7.4 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU

Mějme $f, a_0, a_1, \dots, a_n \in C((a,b))$ a uvažujme rovnici

$$\boxed{(20) \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)}$$

Protože je diferenciální operátor

$$\underline{L} : C^k((a,b)) \to C((a,b)),$$

definovaný předpisem

$$L(x)y = Ly := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

lineární, tak rovnice (20) je

> lineární ODR s pravou stranou f a koeficienty $a_0, \dots, a_n$ a to řádu n, pokud $\boxed{a_n(x) \neq 0 \text{ na } (a,b), \quad (21)}$
> což budeme nadále předpokládat.
> Je-li $f \equiv 0$, pak přidáváme k rci (20) slovo homogenní.

Věta 7.4 (O globální existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro rovnici (20)). Nechť $f, a_0, \dots, a_n \in C((a,b))$ a $a_n \neq 0$ na (a,b). Pak pro každé $x_0 \in (a,b)$ a pro každou n-tici $(y_0, \dots, y_n)$ existuje právě jedno řešení $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ rovnice (20) splňující

(22) $\quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_n \quad \leftarrow$ POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

Důkaz **KROK 1** Převedení $\boxed{(20)+(22)}$ na počáteční úlohu pro systém ODR 1. řádu.

Podělme (20) fcí $a_n(x)$ a označme $u_1 := y, u_2 := y', \dots, u_n := y^{(n-1)}$.

Pak dostáváme

(23)
$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1}' = u_n \\ u_n' = -\dfrac{a_0(x)}{a_n(x)}u_1 - \dfrac{a_1(x)}{a_n(x)}u_2 - \dots - \dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}u_n + \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

spolu s

$$\begin{cases} u_1(x_0) = y_0 \\ u_2(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u_n(x_0) = y_n \end{cases}$$

což lze psát v kompaktním tvaru pro $\vec{u} := (u_1,\dots,u_n)$:

(24) $\boxed{\vec{u}\,' = A(x)\,\vec{u} + \vec{f}(x) =: \vec{F}(x,\vec{u}) \qquad \text{spolu s} \quad \vec{u}(x_0) = (y_0,\dots,y_n)^T.}$

KROK 2 Lokální existence a jednoznačnost řešení (24) a tedy $\boxed{(20)+(22)}$

Protože $\vec{F}$ (definovaná v (24)) závisí na $\vec{u}$ lineárně, je fce $\vec{F}$ lipschitzovsky spojitá vzhledem k $\vec{u}$.

Dle Picard-Lindelöfovy věty 7.3 tak existují $\delta>0$ a $\boxed{\vec{u}:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}^n}$ splňující (24), tj. platí

$$\vec{u}\,'(x) = \vec{F}(x,\vec{u}(x)) \quad \text{pro } \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

