1. ZÁPOČTOVÝ TEST
Matematická analýza I, pondělí 29. října 2018

Jméno:

Vyřešte následující příklady. Všechny kroky zdůvodněte.

1. příklad (6 bodů)
Nalezněte supremum, infimum, maximum a mininum (pokud existují) množiny M:

$$M := \left\{ \frac{(-1)^n n + 5}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dokažte:
a) vlastnost suprema ANEBO infima z definice,
b) vlastnost maxima ANEBO minima z definice.

2. příklad (6 bodů)
Vypočítejte (BEZ použití l'Hopitalova pravidla a Taylorova rozvoje) následující limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}.$$

3. příklad (8 bodů)
Vypočítejte (BEZ použití l'Hopitalova pravidla a Taylorova rozvoje) následující limitu:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}.$$

RIESENIA

1. priklad

$$M=\left\{\frac{-n+5}{n+1}=-1+\frac{6}{n+1}\to -1, n=2k+1; \frac{n+5}{n+1}=1+\frac{4}{n+1}\to 1, n=2k, k\in\mathbb{N}\right\}$$

Pre neparne (liche) n: najvacsie cislo je $-1+\frac{6}{1+1}=2$ a monotonne klesaju k -1
Pre parne (sude) n: najvacsie cislo je $1+\frac{4}{2+1}=\frac{7}{3}$ a monotonne klesaju k 1
Preto: $\sup M=\max M=\frac{7}{3}$, $\inf M=-1$, $\min M$ neexistuje.

$$\begin{aligned}
S=\sup M &\iff 1.\ \forall x\in M: x\le S && \text{horni zavora}\\
&\quad\ \ 2.\ (y\in\mathbb{R}\wedge y<S)\implies(\exists x\in M: x>y) && \text{nejmensi}\\
s=\inf M &\iff 1.\ \forall x\in M: x\ge s && \text{dolni zavora}\\
&\quad\ \ 2.\ (y\in\mathbb{R}\wedge y>s)\implies(\exists x\in M: x<y) && \text{nejvetsi}\\
\overline{m}=\max M &\iff \overline{m}\in M\wedge\forall x\in M: x\le\overline{m} && \text{je v M a je horni zavora}\\
\underline{m}=\min M &\iff \underline{m}\in M\wedge\forall x\in M: x\ge\underline{m} && \text{je v M a je dolni zavora}
\end{aligned}$$

Bodovanie:
vymenovanie a analyza prvkov 2b
spravne urcenie $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ 2b (kazde 0,5 b)
dokazy a) a b) 2b (kazdy za 1b, len definicia 0,5 b)

2. priklad

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}&=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x\sin x\cos x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\frac{x}{\sin x}\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{2\cos x}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Bodovanie:
pouzitie vzorcov a^3-b^3, $\sin 2x$ 1b
uprava do tvaru $\frac{(1-\cos x)}{x^2}$ 1b
uprava do tvaru $\frac{\sin x}{x}$ 1b
vycislenie 2b
spravny vysledok 1b

3. priklad

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}&=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\frac{y}{1-2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)}=1\cdot\lim_{y\to0}\frac{y}{1-2\cos y\cos\frac{\pi}{3}+2\sin y\sin\frac{\pi}{3}}\\
&=\lim_{y\to0}\frac{y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\frac{1-\cos y}{y^2}y+\frac{\sqrt{3}\sin y}{y}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot0+\sqrt{3}\cdot1}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Bodovanie:
uprava do tvaru $\frac{\sin x}{x}$ 1b, pouzitie vzorca 1b
substitucia a pouzitie suctoveho vzorca 1b
vycislenie $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 1b
spravna uprava (aj druhe pouzitie vzorca $\frac{\sin x}{x}$) 1b
uprava do tvaru $\frac{(1-\cos x)}{x^2}$ 1b, pouzitie vzorca 1b
spravny vysledok 1b