Příklad. Rozviňte v řadu:

$$\int_0^1 \frac{x^p \log x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Řešení. Integrál konverguje pro $p > -1$. Jelikož

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

zderivováním dostaneme

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}.$$

Alternativně si můžeme uvědomit, že jde o zvláštní případ binomické řady. Podobně

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Máme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^p \log x}{(1+x)^2}\,dx &= \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{p+n-1} \log x\Big)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} n x^{p+n-1} \log x\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(p+n)^2}.
\end{aligned}$$

Nyní se budeme zabývat majorantou pro částečné součty. Zvolme m přirozené. Potom pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$n x^{n-1} - (n+1) x^n = n x^{n-1}(1-x) - x^n,$$

tedy pro m sudé je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} n x^{p+n-1} \log x = x^p (1-x) \log x &\sum_{n=1,3,\dots,m-1} n x^{n-1} \\
- x^p \log x &\sum_{n=1,3,\dots,m-1} x^n
\end{aligned}$$

a pro m liché je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} (-1)^{n-1} n x^{p+n-1} \log x = x^p (1-x) \log x &\sum_{n=0,2,\dots,m-1} n x^{n-1} \\
- x^p \log x &\sum_{n=0,2,\dots,m-1} x^n
\end{aligned}$$

Suma přes lichá nebo sudá n se dá odhadnout sumou přes všechna n, tedy

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} n x^{p+n-1} \log x\Big| &\le x^p (1-x) |\log x| \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} + x^p |\log x| \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= x^p (1-x) |\log x|\, \frac{1}{(1-x)^2} + x^p |\log x|\, \frac{1}{1-x} \\
&= 2 x^p |\log x|\, \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

To je integrovatelná funkce. $\square$

Jiné řešení. Rozvineme do stejné řady, ale použijeme jinou metodu na hledání majoranty. Odvodíme pomocný odhad založený na Abelově parciální sumaci. Mějme posloupnosti $\{a_n\}_n$ a $\{b_n\}$, o nichž víme, že existují $m \in \mathbb{N}$ a $s > 0$ tak, že

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{m-1} \leq a_m \geq a_{m+1} \geq a_{m+2} \geq \cdots \geq 0 \tag{1}$$

a

$$|b_1 + \cdots + b_n| \leq s, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = b_1(a_1 - a_2) + (b_1 + b_2)(a_2 - a_3) + \cdots + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)a_n,$$

takže

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\Big| &\leq |b_1|\ |a_1 - a_2| + |b_1 + b_2|\ |a_2 - a_3| + \cdots + |b_1 + b_2 + \cdots + b_N||a_N| \\ &\leq s(|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_N|)\end{aligned}$$

Nyní použijeme

$$|a_n - a_{n+1}| = \begin{cases} a_n - a_{n+1}, & n < m, \\ -a_n + a_{n+1}, & n \geq m \end{cases}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\Big| &\leq s[(-a_1 + a_2) + (-a_2 + a_3) + \cdots + (-a_{m-1} + a_m)] \\ &\quad + s[(a_m - a_{m+1} + \cdots + (a_{N-1} - a_N) + a_N)] \\ &= s(2a_m - a_1) \leq 2a_m s.\end{aligned} \tag{2}$$

Nyní aplikujme tento odhad na $a_n = nx^{n-1}$, $b_n = (-1)^{n-1}$. Víme, že (1) je splněno pro m takové, že

$$(m-1)x^{m-2} \leq mx^{m-1} > (m+1)x^m,$$

neboli po úpravě

$$m - 1 < \frac{1-x}{x} \leq m.$$

Vyšetřením průběhu funkce $t \mapsto tx^t$ na intervalu $[1, \infty)$ zjistíme, že

$$nx^{n-1} \leq \begin{cases} \frac{1}{ex\log\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{\log\frac{1}{x}}, & \frac{1}{e} < x < 1, \\ 1 \leq \frac{1}{\log\frac{1}{x}}, & 0 < x < \frac{1}{e}. \end{cases}$$

Tedy (aniž bychom počítali, kolik je m) (2) dává

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} nx^{n-1}\Big| \leq \frac{1}{\log\frac{1}{x}}$$

a pro celkový výraz máme majorantu

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} nx^{p+n-1} \log\frac{1}{x}\Big| \leq x^p.$$

□