a

$$\vec{u}(x_0) = (y_0,\dots,y_n)^T.$$

INTERMEZZO

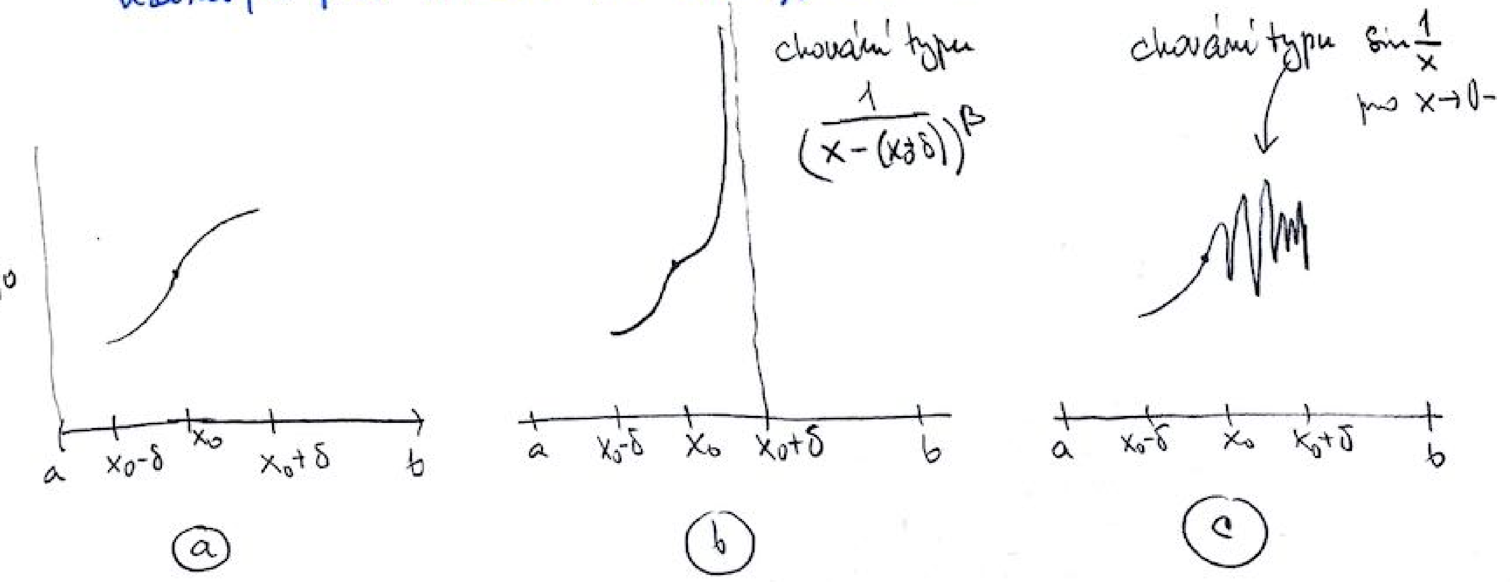
Navíc, toto $\vec{u}$ je jediné.

Zbývá ukázat, že $\vec{u}$ lze jednoznačným způsobem rozšířit na (a,b).
Budeme uvažovat jen rozšíření za $x_0+\delta$ v případě kdy $x_0+\delta<b$.
[Rozšíření vlevo tj. před $x_0-\delta$ se udělá analogicky (pokud $x_0-\delta>a$).]

Víme, že řešení $\vec{u}$ je spojité a má spojité první derivace na $(x_0,x_0+\delta)$.
Stačí ukázat, že existuje $\lim_{x\to x_0+\delta-}\vec{u}(x)$ a je vlastní, tj.

(25) $\boxed{\exists\, \vec{U}\in\mathbb{R}^n \text{ tak, že } \lim_{x\to x_0+\delta-} u_i(x) = U_i.}$

Jakmile (25) platí, lze opět využít Picard-Lindelöfovu větu 7.3 a sestrojit řešení začínající v $x_0+\delta$, řešící rci $\vec{u}\,' = \vec{F}(x,\vec{u})$ s počátečními podmínkami $\vec{u}(x_0+\delta) = U_i$. Zkrátka řečeno, chceme ukázat, že platí situace na Obr. a), a nenastane situace na Obr. b) a c).



$\boxed{\text{KROK 3}}$ Omezenost řešení $\vec{u}$ a jeho derivací na $\langle x_0, x_0+\delta)$

Připomeň: $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} := \sum_{i=1}^m u_i^2$.

Tak

$$\frac{d}{dx}|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} = 2\sum_{i=1}^m u_i u_i' \overset{(23)}{=} 2\sum_{i=1}^{m-1} u_i u_{i+1} - \left(2\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j(x)}{a_m(x)} u_{j+1} u_m\right) + 2\frac{f(x)}{a_m(x)} u_m$$

(26)

$$\leq \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2 + u_{i+1}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \max_{[x_0, x_0+\delta]} \frac{|a_j(x)|}{|a_m(x)|}(u_{j+1}^2 + u_m^2)$$

$$+ \max_{x\in[x_0,x_0+\delta]} \frac{1}{|a_m(x)|}\left(\max_{x\in[x_0,x_0+\delta]} |f(x)|^2 + u_m^2\right)$$

$$\leq C_1|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} + C_2$$

kde $C_1, C_2 > 0$ (závisí na $n, x_0, x_0+\delta$)

VYUŽÍVÁME FAKT, že $\boxed{x_0+\delta < b}$ a spojitost dat (koeficientů a pravé strany na $[x_0, x_0+\delta]$.

