$\boxed{8.4}$ Limita, spojitost a derivace (vektorových) funkcí více proměnných

- Buď $f: M \to \mathbb{R}^m$, kde $M \subset \mathbb{R}^d$, $d, m \in \mathbb{N}$, typicky $d \geq 2$.

$\boxed{\text{Úmluva}}$ přestaneme používat šipek, ale důsledně budeme psát, kam dané objekty patří. Tak

$$f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m \text{ znamená}$$

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, f_m(x_1, \dots, x_d)) \quad \text{kde } \underset{(x_1, \dots, x_d)}{x} \in M$$

- Je-li $m = 1$, mluvíme o skalárních funkcích.

$\boxed{\text{Def.}}$ (limity) Řekneme, že f má v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ limitu $A \in \mathbb{R}^m$, (píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$), právě když,

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0|_{\infty, \mathbb{R}^d} < \delta)(|f(x) - A|_{\infty, \mathbb{R}^m} < \varepsilon)}$$

≡ neboli:

$$(\forall \mathcal{U}_\varepsilon(A))(\exists P_\delta(x_0))\underbrace{(x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A))}_{\Updownarrow}$$

$$f(P_\delta(x_0)) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(A)$$

≡ neboli:

$$\boxed{(\forall \mathcal{U}(A))(\exists P(x_0))(f(P(x_0)) \subset \mathcal{U}(A))}$$

topologická definice spojitosti

$\mathcal{U}(A)$ .... libovolná otevřená množina obsahující A

$P(x_0)$ .... libovolná otevřená množina obsahující x_0 mínus $\{x_0\}$. tj $P(x_0) = \mathcal{U}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

$\boxed{\text{Def.}}$ (spojitosti f v x_0) Řekneme, že f je v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ spojitá, právě když, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

≡ neboli

$$(\forall \mathcal{U}(f(x_0)))(\exists \mathcal{U}(x_0))\ (f(\mathcal{U}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0))).$$

Rozmyslete si, že i v $\mathbb{R}^d$ (a také v libovolném úplném vektorovém metrickém prostoru (M,ϱ)) platí následující tvrzení známá z teorie funkcí jedné reálné proměnné (viz ZS):

- o jednoznačnosti limity
- o aritmetice limit
  - ▶ $f,g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$
  - ▶ $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = A+B$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = AB$
  - pokud $B \neq 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

  o dvou strážnících:
  - ▶ je-li navíc $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková, že $P(x_0) \subset D_h \cap D_f \cap D_g$

    a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pro $x \in P(x_0)$

    a $A = B$, pak $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$

- o limitě složeného zobrazení

  (A)
  - ▶ Jsou-li (M,ϱ_1), (N,ϱ_2) a (P,ϱ_2) tři metrické prostory

    a $f : M \to N$ a $g : N \to P$ a $x_0 \in M$
  - ▶ Pokud $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in N$ a $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0 \in P$

    a x_0 je hromadný bodem $D_{g\circ f}$
  - ▶ Pokud • buď $\exists\, P(x_0)$ tak, že $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in P(x_0)$

    nebo g je spojitá v y_0

  Pak $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

- o spojitosti složeného zobrazení
  - ▶ Platí-li (A) a g je spojitá v $f(x_0)$ a f je spojitá v x_0,

    pak <u>$g\circ f$ je spojitá v x_0</u>, tj. $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$.

- o existenci okolí, kde je je funkce omezená

- Heineho věta (obě varianty)

▶ (M,ϱ_1), (N,ϱ_2) metrické a $x_0 \in M$ je hromadným bodem D_f

$f : (M,\varrho_1) \to (N,\varrho_2)$ a $y_0 \in N$

Pak

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f \setminus \{x_0\} : \boxed{x_n \to x_0 \text{ v } (M,\varrho_1)} \Rightarrow \boxed{f(x_n) \to y_0 \text{ v } (N,\varrho_2)}$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff$ —||— existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Pro $d=1$ jsme měli větu o jednostranných limitách:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existuje a $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existuje a obě se rovnají.

