Vybrané partie z kvantitativního řízení rizik - kreditní riziko

1 Úvod

Kreditní riziko je riziko vyplývající z neschopnosti nebo neochoty protistrany splatit své závazky.

Basilejský rámec pro kapitálovou přiměřenost bank

Směrnice pro výpočet kapitálové přiměřenosti bank vycházejí z tzv. Basilejských dohod. Jde o doporučení mezinárodního Výboru pro bankovní dohled (zal. 1974 zástupci centrálních bank států G10). Významným krokem v regulaci bank bylo přijetí směrnice Basel 2 platné od r. 2007 s cílem definovat kapitálový požadavek odpovídající individuálnímu rizikovému profilu banky.

Struktura Basel 2 se dělí do 3 pilířů:

- 1. pilíř - Kapitálový požadavek

-vypočítá se jako součet požadavků odpovídajících jednotlivým typům rizik:

- **úvěrové riziko**
- **tržní rizika** - rizika kolísání úrokových sayeb, směnných kurzů, kurzů akcií nebo komodit
- **operační riziko** - riziko ztrát, ke kterým dochází v důsledku nepřiměřenosti nebo selhání interních mechanismů, lidí a systémů, nebo externích událostí

- 2.pilíř - Aktivity bankovního dohledu

  - definuje práva apovinnosti národních regulátorů

- Tržní disciplína

  - zveřejňování relevantních ukazatelů rizik

Po zkušenostech z finanční krize bylo v roce 2011 dohodnuto zdokonalení směrnice Basel 2 - rámec Basel 3, který zpřísňuje požadavky na kapitálovou přiměřenost a na kvalitativní prvky řízení bank. Postupná implementace pravidel Basel 3 má trvat do roku 2019.

V bankách hraje kreditní riziko podobně významnou roli jako pojistně-technické riziko u pojišťoven. V přístupu k modelování a kvantifikaci rizika ztrát z úvěrů můžeme najít analogii k modelování škod z pojistných událostí. V pojištění je klíčovým pojmem ryzí pojistné, odhadující očekávanou výši škod vyplacených za určité období na určitém pojištěném riziku. V oblasti kreditního rizika tuto roli hraje **očekávaná ztráta**, kterou lze chápat jako střední hodnotu náhodné veličiny, vyjadřující ztrátu v důsledku úvěrového selhání (defaultu) určitého dlužníka.

2 Očekávaná ztráta

Uvažujme portfolio úvěrů. Základní částka, kterou bychom měli mít k dispozici pro pokrytí ztrát z tohoto portfolia, odpovídá střední (očekávané) hodnotě těchto ztrát.

Pro jednoho dlužníka lze ztrátu v důsledku selhání modelovat náhodnou veličinou

$$L = \mathrm{EAD}\; S\, D, \tag{1}$$

kde EAD je **expozice při selhání** (exposure at default)

- částka, která je v uvažovaném období vystavena riziku ztráty v případě selhání.

Zde předpokládáme, že EAD není náhodné.

S je ztráta na jednotku expozice (severity)

-udává podíl z úvěrové expozice ztracený v případě selhání dlužníka (S je náhodná veličina).

D je indikátor selhání, náhodná veličina taková, že $D = 1$ v případě defaultu dlužníka v uvažovaném období, $D = 0$ jinak.

Očekávaná ztráta uvažovaného dlužníka může být za předpokladu nezávislosti veličin S a D vyjádřena vztahem

$$\mathrm{E}\, L = \mathrm{EAD}\ \mathrm{LGD}\ \mathrm{PD}, \tag{2}$$

kde $\mathrm{PD} = \mathrm{P}(D = 1)$ vyjadřuje **pravděpodobnost selhání** (default probability), $\mathrm{LGD} = \mathrm{E}\, S$ vyjadřuje (očekávanou) **ztrátu ze selhání** (loss given default).

Nyní se budeme podrobněji věnovat jednotlivým komponentám vztahu (2).

