# Hlubší vlastnosti funkcí

## Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$

   Dokažte následující nerovnosti
4. $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$, $x, y > 0$, $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)
5. $\mathrm{e}^x > x + 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce
$$g(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.
8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.
9. Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky $h$ stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je $d$, je upevněna za konce nit' délky $l$. Rozdíl výšek upevnění je $h$. Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

## Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.

12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \,,$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, $T$ je absolutní teplota v kelvinech, $T^*$ je tzv. charakteristická teplota a $R$ je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

## Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, a najděte inflexní body

13. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = x \sin \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

15. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.