! Následující příklad ukazuje, že i když limity po všech přímkách existují a rovnají se, tak existence $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ zaručena není !

Příklad ① Buď $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definována vztahem $\quad x_0 = (x_{01}, x_{02})$

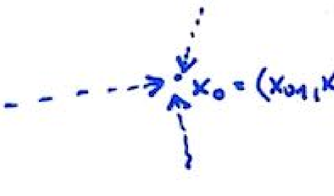
$$f(x) = f(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$$

Pak $x_2 = kx_1$, $k \in \mathbb{R}$, popisují přímky procházející počátkem.

Platí
$$f(x_1, kx_1) = \frac{x_1^2\, kx_1}{x_1^4 + k^2 x_1^2} = \frac{kx_1}{k^2 + x_1^2} \to 0 \quad \text{pro } x_1 \to 0.$$

Tedy kandidát na $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ je 0. Přesto $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje,

neboť vezmeme-li $x_2 = kx_1^2$ (tzn. jdeme do počátku po parabole)



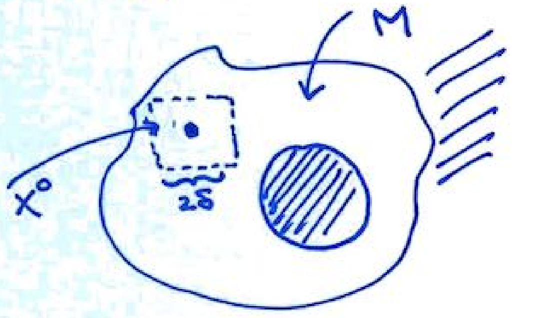
pak
$$\lim_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2 = kx_1^2} = \lim_{x_1\to 0} \frac{k x_1^4}{x_1^4 + k^2 x_1^4} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{k}{k^2 + x_1^4} = \frac{1}{k} \quad \text{pro } k \neq 0.$$

② Buď $f(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. Pak $\lim\limits_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2=0} = 0$

a $\lim\limits_{x_2\to 0} f(x)\Big|_{x_1=0} = 0$, ale $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje. | Řešení: $\lim\limits_{x_1\to 0} f(x)\Big|_{x_2 = x_1} = \frac{1}{2}$.

Definice $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f\right)$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $x^0 \in M$. Pro $f: M \to \mathbb{R}$ definujme

$$\left.\begin{aligned} g_1(\xi) &= f(\xi, x_2^0, \dots, x_d^0) \\ g_2(\xi) &= f(x_1^0, \xi, \dots, x_d^0) \\ &\vdots \\ g_d(\xi) &= f(x_1^0, \dots, x_{d-1}^0, \xi) \end{aligned}\right\} \quad \text{Pak } g_i : (x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta) \to \mathbb{R}$$



neboli g_i jsou funkce jedné reálné proměnné $(i = 1, \dots, d)$

Předpokládejme, že $g_i'(x_i^0)$ existuje, tzn.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_d^0) - f(x_1^0, \dots, x_d^0)}{t} \quad \text{existuje,}$$

pak $g_i'(x_i^0)$ nazveme parciální derivace f podle proměnné x_i

a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$. Tedy máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{\xi \to x_i^0} \frac{g_i(\xi) - g_i(x_i^0)}{\xi - x_i^0} = \lim_{\xi \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \dots, \xi, \dots, x_d^0) - f(x^0)}{\xi - x_i^0}$$

$$h := \xi - x_i^0 \longrightarrow \quad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots) - f(x^0)}{h}$$

Jiná značení: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \partial_{x_i} f(x_0) = \partial_i f(x_0)$.

DEFINICE

[Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0)\right)$ se nazývá gradient f v x_0 a značí se $\nabla f(x^0)$, nebo $\mathrm{Grad}\, f(x^0)$.

[Je-li $f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, M otevřená, $x^0 \in M$, pak matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x^0) \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(x^0) \end{pmatrix}$$

$m \dots$ řádků, $d \dots$ sloupců

se nazývá JAKOBIÁN nebo JAKOBIho matice a značí se $Df(x^0)$ nebo $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(x^0)$.

