Termín pro odevzdání: čtvrtek 3. června 2021

Uvažujte obyčejnou diferenciální rovnici

$$y'' + a^2 y = \delta, \quad a > 0, \quad y(x) \in \mathcal{S}'$$

1. Vyřeště tuto rovnici lepením.
2. Vyřeště tuto rovnici pomocí Fourierovy transformace.

   Nápověda k 2:

   - Fourierův obraz řešení $\hat{y}(s)$ napište ve tvaru lineární kombinace výrazů typu $\frac{1}{s\pm\alpha}$.
   - Vzpomeňte na poslední cvičení, kde jsme ukázali $\mathcal{F}[\text{v.p.}\, x^{-1}] = -i\pi \operatorname{sgn}(s)$. Co je $\mathcal{F}^{-1}[\text{v.p.}\, s^{-1}]$?
   - Ukažte, že pro $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

     $$\mathcal{F}^{-1}[f(s-\alpha)](x) = e^{2\pi i x\alpha}\mathcal{F}^{-1}[f(s)](x). \tag{1}$$

     Předpoklad, že poslední vztah platí i pro distribuci v.p. $x^{-1} \in \mathcal{S}'$, vede k řešení ODR. (Nezapomeňte zahrnout řešení homogenní rovnice.)

3. Bonusová úloha: Ukažte platnost vztahu

$$\mathcal{F}^{-1}[\text{v.p.}\,(s-\alpha)^{-1}](x) = i\pi \operatorname{sgn}(x) e^{2\pi i x\alpha} \quad \text{v } \mathcal{S}',\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$