1. ZÁPOČTOVÝ TEST
Matematická analýza I, úterý 30. října 2018

Jméno:

Vyřešte následující příklady. Všechny kroky zdůvodněte.

1. příklad (6 bodů)
Nalezněte supremum, infimum, maximum a mininum (pokud existují) množiny M:

$$M := \left\{ \frac{1 + 2n\cos(n\pi)}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dokažte:
a) vlastnost suprema ANEBO infima z definice,
b) vlastnost maxima ANEBO minima z definice.

2. příklad (6 bodů)
Vypočítejte (BEZ použití l'Hopitalova pravidla a Taylorova rozvoje) následující limitu:

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin a}}{x - a}, \ \sin a \neq 0.$$

3. příklad (8 bodů)
Vypočítejte (BEZ použití l'Hopitalova pravidla a Taylorova rozvoje) následující limitu:

$$\lim_{x \to 1} (2 - x)^{\left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{-1}}.$$

RIESENIA

1. priklad

$$M = \left\{ \frac{1-2n}{2n+1} = -1 + \frac{2}{2n+1} \to -1, n = 2k+1; \quad 1, n = 2k, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Neparne (liche) n: najvacsie je $(-1 + \frac{2}{3})$ a monotonne klesaju k -1; parne (sude) n: vsetky $= 1$
Preto: $\sup M = \max M = 1$, $\inf M = -1$, $\min M$ neexistuje.

$$\begin{aligned}
S = \sup M &\iff 1.\ \forall x \in M : x \leq S && \text{horni zavora} \\
&\quad\ \ 2.\ (y \in \mathbb{R} \wedge y < S) \implies (\exists x \in M : x > y) && \text{nejmensi} \\
s = \inf M &\iff 1.\ \forall x \in M : x \geq s && \text{dolni zavora} \\
&\quad\ \ 2.\ (y \in \mathbb{R} \wedge y > s) \implies (\exists x \in M : x < y) && \text{nejvetsi} \\
\overline{m} = \max M &\iff \overline{m} \in M \wedge \forall x \in M : x \leq \overline{m} && \text{je v M a je horni zavora} \\
\underline{m} = \min M &\iff \underline{m} \in M \wedge \forall x \in M : x \geq \underline{m} && \text{je v M a je dolni zavora}
\end{aligned}$$

Bodovanie:
vymenovanie a analyza prvkov 2b
spravne urcenie $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ 2b (kazde 0,5 b)
dokazy a) a b) 2b (kazdy za 1b, len definicia 0,5 b)

2. priklad

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin a}}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{\sin a - \sin x}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{2 \cos \frac{a+x}{2} \sin \frac{a-x}{2}}{(-2) \cdot \frac{a-x}{2}} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} = (-\cos a) \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sin^2 a} = \frac{-\cos a}{\sin^2 a}.
\end{aligned}$$

Bodovanie:
uprava na spolocneho menovatela 1b, pouzitie suctoveho vzorca 1b
uprava do tvaru $\frac{\sin x}{x}$ 1b, pouzitie vzorca 1b dosadenie 1b, spravny vysledok 1b

3. priklad

$$\lim_{x \to 1} (2 - x)^{\left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{-1}} = e^{\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{\cos(\pi x/2)}} = e^{\frac{2}{\pi}}, \text{ pretoze}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{2 - x - 1} \cdot \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = 1 \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} =: (**)$$

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi x}{2} &= \cos \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) \cos \frac{\pi}{2} - \sin \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) \sin \frac{\pi}{2} \\
&= \cos \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) \cdot 0 - \sin \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) \cdot 1 = -\sin \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right) \\
(**) &= \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Bodovanie:
pouzitie vzorca "1^∞"1b, dosadenie spravneho vysledku 1b
uprava do tvaru $\frac{\ln y}{y-1}$ 1b, pouzitie vzorca 1b
cesta od $\cos \frac{\pi x}{2}$ k $\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)\right)$ (da sa aj substituciou) 2b
uprava do tvaru $\frac{\sin x}{x}$ 1b, pouzitie vzorca 1b