# §8 FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

## 8.1 Prostor $\mathbb{R}^d$

Buď $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Prostorem $\mathbb{R}^d$ rozumíme všechny možné d-tice reálných čísel, tzn.

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1, \dots, x_d);\ x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Prvky $\mathbb{R}^d$ se buď značí tučně $\mathbf{x}$, nebo se šipkou $\vec{x}$, nebo s vlnovkou $\underset{\sim}{x}$, nebo se píše $x = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ či $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Víme z LA, že $\mathbb{R}^d$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, kde

- $\vec{x} + \vec{y} \overset{df}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$
  $x = (x_1, \dots, x_d)$
  $y = (y_1, \dots, y_d)$
- $\lambda \vec{x} \overset{df}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$

Tak $(\mathbb{R}^d, +)$ je Abelova grupa s nulovým prvkem $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Na rozdíl od $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, na $\mathbb{R}^d$ není definován součin, který by z $\mathbb{R}^d$ vytvořil těleso.

"Jistým" zobecněním součinu na $\mathbb{R}$ je skalární součin $\vec{x} \cdot \vec{y}$, který však $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ nepřiřadí prvek z $\mathbb{R}^d$, ale číslo.

**Def.** Buď $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$, pak $\sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ se nazývá skalární součin $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Píšeme
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einsteinova} \\ \text{sumační konvence}}}{=} x_i y_i \qquad \text{či} \qquad (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

**Věta 8.1** (Vlastnosti skalárního součinu) Platí:

(S1) Pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ a $\vec{y} \in \mathbb{R}^d$ a pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}_1, \vec{y}) + \beta(\vec{x}_2, \vec{y})$$ LINEARITA

(S2) Pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d$:
$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$ SYMETRIE

(S3) Pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$: $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$
a $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$

Dk plyne přímo z definice. ∎

Definujme zobrazení $|\cdot|_E : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+_0$ předpisem

$$\underbrace{|\vec{x}|_E = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}}_{\text{Euklidovská}}$$

norma / indukovaná skalárním součinem

Platí:

$\boxed{\text{Věta 8.2}}$ ($|\cdot|_E$ splňuje vlastnosti normy) Platí:

(N1) $|\vec{x}|_E \geq 0$ pro $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$ a $|\vec{x}|_E = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ $\boxed{\text{NEZÁPORNOST NORMY}}$

(N2) Pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$: $|\lambda\vec{x}|_E = |\lambda|\,|\vec{x}|_E$ $\boxed{\text{1-HOMOGENITA}}$

(N3) Pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$ : $|\vec{x}+\vec{y}|_E \leq |\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E$ $\boxed{\Delta\text{-NEROVNOST}}$

Také platí Cauchy-Schwarzova nerovnost:

(C-S) Pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $|(\vec{x},\vec{y})| \leq |\vec{x}|_E\,|\vec{y}|_E$
přičemž rovnost nastane právě když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou LZ.

lineárně závislé

Dk • (N1) a (N2) plyne z definice $(\vec{x},\vec{y})$ a (S3).

• $\boxed{\text{Ad (C-S)}}$ · Je-li $\vec{y} = \vec{0}$, pak $(\vec{x},\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}+\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}) + (\vec{x},\vec{0})$
a tak $(\vec{x},\vec{0}) = 0$.

Tedy (C-S) platí pro $\vec{y} = \vec{0}$.

· Je-li $\vec{y} \neq 0$, pak $|\vec{y}|_E \neq 0$ a máme pro $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$ libovolné:

$(\clubsuit)$ $0 \leq (\vec{x}+t\vec{y}, \vec{x}+t\vec{y}) = |\vec{x}|_E^2 + 2t(\vec{x},\vec{y}) + t^2|\vec{y}|_E^2 = f(t)$

$f'(t) = 0 \iff t = -\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{y}|^2}$ a pro toto $t$ dostáváme z $(\clubsuit)$:

$$0 \leq |\vec{x}|_E^2 - \frac{2(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} + \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} = |\vec{x}|_E^2 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|_E^2}$$

což dává (C-S).

