DÚ 3. •) $\Phi(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx \overset{?}{\geq} 0$ na $\mathcal{C}_0^1([0,\pi/2]) = \{ \mathcal{C}^1([0,\pi/2]),\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \}$

1) E-L rovnice $L(x,y,z) = z^2 - y^2$

$$-(2y')' - 2y = 0$$
$$y'' + y = 0$$
$$y = a\cos x + b\sin x$$
$$\left.\begin{aligned} 0 &= y(0) = a \\ 0 &= y(\pi/2) = b \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_0 = 0 \text{ je jediná extremála}$$

2) $L_x(y,z) = L(x,y,z) = z^2 - y^2$

$$D^{(2)} L_x = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{indefinitní}$$

3) $\delta^2 \Phi(y; h, h) = 2 \int_0^{\pi/2} (h'^2 - h^2)\,dx$

$P(x) = 2 \qquad Q(x) = -2$

Jacobi: $-(2h')' - 2h = 0$

$$h'' + h = 0$$
$$h = c \cdot \cos x + d \cdot \sin x \qquad x_0 \in (0, \pi/2]$$
$$0 = h(0) = d$$
$$0 = h(x_0) = c\cos x_0 \Rightarrow c = 0$$

$\Rightarrow$ jsou splněny podmínky Jacobiho věty $\Rightarrow$ y_0 je lokální minimum Φ.

4) Zbývá ukázat, že y_0 je globální minimum

1. postup: víme, že $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall y : \|y\| < \varepsilon \Rightarrow \Phi(y) \geq \Phi(y_0) = 0$

nechť $y \in \mathcal{C}_0^1([0,\pi/2])$ je libovolné, najdu $t > 0$ tak velké, že $\|\frac{y}{t}\| < \varepsilon$, pak

$$\Phi(y) = \Phi\left(\frac{ty}{t}\right) = t^2 \Phi\left(\frac{y}{t}\right) \geq t^2 \Phi(y_0) = 0$$

zde jsme použili:

$$\Phi(ty) = \int_0^{\pi/2} \left((ty')^2 - (ty)^2\right) dx = t^2 \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx = t^2 \Phi(y)$$

2. postup Označme $M = \{ y \in \mathcal{C}_0^1([0,\pi/2]) \mid \exists \varepsilon > 0\ \ y = 0 \text{ na } [0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 0] \}$

Pak se dá ukázat, že pro každé $\forall \delta > 0\ \forall z \in \mathcal{C}_0^1([0,\pi/2])$

$$\exists y \in M : |\Phi(y) - \Phi(z)| < \delta$$

Nechť $y \in M$, pak

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} (y' + y\cot x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + 2y y' \cot x + y^2 \cot^2 x)\,dx$$

pro $y \in M$ integrál zřejmě konverguje

$$= \int_0^{\pi/2} (y'^2 + (y^2)' \cot x + y^2 \cot^2 x)\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 \cot' x + y^2 \cot^2 x)\,dx$$

$$+ \left[y^2 \cot x \right]_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx + \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} y^2(x) \cot x - \lim_{x \to 0^+} y^2(x) \cot x \right)$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\cot' x + \cot^2 x = \frac{-1+\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 \qquad \Bigg| \qquad = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx$$

Ukázali jsme, že pro $\forall\, y \in M$:

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx \geq 0$$

Jelikož pro $\forall \varepsilon > 0$ $\forall y \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$ najdu $z \in M$ tak, že

$$\Phi(y) > \Phi(z) - \varepsilon \geq -\varepsilon \Rightarrow \Phi(y) \geq 0$$

pro každé $y \in \mathcal{C}_0^1([0, \frac{\pi}{2}])$.

Tudíž Φ je ≥ 0 na $\mathcal{C}_0^1([0, \pi/2])$, jak jsme měli ukázat.

Poznámka: všimněte si, že

$$\delta^2 \Phi(y; h, h) = 2\,\Phi(h) \geq 0 \quad \text{pro } \forall y, h \in \mathcal{C}_0^1([0, \pi/2]).$$

Dokonce jsme ukázali, že Φ je konvexní na $\mathcal{C}_0^1([0, \pi/2])$.