Metodou ála integrační faktor:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-C_1(x-x_0)}|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m} - C_1|\vec{u}|^2_{\mathbb{R}^m}\right)e^{-C_1(x-x_0)}$$

$$\overset{(26)}{\leq} C_2 e^{-C_1(x-x_0)} \leq C_2.$$

Odtud, integrací od x_0 do x, kde $x \in (x_0, x_0+\delta)$, dostáváme:

(27)
$$\begin{cases} |\vec{u}(x)|^2_{\mathbb{R}^m} \leq |\vec{u}(x_0)|^2_{\mathbb{R}^m} e^{C_1(x-x_0)} + C_2(x-x_0) \\ \qquad \leq |(y_0, \dots, y_m)|_{\mathbb{R}^m} e^{C_1(b-x_0)} + C_2(b-x_0) =: M > 0 \end{cases}$$

Tedy $\vec{u} \in C(\langle x_0, x_0+\delta))$ a omezená na $\langle x_0, x_0+\delta)$. [Chování řešení načrtnuté na obr. (b) je vyloučeno.]

Navíc, z rovnice (24) plyne

$$|\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m} \leq |\mathbb{A}(x)\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + |\vec{f}(x)|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\leq \|\mathbb{A}(x)\| \, |\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + \frac{|f(x)|}{|a_m(x)|}$$

což implikuje, že pro $\forall x \in [x_0, x_0+\delta)$

$$|\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m} \overset{(27)}{\leq} \tilde{M}.$$

předpoklady na data.

Tedy*) $\sup_{x\in(x_0,x_0+\delta)} \left(|\vec{u}(x)|_{\mathbb{R}^m} + |\vec{u}'(x)|_{\mathbb{R}^m}\right) \leq M + \tilde{M} < +\infty.$

*) což $\sin\frac{1}{x}$ nesplňuje

$\boxed{\text{KROK 4}}$ Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existují $U_i \in \mathbb{R}$ tak, že

$$(28) \qquad \boxed{\lim_{x \to x_0+\delta-} u_i(x) = U_i}$$

$\boxed{\text{Tedy (25) platí a důkaz bude hotov.}}$

Mějme nějakou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \to x_0+\delta-$. Uvažujme $\{u_i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je omezená, dle kroku 3, konstantou $\sqrt{M}$. Dle Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}$ a $U_i \in \mathbb{R}$ tak, že

$$u_i(x_{n_k}) - U_i \to 0 \quad \text{pro } k \to \infty. \quad (*)$$

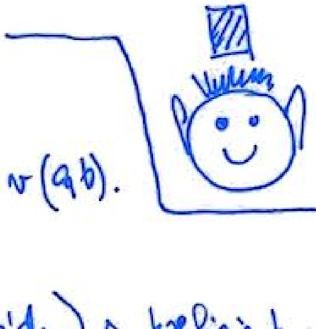
Pak však, pro $x \in \langle x_0, x_0+\delta)$,

$$|u_i(x) - U_i| \le |u_i(x) - u_i(x_{n_k})| + |u_i(x_{n_k}) - U_i|$$
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} |u_i'(\xi)|\,|x - x_{n_k}| + |u_i(x_{n_k}) - U_i|$$
$$\overset{\text{KROK 3}}{\le} \tilde{M}\,|x - x_{n_k}| + |u_i(x_{n_k}) - U_i|$$
$$\le \tilde{M}\big(|x - (x_0+\delta)| + |x_{n_k} - (x_0+\delta)|\big) + |u_i(x_{n_k}) - U_i|$$

a členy na pravé straně lze udělat libovolně malé pro k dostatečně velké a x blízké $x_0+\delta$. Tak (28) platí, a důkaz je hotov. Definujme-li totiž

$$b_* := \sup_{z \in \mathcal{M}}, \quad \text{kde } \mathcal{M} := \left\{ [x_0, z) \subset [a,b);\ (24) \text{ má řešení na } [x_0, z) \right\}$$

Víme, že $\mathcal{M} \neq \emptyset$ a $b_* \in (x_0, b\rangle$. Pokud $b_* = b$ jsme hotovi. Pokud $b_* < b$, pak dostaneme spor pomocí argumentace v Kroku 3 a 4.