Jsou-li $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně nezávislé, pak $\vec{x}+t\vec{y} \neq 0$, a první nerovnost v $(\clubsuit)$ je ostrá. Jsou-li naopak $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé, pak $\vec{x} = s\vec{y}$ a

$$|(\vec{x},\vec{y})| = |(s\vec{y},\vec{y})| = |s|(\vec{y},\vec{y}) = |s|\,|\vec{y}|_E^2 = |s|\,|\vec{y}|_E\,|\vec{y}|_E = |s\vec{y}|_E\,|\vec{y}|_E = |\vec{x}|_E\,|\vec{y}|_E,$$

a rovnost v (C-S) platí.

- zbývá dokázat $\Delta$-nerovnost. Využijeme-li (C-S) nerovnost, máme

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}+\vec{y}|_E^2 &= (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) + 2(\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{y}) \\
&\underset{C-S}{\leq} |\vec{x}|_E^2 + 2|\vec{x}|_E|\vec{y}|_E + |\vec{y}|_E^2 \\
&= \left(|\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E\right)^2,
\end{aligned}
$$

což dává (N3).

<u>Pozorování</u> ① Ukažte, že skalární součin v $\mathbb{R}^d$ je invariantní vzhledem k otočení (reprezentovaný ortogonální maticí $\mathbb{Q}$, splňující $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$).

<u>Řešení</u> Pro $\vec{x}^* = \mathbb{Q}\vec{x}$, $\vec{y}^* = \mathbb{Q}\vec{y}$ platí:

$$
(\vec{x}^*,\vec{y}^*) = (\mathbb{Q}\vec{x},\mathbb{Q}\vec{y}) = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{Q_{is}x_s}\,\underbrace{Q_{ik}y_k}
$$

sumační konvence (sčítání přes $s$, $k$ od 1 do $d$)

$$
\underset{\text{definice transponované matice}}{=} \sum_{i=1}^{d} (\mathbb{Q}^T)_{si}\, Q_{ik}\, y_k x_s
$$

$$
\underset{\mathbb{Q}^T\mathbb{Q}=\mathbb{I}}{=} \delta_{sk}\, y_k x_s = \sum_{k=1}^{d} y_k x_k
$$

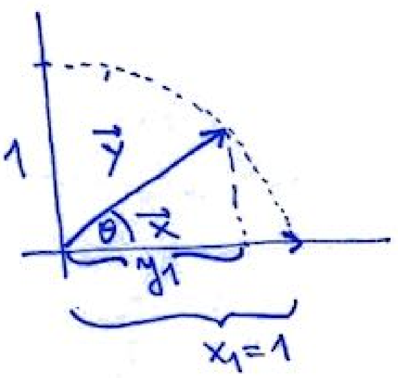
$$
= (\vec{x},\vec{y}). \qquad \blacksquare
$$

② Buď $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$, $|\vec{x}|_E = |\vec{y}|_E = 1$. Pak vhodným pootočením lze ztotožnit $\vec{x}$ s vektorem $(1,0,\dots,0)$ a vektor $\vec{y}$ <u>umístit</u> do roviny dané vektory $(1,0,\dots,0)$ a $(0,0,\dots,1)$.

Pak (viz obrázek)

$$
\vec{x}\cdot\vec{y} = y_1 = \cos\theta,
$$

kde $\theta$ je úhel sevřený mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.




Pro libovolné $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^d$, pak

$$
\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|_E}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|_E} = \cos\theta,
$$

což implikuje

$$
(\vec{u},\vec{v}) = \cos\theta\, |\vec{u}|_E\, |\vec{v}|_E.
$$

viz Pozorování ①

Pomocí normy lze definovat <u>vzdálenost</u> (neboli <u>metriku</u>)

$$\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) := |\vec{x}-\vec{y}|_E .$$

Platí:

**Věta 8.3** (Vlastnosti metriky)

(M1) $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) \geq 0 \wedge \mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) = 0 \iff \vec{x}=\vec{y}$ NEZÁPORNOST

(M2) $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) = \mathrm{dist}_E(\vec{y},\vec{x})$ SYMETRIE

(M3) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^d$: $\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) \leq \mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{z}) + \mathrm{dist}_E(\vec{z},\vec{y})$ Δ-OVÁ NEROVNOST

Dk (Mi) plynou z (Ni) ve Větě 9.2. ∎

---

**Zobecněné struktury**

**pre-Hilbertův prostor** neboli prostor se skalárním součinem je jakýkoliv vektorový prostor H, na kterém je definováno zobrazení

$$(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$$

splňující (S1)-(S3), tj. linearitu, symetrii a nezápornost.