DÚ3 ••) Najdi nejmenší $K > 0$ tak, aby

$$\Phi_K(y) = \int_0^{\pi/2} (K y'^2 - y^2)\,dx \geq 0$$

na $M = \{ \mathcal{C}^1([0, \pi/2]) \ni y \mid \int_0^{\pi/2} y\,dx = 0 \}$.

Řešení: Zřejmě M je podprostor $\mathcal{C}^1([0, \pi/2])$.

Je-li $h \in \mathcal{C}^1([0, \pi/2])$, polož $\tilde{h} := h - c_h$,

kde $c_h = \int_0^{\pi/2} h(x)\,dx \,/ \left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Pak $\int_0^{\pi/2} \tilde{h}\,dx = \int_0^{\pi/2} h\,dx - \int_0^{\pi/2} c_h\,dx = \int_0^{\pi/2} h\,dx - \frac{\pi}{2} c_h =$

$= \int_0^{\pi/2} h\,dx - \frac{\pi}{2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h\,dx = 0$. Tedy $\tilde{h} \in M$.

Počítejme

$$\delta^1 \Phi(y, \tilde{h}) = \frac{d}{dt} \int_0^{\pi/2} \left(K(y' + t\tilde{h}')^2 - (y + t\tilde{h})^2 \right) dx \Big|_{t=0}$$

$y, \tilde{h} \in M$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (K y' \tilde{h}' - y \tilde{h})\,dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (K y' h' - y h - c_h y)\,dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (K y' h' - y h)\,dx = (A)$$

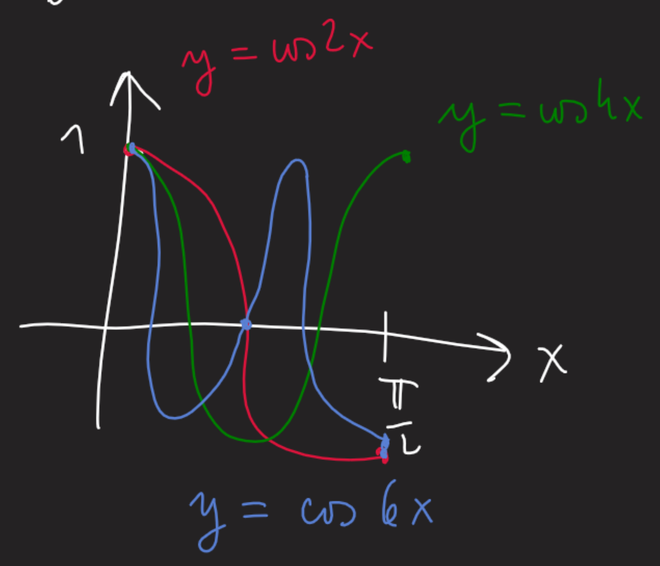
Zde jsme použili $\int_0^{\pi/2} y\, c_h\,dx = 0$ a $\tilde{h}' = h'$.

$$Ⓐ = 2\int_0^{\pi/2}(-Ky''h - yh)\,dx + 2k\,[y'h]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}(-y''K - y)\,h\,dx + 2k\,[y'h]_0^{\pi/2}.$$

Tudíž $\delta^1\Phi(y,\tilde{h}) = 0$ pro $\forall \tilde{h} \in M \iff$

$$Ky'' + y = 0 \quad \& \quad y'(0) = y'(\pi/2) = 0$$



$$y'' + \frac{1}{k}y = 0$$

$$y = c_1\cos\frac{x}{\sqrt{k}} + c_2\sin\frac{x}{\sqrt{k}}$$

$$y' = -c_1\sin\frac{x}{\sqrt{k}} + c_2\cos\frac{x}{\sqrt{k}}$$

$$y'(0) = c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = -c_1\sin\frac{\pi}{2\sqrt{k}} = 0 \iff c_1 = 0 \text{ nebo } \frac{\pi}{2\sqrt{k}} = \pi l,\ l \in \mathbb{Z}$$

$$\iff y = 0 \text{ nebo } k = \frac{1}{2^2 l^2},\ l \in \mathbb{N}$$

Extremály tedy jsou:

a) pro $\forall k$: $\boxed{y_0 = 0}$ b) pro $k = \frac{1}{4l}$, $l = 1, \dots$, : $\boxed{y_l = c\cos 2lx}$

$$\int_0^{\pi/2} y_0\,dx = 0 = \int_0^{\pi/2} c\cos 2lx\,dx = c\left[\frac{\sin 2lx}{2l}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

tedy $y_0, y_l \in M$.

