

1. Rozviňte v řadu integrál $\int_0^\infty \cos x \log(1 + e^{-x}) dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos x \log(1 + e^{-x}) dx &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{e^{-kx} \cos x}{k} \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty (-1)^{k+1} \frac{e^{-kx} \cos x}{k} dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Odůvodnění záměny podle kritéria " $\sum \int |f_k| < \infty$ ":

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \left| (-1)^{k+1} \frac{e^{-kx} \cos x}{k} \right| dx \leq \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{k} dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty.$$

2. Spočtěte integrál

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1 + ax^2)}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

Řešení. Pro $a < 0$ je integrand nedefinován na intervalu, tudíž integrál nemá smysl. $F(0) = 0$. Pro $a > 0$ máme

$$(1) \quad F'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + ax^2)(1 + x^2)} dx.$$

Odůvodnění: Podmínka měřitelnosti je splněna. Majoranta $\frac{1}{1+x^2}$, pro $a = 1$ máme

$$\frac{\log(1 + x^2)}{x^2(1 + x^2)} \leq \frac{1}{x^2 + 1},$$

takže integrál konverguje aspoň v jednom bodě (bod $a = 0$ se nedá použít, protože není v sledovaném intervalu). Integrand v (1) je spojitý, takže ta samá majoranta dává i spojitost derivace v $(0, \infty)$. Počítáme

$$(a - 1)F'(a) = \int_0^\infty \left(\frac{a}{1 + ax^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = \frac{\pi}{2}(\sqrt{a} - 1),$$

tedy

$$(2) \quad F'(a) = \frac{\pi/2}{\sqrt{a} + 1}$$

platí pro $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Jak už jsme zmínili, F' je spojitá v 1, takže (2) platí i pro $a = 1$. Odtud $F(a) = \pi(\sqrt{a} - \log(1 + \sqrt{a})) + C$. Jelikož F je spojitá v $0+$ (majoranta $\frac{\log(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$ pro $a \in [0, 1]$) a přímý výpočet dává $F(0) = 0$, máme

$$F(a) = \pi(\sqrt{a} - \log(1 + \sqrt{a})), \quad a \geq 0.$$

3. Spočtěte míru množiny:

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z\sqrt{x^2 + y^2} < 2, \sqrt{x^2 + y^2} < z + 1, z > 0 \right\}.$$

Řešení. Ve válcových souřadnicích:

$$\begin{aligned}\lambda_3(M) &= \int_{\substack{0 < hr < 2 \\ 0 < r < h+1 \\ -\pi \leq \alpha < \pi}} r \, dr \, dh \, d\alpha = 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{h+1} r \, dr \right) dh + 2\pi \int_1^\infty \left(\int_0^{2/h} r \, dr \right) dh \\ &= \pi \int_0^1 (h^2 + 2h + 1) \, dh + \pi \int_1^\infty \frac{4}{h^2} \, dh = \pi \left(\frac{1}{3} + 1 + 1 + 4 \right) = \frac{19}{3} \pi.\end{aligned}$$

1. Spočtěte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} \, dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} \, dx \\ = \int_0^\infty \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{x}{n} \right) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \right) dx = \int_0^\infty x e^{-x} \, dx = \Gamma(2) = 1.\end{aligned}$$

Záměna podle Lebesgueovy věty. Pokud $n \geq 3$, pak $\binom{n}{3} \geq \frac{n^3}{27}$ a tudíž podle binomické věty $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{x^3}{27}$. Dále $\sin \frac{x}{n} \leq \frac{x}{n}$. Tedy majoranta integrandu je

$$\frac{27x}{27 + x^3}.$$

2. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-a^2 x^2}}{x^2} \, dx.$$

Řešení. Máme

$$F'(a) = \int_0^\infty 2a e^{-a^2 x^2} \, dx = 2 \operatorname{sgn} a \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \pm \sqrt{\pi} \quad (t = |a|x, a \neq 0).$$

Podmínka měřitelnosti je splněna. Integrál konverguje pro všechna $a \in \mathbb{R}$: U nuly má integrand vlastní limitu a^2 , u nekonečna je odhadnutý $1/x^2$. Majoranta pro derivaci $2qe^{-p^2 x^2}$ pro $p < |a| < q, q > p > 0$. Máme

$$F(a) = \sqrt{\pi} a + C_1, \quad a > 0; \quad F(a) = -\sqrt{\pi} a + C_2, \quad a < 0.$$

Přímým výpočtem dostaneme $F(0) = 0$. Abychom odtud učinili závěr, že $F(a) = \sqrt{\pi}|a|, a \in \mathbb{R}$, musíme ještě ověřit spojitost F aspoň v nule. Majoranta pro spojitost je $\frac{1 - e^{-q^2 x^2}}{x^2}$ pro $|a| < q, q > 0$.

3. Spočtěte integrál $\int_M \frac{x \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2}$, kde

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 < xz < x^2 + y^2 < 1, z > 0\}.$$

Řešení. Ve válcových souřadnicích ($x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = h$, Jakobián r) uvážíme, že podmínka $h \cos \alpha > 0$ dává omezení $|\alpha| < \pi/2$. Máme

$$\begin{aligned}\int_M \frac{x \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2} &= \int_{\substack{0 < h \cos \alpha < r < 1 \\ -\pi/2 < \alpha < \pi/2}} \cos \alpha \, dr \, dh \, d\alpha \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{r/\cos \alpha} \cos \alpha \, dh \right) dr \right) d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 r \, dr \right) d\alpha = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$