Tvrzení 5 $\mathbb{N}$ není omezené shora

(Dk) Sporem. Předpokládejme, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ je omezené shora. Pak z axiomu úplnosti plyne, že existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $\sup \mathbb{N} = a$. Protože $\mathbb{N}$ je induktivní, dle Tvrzení 3 & $a-1$ musí existovat $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a-1 < m_0 \leq a$. Pak však $m_0 + 1 \in \mathbb{N}$ a zároveň $a < m_0 + 1$. Tedy a nemůže být horní mez, a máme spor $\lightning$. ■

Tvrzení 6 Buď $x \in \mathbb{R}$ libovolné. Pak $\exists m \in \mathbb{N}$ tak, že $x < m$.

(Dk) Kdyby takové m neexistovalo, pak x omezuje $\mathbb{N}$. Ale dle Tvrzení 5, $\mathbb{N}$ není shora omezené.

Tvrzení 7 (Archimédův princip) Buď $y \in \mathbb{R}$ libovolné a $\varepsilon > 0$ také libovolné ("velmi malé"). Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$m\varepsilon > y$$

(Dk) Použij Tvrzení 6 na $x = \frac{y}{\varepsilon}$.

Tvrzení 8 (Hustota racionálních čísel v $\mathbb{R}$) Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $x < r < y$.

[Neboli: $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists r \in \mathbb{Q}) \quad x < r < x + \varepsilon$]

(Dk) Protože $y - x > 0$ tak $\frac{1}{y-x} > 0$ a dle Tvrzení 6 existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\boxed{m > \frac{1}{y-x} \quad (\bullet)}$ k číslům $mx, -mx \in \mathbb{R}$ existují, opět dle Tvrzení 6, čísla $m, m' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$mx < m \quad a \quad -mx < m'$$

Odtud

$$-\frac{m'}{m} < x < \frac{m}{m} \quad .$$

Existuje $m'' \in \mathbb{N}$ nejmenší takové, že $x < \frac{m''}{m}$. Pak hledané $r = \frac{m''}{m}$ neboť

$$x < \frac{m''}{m} = \frac{m''-1}{m} + \frac{1}{m} \leq x + \frac{1}{m} \overset{(\bullet)}{<} x + y - x = y$$ ■

Tvrzení 9 Existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ tak, že $M^2 = 2$ (toto číslo pak označíme $\sqrt{2}$ nebo $2^{1/2}$)

(Dk) Uvažujme $S = \{x;\ (0 < x) \wedge (x^2 < 2)\}$. S je omezená shora (např. $x \in S \Rightarrow x < 2$); tedy 2 je horní závora pro S). Z axiomu úplnosti plyne existence $\sup S$, označme jej M.

Mohou, dle axiomu (O4) nastat tři případy: buď $M^2=2$ nebo $M^2>2$ nebo $M^2<2$. Ukážeme, že $\boxed{M^2<2}$ i $[M^2>2]$ vedou ke sporu s definicí suprema.

Nechť $M^2<2$. Uvažujme $M'=M+\frac{1}{n}$. Pak

$$(M')^2 = M^2+\frac{2M}{n}+\frac{1}{n^2} < M^2+\frac{2M}{n}+\frac{1}{n} = M^2+\frac{2M+1}{n}$$

Vidíme, že $(M')^2<2$ pokud $M^2+\frac{2M+1}{n}<2$ tj. pokud $n>\frac{2M+1}{2-M^2}$. Dle Tvrzení 6 však takové n existuje. Pak však $M'>M$ a $(M')^2<2$ a máme ↯ s tím, že M je supremem S, přesněji M není horní závora S.

Nechť $M^2>2$. Pak uvažme $M''=M-\frac{1}{n}$. Opět

$$(M'')^2 = M^2-\frac{2M}{n}+\frac{1}{n^2} > M^2-\frac{2M}{n}$$

a vidíme, že $(M'')^2>2$ pokud najdeme n tak, že $M^2-\frac{2M}{n}>2$ tzn. pokud $n>\frac{2M}{M^2-2}$. Takové n však dle Tvrzení 6 existuje. Pak však $(M'')^2>2$ a $M''<M$, což dává spor se skutečností, že M je <u>nejmenší</u> horní závora. ▨

Tedy nutně $M^2=2$.

<u>Tvrzení 10</u> $\mathbb{Q}$ nesplňuje axiom úplnosti.

Dk: Sporem: Nechť $\mathbb{Q}$ splňuje axiom úplnosti. Pak $T=\{x\in\mathbb{Q}; x^2<2\}$ má v $\mathbb{Q}$ supremum: $\exists r\in\mathbb{Q}$ tak, že $\sup T = r$.

Dle (O1) mohou nastat tři možnosti: $r=\sqrt{2}$, $r>\sqrt{2}$, $r<\sqrt{2}$.