$\boxed{\text{Důsledek A}}$ Úloha $Ly = 0$ s počátečními podmínkami

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ má jediné řešení } y \equiv 0 \text{ v } (a,b).$$

Zde Ly označuje levou stranu rovnice (20).

$\boxed{\text{Důsledek B}}$ U lineárních rovnic (1., 2., ..., n-tého řádu) s koeficienty závislými spojitě na x na (a,b) nemůže nastat "větvení".

VLASTNOSTI ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ RCE $Ly=0$

Věta 7.5 Množina $\{y \in C((a,b));\ Ly=0\}$ tvoří n-dimenzionální podprostor $C^n((a,b))$. BÁZE SE NAZÝVÁ FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM.

Dk • Je-li $y \in C((a,b))$ a řeší $Ly=0$, pak např. A přepisu na systém ODR 1. řádu vidíme, že $y \in C^n((a,b))$. Skutečnost, že $K := \{y \in C^n((a,b));\ Ly=0\}$ je uzavřené na součet a násobení skalárem je snadné ověřit. Proveďte.

• Ukážeme, že $\dim K = n$.

▶ Buď $w_1, \dots, w_n$ definovány jako řešení počátečních úloh

$$(\text{✿}) \qquad \boxed{\begin{aligned} &L w_i = 0 \ \text{v} \ (a,b) \\ &w_i^{(j-1)}(x_0) = \delta_{ij} \qquad \text{pro } j = 1,2,\dots,n \end{aligned}}$$

neboli
$$\boxed{w_1} \quad Lw_1 = 0 \ \text{v}\ (a,b) \qquad w_1(x_0)=1,\ w_1'(x_0)=0, \dots, w_1^{(n-1)}(x_0)=0$$
$$\boxed{w_2} \quad Lw_2 = 0 \ \text{v}\ (a,b) \qquad w_2(x_0)=0,\ w_2'(x_0)=1, \dots, w_2^{(n-1)}(x_0)=0$$
$$\vdots$$
$$\boxed{w_n} \quad Lw_n = 0 \ \text{v}\ (a,b) \qquad w_n(x_0)=0,\ w_n'(x_0)=0, \dots, w_n^{(n-1)}(x_0)=1.$$

Tvrdíme, že $\{w_1, \dots, w_n\}$ jsou lineárně nezávislé (LN). Je-li totiž $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i(x) = 0}$ v (a,b), pak dosazením x_0 dostanu $\lambda_1 = 0$, zderivováním ↓ v (a,b), a dosazením x_0 — " — $\lambda_2 = 0$, atd.

Tedy $\dim K \geq n$.

▶ Je-li y libovolné řešení $Ly=0$, tj. $y \in K$, pak položíme $\lambda_j = y^{(j-1)}(x_0)$. Tvrdíme, že pak $y(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j(x)$, kde w_j jsou zavedeny v (✿). Definujme

$$z^{(x)} := y^{(x)} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j^{(x)}.$$

Pak • $z(x_0) = z'(x_0) = \dots = z^{(n-1)}(x_0) = 0$
• $Lz = 0$ v (a,b)

a máme

a dle Důsledku A Věty 7.4 $z \equiv 0$, což implikuje

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Tedy $\dim K = n$. ▨

Pro ověření lineární nezávislosti řešení $Ly=0$ je užitečný pojem Wronskiánu.

