < \infty$ v $B_{\varrho^{-1}}(0)$

tzn. pokud $\frac{1}{|z-a|} < \varrho^{-1} \Leftrightarrow |z-a| > \varrho$

tedy $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (z-a)^n$ konverguje vně $\overline{B_\varrho(a)}$ $= \mathbb{C} \setminus \overline{B_\varrho(a)}$

Tak jsme dostali následující tvrzení:

$\boxed{\text{Věta 15.9}}$ Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ existují $\varrho, R \in \langle 0, +\infty)$ tak, že

- regulární část $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $B_R(a)$
- hlavní část $\sum_{n=-\infty} c_n (z-a)^n$ —"— a —"— v $\mathbb{C} \setminus \overline{B_\varrho(a)}$

Je-li $\varrho < R$, pak Laurentova řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v $U_{\varrho,R}(a) := \{z \in \mathbb{C};\ \varrho < |z-a| < R\}$ MEZIKRUŽÍ a její součet $S(z) := S^+(z) + S^-(z)$ je holomorfní v $U_{\varrho,R}(a)$

Příklady 1) $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}$ je ve tvaru Laurent. řady v $a\in\mathbb{C}$

a $f\in H(\mathbb{C}-\{a\})$ $\quad R=+\infty$, $\varrho=0$

2) Pro $a=0$, $$e^z+e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!} \quad \text{pro } 0<|z|<+\infty$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$\to R=+\infty$

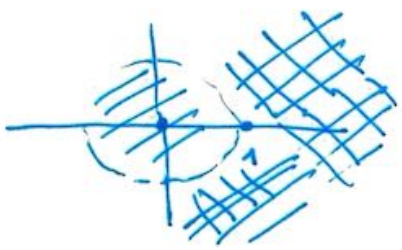
$\to \varrho=0$

3) Rozviňte $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ do Laur. řady kolem $a=0$ a $a=2$

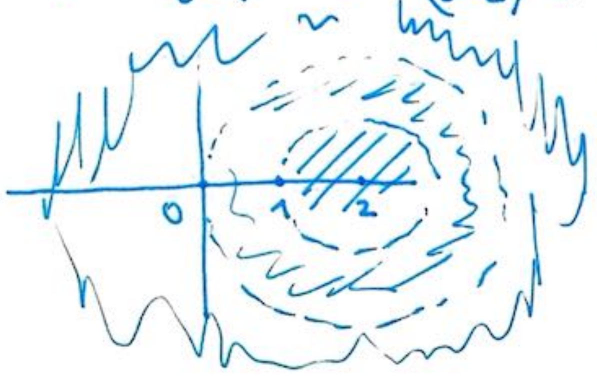
Řešení

▸ $$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}=\begin{cases} |z|<1 & -\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=-\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\dots\right) \\ |z|>1 & -\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \end{cases}$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots+\frac{1}{z^n}+\dots$$



▸ $$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-2)+1}-\frac{1}{(z-2)+2}$$



$\boxed{(1)}$ $|z-2|<1 \Rightarrow \frac{1}{1+(z-2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$

$\boxed{(2)}$ $|z-2|>1 \Rightarrow \frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{(z-2)\left[1+\frac{1}{z-2}\right]}=$

$$=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$$

$\boxed{(3)}$ $|z-2|>2 \Rightarrow -\frac{1}{(z-2)+2}=-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=-\frac{1}{z-2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-2)^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{(z-2)^{n+1}}$

$\boxed{(4)}$ $|z-2|<2 \Rightarrow -\frac{1}{(z-2)+2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$

Tedy Laurentovy řady v $U_{0,1}(2)$: součet (1) a (4)

v $U_{1,2}(2)$: součet (2) a (4)

v $U_{2,+\infty}(2)$: součet (2) a (3)

Věta 15.10 Buď $0 \le \varrho < R \le +\infty$ a $f \in H(U_{\varrho,R}(a))$.
Pak existují jednoznačně určené $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ tak, že