Dále $\Phi_k(y_0) = 0$ pro $\forall k$ a $\Phi_l(y_l) = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{4l^2\sin^2 2lx}{4l^2} - \cos^2 2lx\right)dx$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\tfrac{1}{2}(1 - \cos 4lx - 1 - \cos 4lx)\right)dx = 0.$$

Dále zřejmě $\Phi_{1/4}(y_l) \geq 0$ pro každé $l \in \mathbb{N}$

a $\Phi_k(y_1) < 0$ pro $k < \frac{1}{4}$.

<u>Hypotéza</u> $k = 1/4$ je hledaná konstanta.

Ukážeme nyní, že skutečně $\Phi_{1/4} \geq 0$ na M.

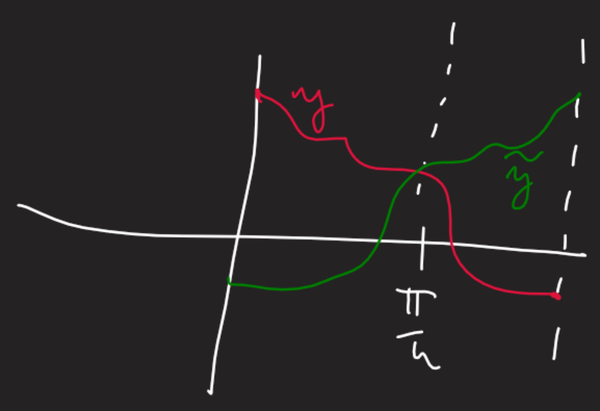
Pro $y \in M$ definujme $\tilde{y} \in \mathcal{C}_0^1([0,\pi/2])$, $\tilde{y}(x) = y(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Pak $\tilde{y} \in M$. Dále položme

$$y_+ = \tfrac{1}{2}(y + \tilde{y}) \quad \text{a} \quad y_- = \tfrac{1}{2}(y - \tilde{y}).$$

Pak $y_+, y_- \in M$ a y_+ je sudá vzhledem k ose $y = \pi/4$

a y_- je lichá — " —



Dále $\int_0^{\pi/2} y^2\,dx = \int_0^{\pi/2}\tilde{y}^2\,dx$

$$\int_0^{\pi/2}(y')^2\,dx = \int_0^{\pi/2}(\tilde{y}')^2\,dx$$

Tudíž $\int_0^{\pi/2} (y_+ y_-)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(y+\tilde{y})(y-\tilde{y})\,dx = 0$

$$\int_0^{\pi/2} (y_+' y_-')\,dx = 0$$

(V tomto místě by bylo lepší úlohu řešit na intervalu $[-\pi/4, \pi/4]$.)

Položme $M_{+,a} = \{ y_+ : y \in M,\ y_+(0) = a \}$ $a \in \mathbb{R}$

$M_{-,a} = \{ y_- : y \in M,\ y_-(0) = a \}$ $a \in \mathbb{R}$

Jelikož každý prvek $y \in M$ lze napsat jako $y = y_+ + y_-$, kde $y_+ \in M_{+,a}$ a $y_- \in M_{-,b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$ a

$$\Phi_{1/4}(y) = \Phi_{1/4}(y_+) + \Phi_{1/4}(y_-)$$

pak nám stačí ukázat, že $\Phi_{1/4} \geq 0$ na každém $M_{+,a}$ a $M_{-,b}$.
Všimneme si, že y_0 je extremála v $M_{+,0}$ a $M_{-,0}$

$y_e = c \cos 2x$ je extremála v $M_{-,c}$.

Nyní najdeme ostatní extremály. Na $M_{\pm,c}$ hledáme řešení

$$\frac{1}{4} y'' + y = 0$$

s okrajovými podmínkami $y(0) = c = \pm y(\pi/2)$ a $\int_0^{\pi/2} y\,dx = 0$.

Víme, že řešení E-L rovnice je

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$0 = \int_0^{\pi/2} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)\,dx = \left[c_1 \frac{\sin 2x}{2} - c_2 \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{c_1}{2}(0-0) - \frac{c_2}{2}(-1-1) = c_2$$

Dále $\left.\begin{aligned} c &= y(0) = c_1 \\ \pm c &= y(\tfrac{\pi}{2}) = c_1 \cos \pi = -c_1 \end{aligned}\right\}$ $y = c \cos 2x$ je jediná extremála v $M_{c,-}$.