$\boxed{\text{Definice}}$ (WRONSKIÁN) Mějme n funkcí $u_1,\dots,u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$.
Pak Wronskián těchto funkcí v bodě $x_0 \in (a,b)$ definujeme:

$$W_{[u_1,\dots,u_n]}(x_0) := \det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \dots & u_n'(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} =: \det \mathbb{V}(x_0)$$

jiné pomocné značení

$\boxed{\text{Věta 7.6}}$ Jsou-li $u_1,\dots,u_n$ lineárně závislé, pak $W_{[u_1,\dots,u_n]}(x)=0$ pro všechna $x\in(a,b)$.

Dk Z předpokladu plyne, že existuje netriviální kombinace $u_1,\dots,u_n$, která je nulová, tzn.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x) = 0 \quad v\ (a,b) \quad \text{a} \quad \lambda_i \text{ nejsou všechna nulová.}$$

Postupným derivováním

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^{(k)}(x) = 0 \quad v\ (a,b) \qquad \text{pro } k=0,1,\dots,n-1$$

což implikuje $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{V}_i(x) = 0 \quad v\ (a,b) \quad \text{kde } \vec{V}_i(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1'(x) \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Tedy sloupce matice $\mathbb{V}(x)$ jsou lineárně závislé,
což implikuje $\det \mathbb{V}(x) = W_{[u_1,\dots,u_n]}(x) = 0$. ∎

- Obecně neplatí tvrzení: Jsou-li $u_1^{(x)},\dots,u_n^{(x)}$ lineárně nezávislé $v\,(a,b)$, pak $W_{[u_1,\dots,u_n]}(x)\neq 0$ pro $x\in(a,b)$.

Skutečně: buď $I=\mathbb{R}$ a

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & v\ (-\infty,0) \\ t^2 & v\ \langle 0,+\infty) \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} t^2 & v\ (-\infty,0) \\ 0 & v\ \langle 0,+\infty) \end{cases}$$

pak $\lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) = 0$ pro $\forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$,

ale $$W_{[u_1,u_2]}(t) = \begin{cases} \det\begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = 0 & v\ (-\infty,0) \\ \det\begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 0 \end{pmatrix} = 0 & v\ \langle 0,+\infty). \end{cases}$$

• Pokud však $u_1, \dots, u_m$ řeší $Ly = 0$, pak již platí, že:
" lineární nezávislost $\{u_1, \dots, u_m\} \Rightarrow W_{[u_1, \dots, u_m]} \neq 0$ "

Přesněji, platí následující věta.

$\boxed{\text{Věta 7.7}}$ Nechť $\{u_1, \dots, u_m\}$ řeší $L(y) = 0$. $L = L(x)$

Pak

$$(30) \qquad W'_{[u_1, \dots, u_m]}(x) = -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} W_{[u_1, \dots, u_m]}(x)$$

což je ekvivalentní s

$$(31) \qquad W_{[u_1, \dots, u_m]}(x) = W_{[u_1, \dots, u_m]}(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{m-1}(s)}{a_m(s)}\, ds}.$$

Odsud plyne, že může nastat jen jedna z dvou možností:

(α) $\forall x \in (a,b)$: $W_{[u_1, \dots, u_m]}(x) = 0$

(β) $\forall x \in (a,b)$: $W_{[u_1, \dots, u_m]}(x) \neq 0$.

Navíc,

$(\neq)$ $\{u_1, \dots, u_m\}$ jsou lin. nezávislý systém na (a,b) $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in (a,b)$ tak, že $W_{[u_1, \dots, u_m]}(x_0) \neq 0$.