- Když $r=\sqrt{2}$, pak spor s Tvrzením 2: $\sqrt{2}$ je iracionální.
- Když $r>\sqrt{2}$, pak dle Tvrzení 8 existuje $r'\in\mathbb{Q}$: $\sqrt{2}<r'<r$. Pak však r není supremum.
- Když $r<\sqrt{2}$, pak opět dle Tvrzení 8 existuje $r''\in\mathbb{Q}$: $r<r''<\sqrt{2}$. což vede opět ke sporu s definicí suprema. ▨

<u>Důležité pozorování</u> $(\mathbb{C}, \oplus, \otimes)$ je těleso. Nelze však na $\mathbb{C}$ zavést <u>uspořádání splňující</u> (O1)-(O4). Kdyby to bylo možné, pak $\boxed{\text{buď } i>0}$ $\boxed{\text{nebo } i<0}$. Kdyby $i>0$, pak (O3) $i*i > i*0 \iff -1>0$ což po přičtení 1 dává $\boxed{0>1}$. Protože $-1>0$ tak $(-1)\cdot(-1)>(-1)\cdot 0$ implikuje $\boxed{1>0}$ a spor plyne z toho, že $0>1$ ∧ $1>0$. Podobně pro $i<0$.

ZÁKLADY TEORIE MNOŽIN, POJEM FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI

Axiomatická teorie množin je abstraktní netriviální matematická disciplína. My se omezíme na intuitivní porozumění **množiny** coby **soubor objektů**, který bude zadán:
- výčtem (např. $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$)
- vlastností prvků ($M = \{k \in \mathbb{N};\ k \text{ liché} \wedge k < 12\}$)

Budeme se vyhýbat definicím, které jsou blízké Russellově paradoxu*).

Zavedeme toto značení:

- $\boxed{A \subset B} \stackrel{df}{=} x \in A \Rightarrow x \in B$ (NEBO $(\forall x \in A)\ x \in B$)
- $\boxed{A = B} \stackrel{df}{=} A \subset B \wedge B \subset A$
- $\boxed{A \cap B} \stackrel{df}{=} \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$
- $\boxed{A \cup B} \stackrel{df}{=} \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$
- $\boxed{A \setminus B} \stackrel{df}{=} \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$
- $\boxed{A \subsetneq B} \stackrel{df}{=} A \subset B \wedge \neg(A = B)$

Je-li P_α soubor množin indexovaný množinou A, tzn. $\alpha \in A$, pak

$$\boxed{\bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha} \stackrel{df}{=} \{x;\ (\exists \alpha_0 \in A)\ x \in P_{\alpha_0}\}$$

a

$$\boxed{\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha} \stackrel{df}{=} \{x;\ (\forall \alpha_0 \in A)\ x \in P_{\alpha_0}\}$$

Platí: Pro A, B, C:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

Obecněji pro C, $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$:

$$\left[\begin{array}{l} C \setminus \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (C \setminus P_\alpha) \\ C \setminus \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (C \setminus P_\alpha) \end{array}\right]$$

De Morganovy vzorce.

Dokažte sami nebo na cvičení.

---

*) Russellův paradox: Buď $Y = \{$soubor množin, které neobsahují sebe jako prvek$\}$

Otázka (Russellův paradox): patří nebo nepatří Y do Y?
Když $Y \in Y$, pak by tam dle definice Y nemělo patřit.
Když $Y \notin Y$, pak by tam dle definice Y mělo patřit.
Ejhle, paradox!

Def. Kartézský součin neprázdných množin A a B, značený $A \times B$, definujeme jako množinu uspořádaných dvojic (a,b), kde $a \in A$, $b \in B$:
$A \times B \overset{df.}{=} \{(a,b);\ a \in A \wedge b \in B\}$. Pokud $A = B$, pak $A \times A =: A^2$

Podobně: $M_1 \times \ldots \times M_k \overset{df.}{=} \{(z_1, \ldots, z_k);\ z_i \in M_i \text{ pro } i = 1, \ldots, k\}$.

Jsou-li $M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, pak $M^k = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{k\text{-krát}}$.

(angl. Mapping from A to B)

Def. Zobrazení ϕ z (množiny) A do (množiny) B $\overset{df.}{=}$ předpis, který každému $a \in A$ přiřadí nejvýš jedno $b \in B$.

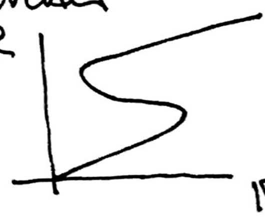
Složitěji: $\phi \subset A \times B$ je zobrazení pokud platí:

$$\forall (a_1,b_1), (a_2,b_2) \in \phi:\ a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$\Updownarrow \qquad \text{—}\parallel\text{—} \quad :\ b_1 \neq b_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2$$

Př. a) $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + y^2 = 1\}$ není zobrazení

b) ϕ dané křivkou v obr. 1 není zobrazení



Def. Buď ϕ zobrazení z A do B.

