NOFY152, LS 2019-2020 Teoretická část zkouškové písemné práce 18. června 2020

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1. Buď (X,τ) topologický prostor a $K \subset (X,\tau)$ kompaktní.

(1) Uveďte definice topologického prostoru (X,τ) a topologickou definici kompaktnosti.

(2) Charakterizujte kompaktní množiny v R^d (bez důkazu). Zadefinujte však pojmy potřebné k této charakterizaci.

(3) Zformulujte tvrzení o existenci extrémů spojitých funkcí na kompaktních množinách $K \subset R^d$. Tvrzení dokažte.

(4) Zformulujte nutnou podmínku existence vázaných extrémů pro případ kdy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Naznačte důkaz.

Řešení

[1] X množina objektů, $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ topologie, tzn. soubor podmnožin X takových, že:
(i) $\emptyset, X \in \tau$; (ii) $G_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$; (iii) $G_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{N} G_i \in \tau$.

(1b)

(1b) [$K \subset (X,\tau)$ je kompakt $\equiv$ z $\forall$ otevřeného pokrytí lze vybrat pokrytí konečné
$K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha,\ U_\alpha \in \tau \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n\ K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

[2] $\boxed{K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompaktní}} \iff$ • K je omezená (tzn. $(\exists R>0)\ K \subset B_R(0)$)
• K je uzavřená (tzn. $\mathbb{R}^d \setminus K$ je otevřená nebo $\{x_n\} \subset K$ a $x_n \to x$ v $\mathbb{R}^d \Rightarrow x \in K$.

(1b)

[3] Tvrzení $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kpt. Pak $\exists\, x_{min}, x_{max} \in K$ $f(x_{min}) \le f(y)\ \forall y \in K$
$f(x_{max}) \ge f(y)$ -||-

(1b)

jen pro minimum

Dk Buď $l := \inf f[K]$. Protože obraz kompaktu je při spojitém zobrazení kompakt, tak $l > -\infty$. Pak z definice infima $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K$ tak, že $l \le f(x_n) < l + \frac{1}{n}$ (*)
Z metrické definice kompaktnosti: $\exists \{x_{n_k}\}_{k\ge1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $x \in K$:
$x_{n_k} \to x$ $(k \to +\infty)$. Ze spojitosti (Heine)
$f(x_{n_k}) \to f(x)$ ale $f(x_{n_k}) \to l$ z (*). Tedy $l = f(x)$ a $x = x_{min}$.

(2b)

[4] Nechť $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x_0) = \min/\max_{x \in A} f(x)$, kde $A := \{y \in \mathbb{R}^2; g(y) = 0\}$.
(1b) Nechť $\nabla g(x_0) \neq 0$. Pak $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.

(1b) Dk $\nabla g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ parametrizace $x(\tau)$: $\tau \in (-\delta, \delta)$, $x(0) = x_0$. Pak,
$g(x(\tau)) = 0 \to \nabla g(x_0) \cdot x'(0) = 0$
protože $f(x(\tau))$ nabývá v $\tau = 0$ extrém: $\to \nabla f(x_0) \cdot x'(0) = 0$
$\Big\} \Rightarrow \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.

[8] 2. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y' = f(y), \quad \text{kde } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

(1) Uveďte, o jaký typ diferenciální rovnice se jedná. Zadefinujte pojem maximálního obecného řešení. Zdefinujte pojem stacionárního řešení. Zformulujte počáteční úlohu pro danou rovnici.

a

(2) Zformulujte přesně Picard-Lindelöfovu větu přímo pro rovnici (1). Předpoklady by tedy měly být formulovány pro skalární funkci f jedné reálné proměnné y.

(3) Nechť speciálně $f(y) = y^\alpha$, kde $y \geq 0$. Pro jaká $\alpha \geq 0$ jsou splněny předpoklady Picard-Lindelöfovy věty? Odůvodněte.

(4) Pro $f(y) = y^{\frac{1}{5}}$, $y \in \mathbb{R}$, najděte všechna maximální obecná řešení rovnice (1).

Řešení [1] • Nelineární skalární rovnice 1. řádu se "separovanými" proměnnými.

2b

• Maximální řešení je řešení (tj. $y(t)$ $\forall t \in (a,b)$), které nemá netriviální prodloužení.

• $y(t) \equiv y_0$ je stacionární řešení pokud $f(y_0) = 0$.

• Poč. úloha: nalézt $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ splňující $\boxed{y' = f(y) \text{ v } (a,b) \text{ a } y(t_0) = y_0}$, kde $t_0 \in (a,b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ dány.