Na $M_{c,+}$ najdeme extremály $\Phi_{1/4}$ později.

Dále počítejme $\delta^2 \Phi(y; h, h)$ na $M_{c,-}$. Dostaneme

$$\delta^2 \Phi(y; h, h) = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} h'^2 - h^2 \right) dx$$

Dále $0 \leq \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} h' - h \cot 2x \right)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} h'^2 - h h' \cot 2x + h^2 \cot^2 2x \right) dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} h'^2 - \frac{1}{2} (h^2)' \cot 2x + h^2 \cot 2x \right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} h'^2 + \frac{1}{2} h^2 (\cot 2x)' + h^2 \cot^2 2x \right) dx - \frac{1}{2} \left[h^2 \cot x \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} h'^2 + h^2 \left(\frac{-1 + \cos^2 2x}{\sin^2 2x} \right) \right) dx - 0$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} h'^2 - h^2 \right) dx.$$

Zde opět předpokládáme mlčky, že $h=0$ na $[0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon,0]$ pro nějaké $\varepsilon>0$.

Jelikož pro každé takové h platí

$$\Phi_{1/4}(h) \geq 0,$$

pak odhad platí pro každé $h \in M_{+,0}$. Tudíž $\Phi_{1/4}$ je konvexní na $M_{-,a}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$ a tudíž $a\cos 2x$ je globální minimum $\Phi_{1/4}$ na této množině.

Tudíž $\Phi_{1/4}(y) \geq \Phi_{1/4}(c.\cos 2x) = 0$ pro $y \in M_{-,a}$.

Zbývá ukázat, že $\Phi_{1/4} \geq 0$ na $M_{+,a}$. Uvažujme funkcionál $g(y) = \int_0^{\pi/2} y\,dx$ na $\mathcal{C}^1([0,\pi/2])$. Pak $M = \{y : g(y) = 0\}$. Extrémy hledejme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ položme

$$\Phi_\lambda(y) = \Phi_{1/4}(y) - \lambda g(y)$$ na $M_{+,a}$. Pak extrémy Φ_λ na $M_{+,a}$ odpovídají extrémálám $\Phi_{1/4}$ na $M_{+,a}$.

E-L rovnice Φ_λ je $\frac{1}{4}y'' + y = \text{konst.}$ Řešení je

$$y = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Pak $\int_0^{\pi/2} y\,dx = c_2 + \frac{\pi}{2}c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{2}{\pi}c_2$ & $c_2 = -\frac{\pi}{2}c_3$

$$\left.\begin{aligned} a &= y(0) = c_1 + c_3 \\ a &= y(\pi/2) = -c_1 + c_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2a = 2c_3 \Rightarrow a = c_3 \Rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{\pi}{2}a$$

$$\boxed{y_*(x) = -\frac{\pi}{2}a\sin 2x + a} \quad \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_{1/4}(y_*(x)) = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{4}(\pi a\cos 2x)^2 - \left(a - \frac{\pi}{2}a\sin 2x\right)^2\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}(\pi a\cos 2x)^2 - \frac{\pi^2}{4}a^2\sin^2 2x + \pi a^2 \sin 2x - a^2\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{4}\frac{\pi^2 a^2}{2}(1+\cos 4x) - \frac{\pi^2 a^2}{8}(1-\cos 4x) + \pi a^2 \sin 2x - a^2\right)dx$$

$$= \frac{\pi^2 a^2}{8} - \frac{\pi^2 a^2}{8} + \pi a^2 - a^2 = a^2(\pi - 1) \geq 0 \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}.$$

Máme: $y_*(x)$ je extrémála na $M_{+,a}$ a $\Phi_{1/4}$ je konvexní na $M_{+,a}$ (plyne ze stejného výpočtu jako na $M_{-,a}$).

Tedy $\Phi_{1/4}$ má v y_* globální minimum a

$$\Phi_{1/4}(y) \geq \Phi_{1/4}(y_*) \geq 0 \quad \text{pro } \forall y \in M_{+,a}.$$

Závěr: $\Phi_{1/4} \geq 0$ na M a $\Phi_k(\cos 2x) < 0$ pro $k < 1/4$. Hledaná konstanta je tedy $K = 1/4$.