$D\phi := \{x \in A;\ (\exists y \in B)\ (x,y) \in \phi\}$ definiční obor (domain)

$R\phi := \{y \in B;\ (\exists x \in A)\ (x,y) \in \phi\}$ obor hodnot (codomain)

Místo $(x,y) \in \phi$ píšeme $y = \phi(x)$. Graf $\phi \overset{df.}{=} \{(x, \phi(x)),\ x \in D\phi\}$

|| Zobrazení, která zobrazují z číselných množin do číselných množin, jsou funkce

V tomto semestru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

později: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, ...

Jiné typy zobrazení: funkcionály, operátory, ...
(nejsme schopni tato zobrazení ani definovat v této chvíli, později v letním semestru nebo 2a rok.)

Další důležité pojmy k zobrazením.

Buď $\phi : A \to B$ (nebo $\phi \subset A \times B$) zobrazení z A do B.

Řekneme, že

ϕ zobrazuje A do B $\overset{df}{=}$ $A = D_\phi$

ϕ zobrazuje z A do B $\overset{df}{=}$ $D_\phi \subset A$

ϕ zobrazuje A na B $\overset{df}{=}$ $R_\phi = B$ (ϕ je na nebo surjektivní)

ϕ zobrazuje A do B $\overset{df}{=}$ $R_\phi \subset B$

Řekneme, že ϕ je prosté (1-1, angl. one-to-one, nebo injektivní) na $A \subset D_\phi$ pokud platí: $(\forall x_1, x_2 \in A)\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$

$(\Leftrightarrow \phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ načrtnuté na obr. 2 není prostá na $(0, \infty)$:

Buď ϕ prosté zobrazení A na B. Pak lze definovat

$$\phi^{-1} : B \xrightarrow{na} A \quad \text{předpisem} \quad \phi^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = \phi(x)$$

$$\left[\begin{array}{c} (y, x) \in \phi^{-1} \subset B \times A \\ \Updownarrow \\ (x, y) \in \phi \subset A \times B \end{array} \right]$$

a platí:
- $D_{\phi^{-1}} = R_\phi$
- $R_{\phi^{-1}} = D_\phi$
- ϕ^{-1} je prosté
- $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$

Dokažte, rozmyslete sami.

Zobrazení ϕ^{-1} se nazývá zobrazení inverzní k ϕ. (INVERZNÍ ZOBRAZENÍ ϕ^{-1})

Zobrazení ϕ, které je surjektivní (na) a injektivní se nazývá bijektivní (vzájemně jednoznačné).

Def. (složeného zobrazení) Buď $\phi : A \to B$ a $\psi : B \to C$ a nechť $R_\phi \cap D_\psi \neq \emptyset$. Zobrazení $\psi \circ \phi$ nazveme **složené zobrazení** předpisem:

- $D_{\psi\circ\phi} = \{ x \in D_\phi ;\ \phi(x) \in D_\psi \}$
- $(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x))$

Příklad (a) Deformace koule (tělesa v $\mathbb{R}^3$)

b) $(\sin x)^2 = f_1 \circ f_2$ kde $f_2(x) := \sin x : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$ a $f_1(y) = y^2 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$.

Je-li $\phi : D_\phi \xrightarrow[\text{prosté}]{\text{na}} R_\phi$, pak $\phi \circ \phi^{-1} = \text{Identita}\big|_{R_\phi}$ zatímco $\phi^{-1} \circ \phi = \text{Identita}\big|_{D_\phi}$

Buď $\phi : A \to B$ a $C \subset A$, pak $\phi[C] \overset{\text{df}}{=} \{ \phi(x) ;\ x \in C \}$ obraz C

— " — a $D \subset B$, pak $\phi^{-1}[D] = \{ x \in A ;\ \phi(x) \in D \}$ vzor (předobraz) D

Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{R}$). Řekneme, že

f je omezená v $\mathbb{R}$ (nebo v D_f) $\overset{\text{df.}}{=}$ $f[\mathbb{R}]$ (nebo $f[D_f]$) je omezená množina

f je sudá $\overset{\text{df.}}{\equiv}$
- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- $f(x) = f(-x)$ $\quad \forall x \in D_f$.

f je lichá $\overset{\text{df}}{\equiv}$
- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- $f(-x) = -f(x)$ $\quad \forall x \in D_f$

f je T-periodická $\overset{\text{df.}}{=}$ $f(x+T) = f(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.
pro $T \in \mathbb{R}$
$T > 0$