Dk $\boxed{\text{Ad (30)}}$ Tvrzení plyne z vlastností determinantu, což je součet vhodných součinů. Tak

$$W'_{[u_1, \dots, u_m]}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1^{(k+1)} & u_2^{(k+1)} & \dots & u_m^{(k+1)} \\ u_1^{(k+1)} & u_2^{(k+1)} & \dots & u_m^{(k+1)} \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{OPAKUJÍ} \\ \text{SE ŘÁDKY} \\ \text{VYJMA POSLEDNÍHO}}}{=} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ u_1^{(m-2)} & u_2^{(m-2)} & \dots & u_m^{(m-2)} \\ u_1^{(m)} & u_2^{(m)} & & u_m^{(m)} \end{pmatrix}$$

užiji rovnici (ODR)

$$\underset{y_i^{(m)} = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(x)}{a_m(x)} y_i^{(j)}}{\downarrow} \qquad -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ u_1^{(m-2)} & u_2^{(m-2)} & & u_m^{(m-2)} \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} W_{[u_1, \dots, u_m]}(x),$$

což je ODR 1. řádu typu $y' + \frac{a_{m-1}(x)}{a_m(x)} y = 0$, kterou umíme řešit. Tedy platí nejen (30), ale také $\boxed{(31), (\alpha), (\beta).}$ Zbývá ověřit ekvivalenci $(\neq)$.

$\boxed{\text{Ad}(\ne)}$ $(\ne)$ je ekvivalentní:

$(\bullet)$ $\{u_1,\dots,u_m\}$ jsou lineárně závislé $\iff \forall x_0\in(a,b)\ W_{[u_1,\dots,u_m]}(x_0)=0$

Dokažme tedy $(\bullet)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 7.6

$\boxed{\Leftarrow}$ Z předpokladu plyne, že sloupce matice W (viz definice Wronskiánu) jsou lineárně závislé. Vezměme $x_0\in(a,b)$ lib., pevné. Pak existují $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$ (ne všechna λ_j jsou nulová) tak, že

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j^{(k)}(x_0)=0 \quad \text{pro všechna } k=0,1,\dots,m-1$$

Pak $u(x):=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j(x)$ splňuje $\boxed{Lu=0}$ (neb $Lu_j=0$ dle předpokladu)

a $\boxed{u(x_0)=u'(x_0)=\dots=u^{(m-1)}(x_0)=0}$. Dle Důkazu A Věty 7.4 $u\equiv 0$. ▨

VLASTNOSTI ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE $Ly=f$

Z lineární algebry víme, že pro lineární operátor $L:V\to V$ ($\dim V<+\infty$.) mohou nastat dvě varianty řešení rovnice $Lx=a$:

Buď • řešení neexistují

Nebo • $x\in W_\alpha=\{\alpha+W\}$, kde $\underset{\text{jedno speciální řeš.}}{L\alpha=a}$ a $\underset{\text{prostor všech řeš. $\triangleright$ $a=0$}}{W=\operatorname{Ker}L}$

← VIZ TVRZENÍ 10, str. 22 D. STIBO: LAF

Řešíme rovnici $\boxed{L(t)y=f}$, o které víme, dle Věty 7.4, že řešení na (a,b) má (a je jediné pokud specifikujeme poč. podmínky.).
Z lineární algebry tedy víme, že obecné řešení $L(t)y=f$ má tvar:

$$\boxed{y^f_{obec}(x)=y^f_{part}(x)+y_{obs,hom}(x)}$$

Následující věta nám dává návod jak najít y^f_{part}.

$\boxed{\text{Věta 7.8}}$ $\boxed{\text{Variace konstant}}$ Buď $\{u_i\}_{i=1}^m$ báze prostoru $\{y\in C(a,b); Ly=0\}$. [fundamentální systém]

Nechť $c_i:(a,b)\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$ jsou takové, že c_i' řeší

$$(\heartsuit)\quad \begin{cases} c_1'(x)u_1(x)+\dots+c_m'(x)u_m(x)=0\\ c_1'(x)u_1'(x)+\dots+c_m'(x)u_m'(x)=0\\ \vdots\\ c_1'(x)u_1^{(m-1)}(x)+\dots+c_m'(x)u_m^{(m-1)}(x)=\dfrac{f(x)}{a_m(x)}\end{cases}$$

Pak $y^f_{part}(x):=\sum_{i=1}^{m}c_i(x)\,u_i(x)$ řeší $L(t)y=f$.