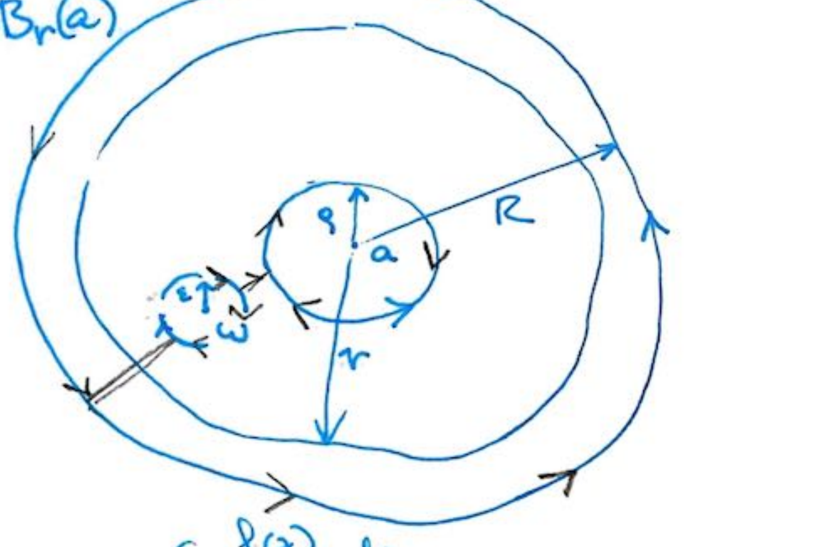
(•) $$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n \quad v \ U_{\varrho,R}(a)}$$

přičemž

(••) $$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dA} \quad \text{kde } r \in (\varrho, R).$$

Dk: Pro $w \in U_{\varrho,r}(a)$ a $z \in \partial B_r(a)$ máme:

- $f \in H(U_{\varrho,R}(a))$
- $\frac{f(z)}{z-w} \in H\left(U_{\varrho,R}(a) \setminus B_\varepsilon(w)\right)$



Tedy dle Cauchyho věty pro $\varrho < \varrho' < r < R' < R$

$$0 = \int_{\partial U_{\varrho',R'}(a) \setminus \partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w} = \underbrace{\int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{z-w}\,dA}_{I} - \underbrace{\int_{\partial B_{\varrho'}(a)} \frac{f(z)}{z-w}\,dA}_{J} - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w}\,dA}_{= f(w)\,2\pi i}$$

a podobně jako ve větě 15.8:

$$I = \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)\,dA}{z-a-(w-a)} = \int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{1}{z-a}\,\frac{f(z)}{1-\frac{w-a}{z-a}}\,dA = \int_{\partial B_{R'}(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dA$$

$$\int_{\partial B_{R'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dA\,(w-a)^n \overset{\text{opět Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dA\,(w-a)^n$$

$$J = \int_{\partial B_{\varrho'}(a)} \frac{f(z)}{z-a-(w-a)}\,dA = -\int_{\partial B_{\varrho'}(a)} \frac{1}{w-a}\,\frac{f(z)}{1-\frac{z-a}{w-a}}\,dA = -\int_{\partial B_{\varrho'}(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)\,(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dA$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_{\varrho'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n}}\,dA\,(w-a)^{-(n+1)} \qquad -(n+1) \to k$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{k=-1} \int_{\partial B_{\varrho'}(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dA\,(w-a)^k = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)\,dA}{(z-a)^{n+1}}\,(w-a)^n,$$

což dává výsledek.

Vztah mezi Laurentovými a Fourierovými řadami

▶ Buď $f \in H(\mathcal{U}_{1-\varepsilon,1+\varepsilon}(0))$ pro $\varepsilon \in (0,1)$.

Pak $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ přičemž $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

Věta 15.10

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \quad \begin{matrix} z = e^{it} \\ dz = ie^{it} dt \end{matrix}$$

což vede celkově dávej Fourierovu řadu pro fci $\varphi(t) = f(e^{it})$:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\right)} e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(f\circ e^{it}, \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

▶ Naopak, každá Four. řada v proměnné x: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

lze přepsat do tvaru $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$

což je Laurentova řada v bodě $a = 0$.

Cvičení Napište Fourierovu řadu fce $\varphi(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a\cos t + a^2}$ $|a| < 1$

Návod: a) ověřte, že $\varphi(t) = f(e^{it})$ kde

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{2i\left[z^2 - (a + \frac{1}{a})z + 1\right]} \quad \text{pro} \quad z \in \mathcal{U}_{1-\varepsilon, 1+\varepsilon}(0)$$

b) spočtěte Laurentovu řadu $f(z)$. ☒

Definice (různých typů singularit) Řekneme, že f má v $a \in \mathbb{C}$

- <u>isolovanou singularitu</u> $\overset{df}{\equiv}$ $\exists R > 0$ tak, že $f \in H(\mathcal{U}_{0,R}(a))$ $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in \mathcal{U}_{0,R}(a)$
- <u>odstranitelnou singularitu</u> $\overset{df}{\equiv}$
  - f má v a isolovanou sing.
  - $c_{-m} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (jen regulární část)
- <u>pól</u> $\equiv$
  - f má v a isolovanou singularitu
  - $(\exists n_0 < 0)(c_{n_0} \neq 0)$ a $(\forall n < n_0)$ $c_n = 0$.
- <u>podstatnou singularitu</u> $\equiv$
  - f má v a isolovanou singularitu
  - $(\forall n < 0)(\exists m < n)(c_m \neq 0)$