<u>Příklad</u> 1 Uvažujme prostor $l_2 := \{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$ a definujme pro $x,y \in l_2$, tzn. $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$(x,y)_H := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

Pár $(l_2, (\cdot,\cdot)_H)$ je pre-Hilbertův. Ověřte.

2 Uvažujte $R((a,b))$ prostor Riemannovsky integrovatelných funkcí na $(a,b)$. Ukažte, že $R((a,b))$ je vektorový prostor. Pro $f,g \in R((a,b))$, definujme

$$(f,g)_H := (R)\int_a^b f(x)g(x)\,dx .$$

Q: Proč není $(f,g)_H$ skalární součin na $R((a,b))$?

Vždy lze v pre-Hilbertově prostoru definovat $\|\cdot\|_H : H \to \mathbb{R}_0^+$ předpisem

$$\|u\|_H := \sqrt{(u,u)_H}$$

Pak $\|\cdot\|_H$ splňuje vlastnosti (N1) a (N2). Pokud se podaří ukázat, že $\|\cdot\|_H$ splňuje (N3), pak

$\|\cdot\|_H$ je norma na prostoru $H$

Říkáme, že $\|\cdot\|_H$ je <u>norma indukovaná skalárním součinem</u>

$\boxed{\text{Normovaný prostor}}$ Je-li $X$ vektorový prostor, na kterém existuje zobrazení $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}_0^+$ splňující (N1)–(N3), pak $(X, \|\cdot\|_X)$ se nazývá <u>normovaný prostor</u>

<u>Příklad</u> ① Prostor $C(\langle a,b\rangle)$ je <u>vektorový prostor</u> <u>$\infty$-dimenze</u> neboť $x^k \in C(\langle a,b\rangle)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a ze vztahu
$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i = 0$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$ plyne $\lambda_i = 0$ a tak $\{1, x, \dots, x^k, \dots\}$ jsou lineárně nezávislé.

Definujme $\|f\|_{C(\langle a,b\rangle, \max)} := \|f\|_\infty := \max\limits_{x \in \langle a,b\rangle} |f(x)|$

Pak $\|f\|_\infty$ je norma, OVĚŘTE, a prostor

$$\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_\infty\right) \text{ je normovaný prostor.}$$

② Definujeme-li na stejném prostoru

$$\|f\|_{C(\langle a,b\rangle, \mathrm{int})} := \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

pak $\|f\|_1$ je na $C(\langle a,b\rangle)$ opět norma.

Prostor $\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_1\right)$ je opět normovaný prostor.

Definice Buď $X$ normovaný prostor s normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Řekneme, že tyto normy jsou ekvivalentní pokud existují $c_1, c_2 > 0$ tak, že $\forall x \in X$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

Příklad • Normy $\|f\|_\infty$ a $\|f\|_1$ NEJSOU v $C(\langle a,b\rangle)$ ekvivalentní.

$\boxed{\text{METRICKÝ PROSTOR}}$ Buď $M$ nějaká (neprázdná) množina objektů,*) na které lze zavést zobrazení

$$\varrho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$$

splňující (M1) - (M3). Pak $(M, \varrho)$ nazveme metrický prostor

Příklad • $C(\langle a,b\rangle)$ je metrický prostor s metrikou
$$\varrho_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)-g(x)|$$

• $C(\langle a,b\rangle)$ je metrický prostor s metrikou
$$\varrho_1(f,g) := \|f-g\|_1 = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Je-li $X = (X, \|\cdot\|_X)$ normovaný prostor, pak $X$ je (vektorový) metrický prostor s metrikou

$$\varrho(x,y) := \|x-y\|_X$$

Tato metrika se nazývá metrika (vzdálenost) indukovaná normou.

*) Nemusí tedy $M$ být vektorový prostor.