Definice: Je-li $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pak Jakobián je čtvercová matice a její stopa (součet prvků na diagonále) se nazývá **divergence** f v bodě x^0, tj.

$$\operatorname{div} f(x^0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0) = \operatorname{tr} Df(x^0).$$

Einstein Σ konvence

FYZICI: $\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$

$\boxed{\text{Je-li } d=3}$, pak

$$\operatorname{curl} f(x^0) = \operatorname{rot} f(x^0) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

FYZICI: $\operatorname{curl} \vec{f} = \nabla \times \vec{f}$

rotace f v x^0

Také: pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$Df(x^0) = \frac{Df(x^0) + [Df(x^0)]^T}{2} + \frac{Df(x^0) - [Df(x^0)]^T}{2}$$

jen pro $d=3$ pro jednoduchost

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ & & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}(x^0) + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ - & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\text{symetrická část}}{\mathbb{E}f(x^0)} + \underset{\text{antisymetrická část}}{\mathbb{W}f(x^0)}$$

POROVNEJ SLOŽKY $\mathbb{W}f(x^0)$ SE SLOŽKAMI $\operatorname{curl} f(x^0)$

$\boxed{\text{Je-li } d=2}$ $\quad f = (f_1, f_2)$

$$\operatorname{rot} f(x^0) = \underset{\text{VEKTOR}}{\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)} \qquad \operatorname{curl} f(x^0) = \underset{\text{SKALÁR}}{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}$$

Definice (SMĚROVÁ DERIVACE resp. DERIVACE f V BODĚ x_0 VE SMĚRU $\vec{v}$)

$$\partial_v f(x^0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}$$, pokud tato limita existuje.

$\left[\ x^0\in M,\ M\subset\mathbb{R}^d \text{ otevřená},\ v=(v_1,\dots,v_d) \text{ tak, že } |\vec{v}|_2=1\ \right]$

Odsud a z definice $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ plyne: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)=\partial_{e_i}f(x^0)}$

kde $e_i:=(0,\dots,1,\dots,0)$ (1 na i-té místo).

Definice (DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ) INDUKTIVNĚ.

např. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)=\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^0)$ kde $h(z)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(z)$ pro $z\in U_\delta(x^0)$.

$\boxed{\text{Příklady}}$ ① Buď $f(x)=\sin(x_1x_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Pak $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=x_2\cos(x_1x_2)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)=x_1\cos(x_1x_2)$

Tedy $\nabla f(x)=(x_2\cos(x_1x_2),\ x_1\cos(x_1x_2))$

② Je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ lineární (nebo afinní) funkce, tj.

$f(x)=\sum_{i=1}^d a_ix_i$ (resp. $f(x)=\sum_{i=1}^d a_ix_i+b$)

pak $\nabla f(x)=(a_1,\dots,a_d)\quad\forall x\in\mathbb{R}^d$

③ Podobně, je-li $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ dáno předpisem

$$f(x)=Ax+b=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1d}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{md}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Pak $Df(x)=A$ pro $\forall x\in\mathbb{R}^d$.

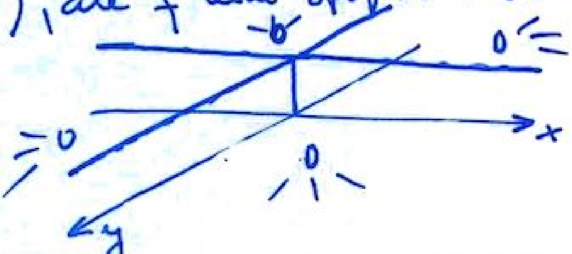
$\boxed{\text{Věta 8.12}}$ Existují-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0)$ [a $g(x^0)\neq 0$ pro derivování podílu], pak existují $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i}(x^0)$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x^0)$ a platí: $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial g}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

(Dk) Dle vět o derivování součtu, součinu, podílu pro funkce jedné reálné proměnné. ☒

WARNING! Z existence parciálních derivací v x^0 <u>neplyne</u> spojitost f v x_0, jak ukazuje následující jednoduchý příklad

Př.: Buď
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$
(Ověřte!), ale f není spojitá v 0.