Dk: Dosadíme y^f_{part} do rovnice a užiji $(\heartsuit)$. ▨

Otázkou zůstává jak nalézt $c_i'(x)$ resp. $c_i(x)$. Pozorujme, že

$$(\heartsuit) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \cdots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}}_{W} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{f}{a_m} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $\det W = W_{[u_1,\dots,u_m]}$, který bude nenulový vždy pokud $\{u_1,\dots,u_m\}$ jsou lineárně nezávislé. Tedy dle Cramerova pravidla

$$c_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(x)} \quad \text{kde } W_i = \det \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_{i+1} & \cdots & u_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-1)} & \cdots & u_i^{(m-1)} & \frac{f}{a_m} & u_{i+1}^{(m-1)} & \cdots & u_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i+m} \frac{f}{a_m} \det \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & & u_{i-1} & u_{i+1} & & u_m \\ \vdots & & & & & \\ u_1^{(m-2)} & & u_{i-1}^{(m-2)} & u_{i+1}^{(m-2)} & & u_m^{(m-2)} \end{pmatrix}}_{\text{matice } (m-1)\times(m-1)}.$$

Tak

$$y^f_{part}(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x) u_i(x), \text{ kde}$$

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{a_m(s)} \frac{(-1)^{i+m}}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & \dots & u_{i-1}(s) & u_{i+1}(s) & \dots & u_m(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-2)}(s) & \dots & u_i^{(m-2)}(s) & u_{i+1}^{(m-2)}(s) & \dots & u_m^{(m-2)}(s) \end{pmatrix} ds$$

neboli

$$\boxed{y^f_{part}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{a_m(s)} \frac{1}{W_{[u_1,\dots,u_m]}(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & \cdots & u_m(s) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(m-2)}(s) & \cdots & u_m^{(m-2)}(s) \\ u_1(x) & \cdots & u_m(x) \end{pmatrix} ds}$$

Tento vzoreček má spíše symbolický význam – lze napsat formulku, ale z pohledu další analýzy či využití při řešení příkladů je jeho role spíše okrajová.

Až doposud jsme v této sekci 7.4 zkoumali lineární ODR m-tého řádu s koeficienty (a_k) závislými na x. Teorie je úplná, ale není metoda, jak obecně nalézt bázi (fund. systém) $L(x)y=0$. Více na cvičení. Proto se dále omezíme na a_k konstantní. (lze pro Eulerovy rovnice)

LINEÁRNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Pro $a_n = 1$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ se rovnice (20) redukuje na

$$(30) \qquad \boxed{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x).}$$

Hledáme-li řešení homogenní rovnice ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, dostaneme charakteristickou rovnici

$$(31) \qquad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \lambda = 0.$$

Věta 7.9 (n-různých kořenů (31)) Má-li (31) n-různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, pak $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ tvoří bázi (fund. systém) rovnice $Ly = 0$.

Dk
- Víme, že $e^{\lambda_i x}$ řeší $Ly = 0$.
- Zbývá ukázat, že $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ jsou lineárně nezávislé.

Avšak

$$W_{[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}]}(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

> Alternativně: stačí ukázat, že Wronskián se nenuluje jen v jednom bodě, např. $x = 0$. Opět vede na

$$= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 \qquad \blacksquare$$

Věta 7.10 Je-li λ kořen násobnosti k (31), pak $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ řeší $Ly = 0$.

Dk [1] Je-li $\lambda = 0$ kořen násobnosti k, pak $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$ a tedy triviálně $1, x, \dots, x^{k-1}$ řeší $Ly = 0$.

[2] Je-li $\lambda \neq 0$, hledejme $y(x)$ ve tvaru $y(x) = z(x)e^{\lambda x}$, z libovolná.

Máme

(*) $\underline{L(y(x)) = L\left(z(x)e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x} M(z(x))}$, kde M je diferenciální operátor n-tého řádu

Buď P charakteristický polynom L

a Q —"— M. Tzn. $M(e^{\mu x}) = Q(\mu)e^{\mu x}$

$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$.