[2] Nechť f je lokálně lipschitzovská v okolí y_0: $\forall R > 0 \ \exists L_R$:

1b $\forall y_1, y_2 \in B_R(0)$: $|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

$\Rightarrow \forall y_0 \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \exists! \, y : (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ řešící poč. úlohu.

0.5b

[3] $|f(y_1) - f(y_2)| = |y_1^\alpha - y_2^\alpha| \overset{\text{LVOSH}}{=} |\alpha(y_1 + \theta(y_2 - y_1))^{\alpha - 1}| \, |y_2 - y_1| \leq M|y_2 - y_1|$ $\boxed{\alpha - 1 \geq 0}$

1b

0.5b

Pro $\alpha \in (0,1)$ konstantu M nelze nalézt, pro hodnoty $y_1 \to 0$ a $y_2 - y_1 \to 0$ jde $\alpha(y_1 + \theta(y_2 - y_1))^{\alpha - 1} \xrightarrow[\alpha \in (0,1)]{} +\infty$

[4] $\boxed{y' = y^{1/5}}$ • $y \equiv 0$ je stacionární řeš. 0.5b

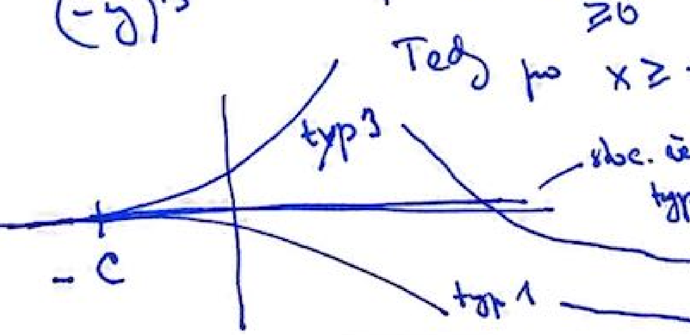
• $y \in (-\infty, 0)$ nebo $\boxed{y \in (0, +\infty)} \Rightarrow \frac{y'}{y^{1/5}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4} y^{4/5}\right)' = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{5}{4} y^{4/5}(x)}_{\geq 0} = \underbrace{x + C}_{\geq 0}$

Tedy pro $x \geq -C$: $\boxed{y(x) = \frac{4}{5}(x + C)^{5/4}}$ 1

$\frac{-y'}{(-y)^{1/5}} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(-y)^{4/5} = \underbrace{(x + C)}_{\geq 0} \Leftrightarrow -y(x) = \frac{4}{5}(x + C)^{5/4}$

Tedy pro $x \geq -C$: $\boxed{y(x) = -\frac{4}{5}(x + C)^{5/4}}$ 1

0.5b



[pro dané libovolné $C \in \mathbb{R}$]

① $y \equiv 0$

③ $y \equiv 0$ pro $x \leq -C$ a $y(x) = \frac{4}{5}(x + C)^{5/4}$

① $y \equiv 0$ —‖— a $y(x) = -\frac{4}{5}(x + C)^{5/4}$

[8] 3. Uvažujte posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = f(n)$ a $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$.

(1) Zformulujte přesně (včetně předpokladů) integrální kritérium pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a dokažte jej. 4b

(2) Na základě tohoto kritéria zformulujte a odůvodněte tvrzení týkající se konvergenčních/divergeních řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ v závislosti na parametrech $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}$. 2b

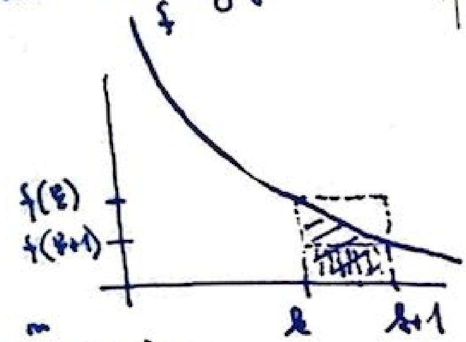
(3) Zformulujte přesně (včetně předpokladů) Leibnizovo kritérium a dokažte jej. 1

(4) Existuje řada, na kterou lze aplikovat jak integrální tak Leibnizovo kritérium? NE, jedno kritérium 1b

pro nezáporné posloupnosti, druhé pro oscilující

$\boxed{\text{Věta 6.7}}$ (Integrální kritérium) Buď $k_0 \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kladná a nerostoucí na $[k_0, \infty)$. Pak 1

(I) $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje $\Leftrightarrow$ (PRÁVĚ KDYŽ) $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje 1



Dk: Z monotónie (viz Obr. 1) plyne:

$$\forall k \geq k_0: \quad f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$$

což implikuje

(**) $$\sum_{k=k_0}^{m} f(k) \geq \sum_{k=k_0}^{m} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_{k_0}^{m+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=k_0}^{m} f(k+1) \geq 0$$ 1

Odtud dokážeme obě implikace v (I).

