

## Požadavky ke zkoušce z TMI

### A. PÍSEMNÁ ČÁST

Písemná zkouška trvá 90 minut. Jediná povolená pomůcka je "tahák" na 1 listu papíru formátu A4. Ostatní materiály, mobilní telefony a jiné přístroje atd. musejí být po celou dobu písemky uloženy v tašce.

*Témata:* vyšetřování konvergence integrálů, záměna limity a integrálu, záměna řady a integrálu, limita, spojitost a derivace podle parametru, výpočet jednorozměrných integrálů metodou derivování podle parametru a pomocí Fubiniovy věty, vícerozměrné integrály, obsahy, objemy.

### B. ÚSTNÍ ČÁST

Je třeba znát definice, věty, důkazy, souvislosti, ilustrující příklady. Důkazy jsou vyžadovány v takovém rozsahu a podrobnosti, v jakém byly odpřednášeny, kromě toho může dojít na podrobnosti, které nevyžadují další znalosti, ale jen porozumění problematice.

*Teorie míry.* Množinové systémy, okruh, algebra,  $\sigma$ -okruh,  $\sigma$ -algebra. Množinová funkce. Míra (konečná,  $\sigma$ -konečná, úplná). Borelovské množiny. Abstraktní vnější míra. Carathéodoryho věta. Základní konstrukce. Dynkinovy systémy a věta o jednoznačnosti. Pramíra, Hopfova věta. Zúplnění míry.

*Měřitelné funkce.* Měřitelné funkce na abstraktním měřitelném prostoru. Jaké operace s funkcemi zachovávají měřitelnost? Pojem jednoduché funkce. Věta o aproximaci jednoduchými funkcemi.

*Konstrukce (abstraktního Lebesgueova) integrálu.* Základní vlastnosti Lebesgueova integrálu. Leviho věta. Linearita a "různé vlastnosti".

*Jednorozměrné integrály.* Srovnání Lebesgueova integrálu, "Newtonova" integrálu a Riemannova integrálu. Kritéria konvergence Lebesgueova integrálu na intervalu. Lebesgue-Stieltjesův integrál, per-partes pro LS integrál.

*Záměna limity a integrálu, řady a integrálu* Fatouovo lemma, Lebesgueova věta, Leviho a Lebesgueova věta pro řady, kritéria pro záměnu řady a integrálu.

*Integrál závislý na parametru.* Limita, spojitost, derivace, funkce Gamma.

*Konstrukce Lebesgueovy míry.* Elementární objem, Aplikace základní konstrukce. Srovnání s Jordan-Peanovým objemem.

*Fubiniova věta.* Součin měr. Fubiniova věta pro (úplný) součin měr. Fubiniova věta v  $\mathbb{R}^n$ .

*Věta o substituci.* Obecná věta. Polární, sférické a válcové souřadnice.

*Prostory  $L^p$ .* Youngova, Hölderova a Minkowského nerovnost. Zavedení, ztotožnění funkcí rovných skoro všude,  $L^p$ -normy. Věta o úplnosti. Hustota jednoduchých funkcí.

*Lebesgueova věta o rozkladu a Radon-Nikodýmova věta.* Pojem absolutně spojitě a singulárně míry. Hustota míry. Lebesgueova věta o rozkladu a Radon-Nikodýmova věta. Rozklad míry na spojitou a diskrétní část, srovnání s Lebesgueovým rozkladem, kombinace a aplikace na rozklad LS míry na přímce vzhledem k Lebesgueově míře. Rozklad omezené neklesající zprava spojitě funkce na absolutně spojitou část, singulárně spojitou část a funkci skoků, příklady.

*Znaménkové míry.* Pojem znaménkové míry, informativně vektorové míry. Variace znaménkové míry. Jordanův rozklad, Hahnův rozklad.

*Radonovy míry a LS míry.* Pojem Radonovy míry, rozšiřování LS funkce intervalu na LS míru na  $\mathbb{R}^n$ . Topologické vlastnosti LS měr. Luzinova věta v  $\mathbb{R}^n$ . Rieszovy věty o reprezentaci lineárních funkcionalů na spojitých funkcích (informativně).

*Aplikace na teorii pravděpodobnosti apod.* Měřitelná zobrazení. Obraz míry a integrování podle obrazu míry. Náhodná veličina, rozdělení, distribuční funkce.

*Dodatky* Čebyševova nerovnost.  $\varepsilon$ - $\delta$  spojitost integrálu. Borel–Cantelliho věta. Jegerovova věta.

**Poznámky.** Příklady a “protipříklady” jsou neoddelitelnou součástí požadovaných znalostí, stejně jako definice, věty a důkazy. Bez znalosti důkazů nelze projít zkouškou ani s výsledkem “dobře”.

### **Přehled nejdůležitějších důkazů**

1. Operace s měřitelnými funkcemi (3.10)
2. Aproximace měřitelných funkcí jednoduchými (3.12)
3. Leviho věta (4.13)
4. Linearita integrálu (4.15)
5. Kritéria pro existenci Lebesgueova integrálu na intervalu (5.2–5.5)
6. Fatouovo lemma (6.1)
7. Lebesgueova věta (6.2)
8. Derivace podle parametru (8.4)
9. Carathéodoryho věta (9.5)
10. Úspěšnost konstrukce Lebesgueovy míry (10.2–10.8)
11. Hopfova věta (11.4, 12.5)
12. Věta o Dynkinových systémech (12.3)
13. Věta o jednoznačnosti (12.4)
14. Existence a jednoznačnost součinu měr (14.2–14.6)
15. Fubiniova věta (14.10, 14.11)
16. Věta o substituci (detailně 15.8, jinak jen hrubá myšlenka)
17. Nerovnosti: Youngova, Hölderova, Minkowského (16.3.–16.5.)
18. Úplnost  $L^p$  (16.6)
19. Radon-Nikodýmova věta (17.4)
20. Lebesgueova věta o rozkladu (17.5)
21. Věta o variaci (18.4–18.7)
22. Topologické vlastnosti LS měr (20.8, 20.9)
23. Luzinova věta (20.11)
24.  $\varepsilon$ - $\delta$  spojitost integrálu (24.2)
25. Jegerovova věta (24.6)