Odtud

$$Q(\mu) = \frac{M(e^{\mu x})}{e^{\mu x}} \overset{(*)}{=} \frac{L(e^{(\mu+\lambda)x})}{e^{(\mu+\lambda)x}} = P(\lambda+\mu)$$

Tedy, je-li λ kořen $P(\lambda)=0$ násobnosti k, je $\mu=0$ kořen $Q(\mu)=0$ násobnosti k. Dle [1]: $1, x, \dots, x^{k-1}$ řeší $M(z(x))=0$ a tak $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ řeší, dle (*), $Ly=0$. ☒

Stále však nevíme, že $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$ spolu s podobnými řešeními pro jiná (odlišná) vlastní čísla tvoří fundamentální systém. K tomuto cíli nejdříve zformulujeme pomocné tvrzení.

<u>Tvrzení</u> Buď $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ navzájem různá čísla a nechť $P_1, \dots, P_m$ jsou polynomy (nad $\mathbb{C}$). Pak platí:

Je-li $\sum_{i=1}^{m} P_i(x)e^{\lambda_i x} = 0$ pro $\forall x \in (a,b)$, pak $P_i \equiv 0$ na (a,b) pro $i=1,\dots,m$.

Dk $\boxed{\text{Indukcí}}$ ($m=1$) $P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$ pro $\forall x \in (a,b) \Rightarrow P_1(x)=0$ všude v (a,b).

∞-podmínek na konečný počet koeficientů

($m=2$) $\boxed{P_2(x) = -P_1(x)e^{\overbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}^{\neq 0}x}}$ (■)

Je-li P_2 polynom stupně k, pak $(k+1)$-krát derivováním vztahu (■), dostaneme

$$0 = Q(x)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \quad \forall x \in (a,b),$$

což dává $Q \equiv 0$ v (a,b) a to implikuje $P_1 \equiv 0$ v (a,b)

a z (■) $P_2 \equiv 0$.

(m obecné) $\boxed{P_m(x) = -\sum_{j=1}^{m-1} P_j(x)e^{(\lambda_j-\lambda_m)x}}$ (■■) kde P_m je stupně k

Opět $(k+1)$-krát derivuji a dostaneme:

$$0 = \sum_{j=1}^{m-1} Q_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_m)x},$$

což, dle indukčního předpokladu implikuje $Q_j \equiv 0$ v (a,b), a tedy $P_j \equiv 0$ v (a,b) pro $j = 1, \dots, m-1$ a A $P_m \equiv 0$ v (a,b). ▨

$\boxed{\text{Věta 7.11}}$ (Fundamentální systém v obecném případě).
Jsou-li $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ navzájem různé kořeny charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$,
VŠECHNY
pak
$$F := \{ e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{\nu_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{\nu_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{\nu_m - 1} e^{\lambda_m x} \}$$
tvoří bázi (fundamentální systém) rovnice $Ly = 0$.

Dk
- Víme, že prvky F řeší $Ly = 0$
- Dále F obsahuje právě n různých funkcí (n je stupeň polynomu P)
- Ověříme, že F jsou lin. nezávislá.
  Nechť $\sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{y_i(x)}_{\in F} = 0$. Pak $0 = \sum_{j=1}^{m} P_j(x) e^{\lambda_j x}$ a dle předchozího tvrzení $P_j \equiv 0$ v (a,b), což implikuje $c_i = 0$. ▨

- Diskuse o komplexních kořenech $\lambda, \bar{\lambda}$ a vytvoření reálného fundamentálního systému přesahá kapacitu.
- Také pravidla/principy pro hledání partikulárního řešení je-li f ve speciálním tvaru
$$f(x) = P(x) e^{\alpha x}$$
nebo
$$f(x) = \tilde{P}(x)(\cos \mu x) e^{\alpha x}$$
nebo
$$f(x) = \tilde{\tilde{P}}(x)(\sin \mu x) e^{\alpha x}$$
- Do dalších částí se s sebou neseme dluh nedokázaných dvou vět: Peanovy a Picard-Lindelöfovy.