$\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konvergentní, je pak posloupnost n-tých částečných součtů $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k+1}^{\infty}$ omezená, což implikuje: 0.5

fce $\boxed{n \longmapsto \int_{k_0}^{n+1} f(x)\,dx}$ je neklesající a omezená.

Tedy $\lim_{n\to\infty} \int_{k_0}^{n} f(x)\,dx =: \int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.
existuje

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak platí z (**):

$$\sum_{k=k_0}^{m} f(k) = f(k_0) + \sum_{k=k_0}^{m-1} f(k+1) \overset{(**)}{\leq} f(k_0) + \sum_{k=k_0}^{m-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k_0) + \int_{k_0}^{m} f(x)\,dx$$

Tedy, pokud konverguje $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$, pak ex. $\lim_{n\to\infty} \int_{k_0}^{n} f(x)\,dx$ vlastní. 0.5

Tak $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k_0+1}^{\infty}$ je omezená, monotónní; má tedy vlastní limitu. Tak $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje. ∎

Příklady (10) Pro $\alpha>1$ je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergentní, neboť (1b)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\infty}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

$\boxed{\alpha\le 1 \text{ Divergentní}}$

(11) Rozhodněte, pro která $\beta>1$ je $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konvergentní.

Řešení:

Zkoumejme $I:=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. Substitucí $y=\ln x$ $\left(\Rightarrow dy=\frac{dx}{x}\right)$

dostáváme (1b)

$$I=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dy}{y^\beta}\text{, který konverguje právě když } \boxed{\beta>1}$$

Tedy: (dle Věty 6.7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konvergují pro $\beta>1$

$\beta\le 1$ DIVERGUJE

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=\infty$$

! Srovnej s harmonickou řadou a Příklady (3), (6) a (10).

Všimněte si, že limitní odmocninové a limitní podílové kritérium nedávají žádnou informaci o konvergenci řad (či jejich divergenci), pokud

(+) $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=1$ respektive $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$.

Pokud nám vyjde některá z podmínek (+), tak musíme postupovat pomocí jemnějších kritérií (třeba integrálního).

Existuje spousta dalších kritérií. V odmocninovém či podílovém kritériu jsme (v důkazu) porovnávali "naši" řadu s geometrickou řadou. V Raabeho kritériu se daná řada porovná s řadou $\sum\frac{1}{n^\alpha}$; v Gaussově kritériu se zase daná řada porovná s $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, atd.

Prvky konvergentní řady musí jít (pro $k\to\infty$) k nule, viz nutná podmínka Věta 6.1. O tom, zda řada konverguje, tedy rozhoduje jak rychle jdou a_k k nule. Víme, že $a_k=\frac{1}{k}$

Výše uvedený důkaz konvergence alternující řady $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k}$ lze zobecnit pro libovolnou posloupnost $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje podmínky:

$$(♛)\quad \begin{cases} \cdot\ a_n \geq 0 \\ \cdot\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \cdot\ \{a_n\} \text{ je } \underline{\text{nerostoucí}}:\ n < m \Rightarrow a_n \geq a_m. \end{cases}$$

To přesně říká následující Leibnizovo kritérium.

$\boxed{\text{Věta 6.10}}$ (Leibnizovo kritérium pro alternující řady)

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>nerostoucí</u> posloupnost kladných čísel. PLATÍ:

$$(G)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ konverguje} \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Neboli: Nutná podmínka konvergence řad, tj. podmínka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, je pro <u>nerostoucí</u> nezáporné posloupnosti postačující pro konvergenci alternující řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 6.1 (nutná podmínka konvergence řad)

$\boxed{\Leftarrow}$ Platí:

- $s_{2(n+1)} = s_{2n} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \geq \ldots \geq s_2 = -a_2 + a_1 \geq 0$
- $s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} + (-1)^{2n+4}a_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{- a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\leq 0} \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_1 = a_1$
- $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n}$

Tedy:
- $\boxed{0 \leq s_n \leq s_{2n+1} \leq a_1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Obě jsou omezené.

Existují tedy vlastní limity: $S := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ a $L := \lim s_{2n+1}$ a také $L \geq S$.

Navíc $L - S = \lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Tedy $L = S$ a tvrzení platí.