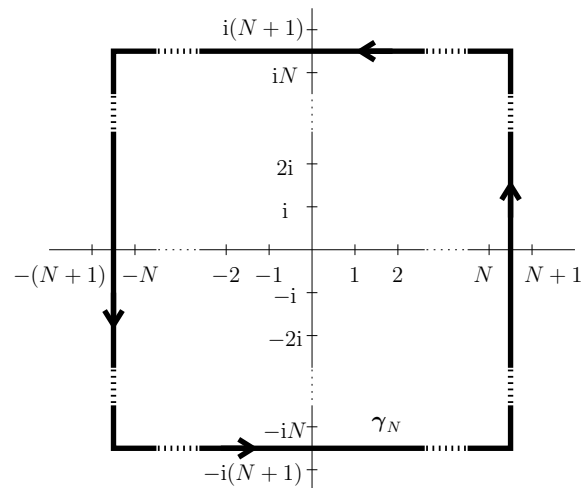


Termín pro odevzdání: čtvrtek 22. dubna 2021

Obrázek 1: Křivka γ_N .

1. Uvažujte integrační křivku γ_N načrtnutou na Obrázku 1. (Křivka γ_N je čtverec se středem v počátku a délkou strany $2N + 1$, kde $N \in \mathbb{N}$.) Ukažte, že platí

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} dz = 0.$$

Na cvičení jsme pomocí residuové věty zjistili, že platí

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right),$$

a kombinací obou výsledků tedy dostaneme vztah $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, který jsme již dokázali minulý semestr s použitím teorie Fourierových řad.

2. [Nepovinné] Dokázali byste podobnou metodou sečíst řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$?