Věta 8.13 (O derivování složené funkce)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $g: M \to \mathbb{R}^m$ má v $x \in M$ parciální derivace. Buď $g(M) \subset N$ a $f: N \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v N. Pak fce
$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$
je v M definována a má parciální derivace.

Navíc $[(f \circ g): M \to \mathbb{R}]$

(Ř1)
$$\boxed{\underbrace{\nabla(f \circ g)(x)}_{d\text{-vektor}} = \underbrace{(\nabla f)(g(x))}_{m\text{-vektor}} \ \underbrace{Dg(x)}_{\text{Matice } m \times d}}$$

$$\nabla(f \circ g)(x) = \nabla_y f(y)\Big|_{y=g(x)} Dg(x)$$

neboli:
$$\left(\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_d}(x)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Je-li $f: \underset{\subset \mathbb{R}^m}{N} \to \mathbb{R}^s$ $(s>1, s \in \mathbb{N})$, pak $f \circ g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$

a platí

(Ř2)
$$\boxed{\underbrace{[D(f \circ g)](x)}_{s \times d\text{-matice}} = \underbrace{[Df](g(x))}_{s \times m \text{ matice}} \ \underbrace{[Dg](x)}_{m \times d\text{-matice}}}$$

(Dk) Buď $e^i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{di})$ jednotkový vektor v i-tém směru.

Chceme ukázat, že pro $i = 1, 2, \dots, d$

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i}$$

Avšak:

$$\frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g_1(x+he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i))}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+he^i)) - f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}{h}$$

$$\overset{\text{Lagrange}}{=}_{\text{VOSH}} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x+\theta_1 he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_1(x+he^i) - g_1(x)}{h}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_2}(g_1(x), g_2(x+\theta_2 he^i), \dots, g_m(x+he^i)) \frac{g_2(x+he^i) - g_2(x)}{h}$$

$$+ \quad \dots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x+\theta_m he^i)) \frac{g_m(x+he^i) - g_m(x)}{h}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x), \dots, g_m(x)) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x)$$

kde jsme využili:

(•) skutečnost, že $g_\ell(x+he^i) \to g_\ell(x)$ pro $h \to 0$, což plyne z existence $\frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(x)$.

(••) skutečnost, že $\frac{g_\ell(x+he^i) - g_\ell(x)}{h} \to \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(x)$ dle předpokladu věty

(•••) větu o limitě složeného zobrazení v případě, kdy vnější funkce je spojitá.

$\blacksquare$

Věta 8.14 (Spojité $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v x $\Rightarrow$ existenci $\partial_{\vec{v}} f(x)$)

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f: M \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace (1. řádu) v M. Pak pro každé $x \in M$

$$\boxed{\partial_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v = (\nabla f(x), v)_{\mathbb{R}^d}}$$

Dk: Víme, že pro $v = (v_1, \dots, v_d)$ s $|\vec{v}|_E = 1$ platí

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} \overset{\text{Věta 8.13}}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i$$

$$= (\nabla f(x), v) \qquad \blacksquare$$

Odtud a Cauchy-Schwartzovy nerovnosti plyne <u>mimořádný</u> důsledek.
Víme, že (dle (C-S) $\leq$):

$$|\nabla f(x)| \leq -|\nabla f(x)|\,|v| \leq (\nabla f(x), v) \leq |\nabla f(x)|_E\, |v|_E \leq |\nabla f(x)|_E$$

přičemž rovnost nastane jsou-li v a $\nabla f(x)$ kolineární, tzn. pro $v = \pm \dfrac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$. Tedy: Směrová derivace, která udává v daném bodě a ve zvoleném směru směrnici tečny v daném směru tj. jak se funkce v daném směru v blízkosti x chová (roste, klesá a jak rychle),

je největší ve směru $\vec{v} = \dfrac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

a je nejmenší —||— $\vec{v} = -\dfrac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$

Tedy, gradient fce f v bodě x <u>určuje</u> (tzn. <u>je</u>) směr největšího růstu/poklesu funkce f.