2.1 Pravděpodobnost selhání

Způsob přiřazení pravděpodobností selhání jednotlivým dlužníkům (kalibrace) zpravidla vychází z jednoho ze dvou přístupů:

- kalibrace pravděpodobností selhání z tržních dat
- kalibrace na základě ratingu

Rating je hodnocení důvěryhodnosti dlužníka přiřazené externí agenturou nebo interním ratingovým systémem banky. K ohodnocení se užívá kvantitativních i kvalitativních informací (např. budoucí výnosy a finanční toky, struktura kapitálu, likvidita aktiv, politická a sociální situace v regionu, tržní situace v oboru podnikání, kvalita managementu,...)

Ratingové agentury (Moody's, S&P, Fitch) používají škálu ratingových kategorií, např. AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, D (S&P).

Kalibrace pravděpodobností defaultu se provádí na základě historických údajů o selháních v jednotlivých ratingových kategoriích (lze zjistit ze zpráv vydávaných ratingovými agenturami).

Poznámka. Přístup k ratingu v Basel 2. Basel 2 umožňuje výpočet kapitálového požadavku podle různých přístupů. Nejméně sofistikovaný, tzv. *standardní přístup* stanoví kapitálový požadavek součinem expozice, rizikové váhy a daného koeficientu. K určení rizikové váhy se využívá externí rating (pokud klient nemá externí ratingové ohodnocení, má rizikovou váhu 100%). *IRB přístup* (internal rating based) využívá k odhadu pravděpodobností selhání interního ratingu banky.

2.1.1 Expozice při selhání

Expozice obecně sestává ze dvou částí:

- nesplacený zůstatek dluhu (outstandings, rozvahová expozice)
- nečerpané částky, záruky (commitments, podrozvahová expozice)

V případě selhání je ztracena jen ta část, kterou již klient čerpal. Podíl již vyčerpané částky úvěrových příslibů je v podstatě náhodná veličina, pokud chceme modelovat expozici jako nenáhodnou, nahradíme tento podíl jeho očekávanou hodnotou c:

$$\mathrm{EAD} = O + c\,C, \tag{3}$$

kde O představuje nesplacený zůstatek dluhu a C nečerpané částky.

Poznámka. Podle Basel 2 je stanovena EAD pro rozvahovou expozici v nominální hodnotě nesplacených úvěrů. Faktor pro odhad podrozvahové expozice je v základním IRB přístupu stanoven regulátorem, v pokročilém IRB přístupu může banka užít vlastní odhad EAD pro transakce s nejistou expozicí.

2.1.2 Ztráta ze selhání

LGD představuje odhad toho, jakou část expozice banka skutečně ztratí při selhání dlužníka. Závisí na odhadu míry úspěšnosti vymáhání (recovery rate), která je ovlivněna řadou faktorů (kvalita zajištění, podřízenost závazku mezi dlužníkovými aktivy).

V rámci Basel 2 banka odhaduje tento parametr sama, poku používá pokročilý IRB přístup.

3 Riziko portfolia

Zatím jsme se omezovali na vyjádření očekávané ztráty, tedy střední hodnoty náhodné veličiny (2) představující ztrátu z určitého úvěru během zvoleného období. K posouzení rizikovosti je třeba uvažovat jiné charakteristiky rozdělení n.v. L, například rozptyl nebo směrodatnou odchylku.

Pokud předpokládáme nekorelovanost veličin S a D, můžeme vyjádřit rozptyl ztráty ve tvaru

$$\mathrm{Var}\, L = \mathrm{EAD}^2 \left[\mathrm{Var}\, S \ \mathrm{PD} + LGD^2 \ \mathrm{PD}\,(1 - \mathrm{PD})\right]. \tag{4}$$

*Poznámka.*Předpoklad nekorelovanosti veličin S a D nemusí být realistický - může se stát, že zhoršené ekonomické podmínky budou mít vliv na zhoršení vymahatelnosti a zároveň zvýšení pravděpodobnosti selhání.

Spíše než o riziko spojené s jedním úvěrem se zajímáme o riziko celého portfolia úvěrů. Pokud uvažujeme m úvěrů se ztrátami

$$L_i = \mathrm{EAD}_i \ S_i \, D_i, \ \ i = 1, \dots, m, \tag{5}$$

platí pro celkovou očekávanou ztrátu

$$L = \sum_{i=1}^{m} L_i$$

$$\mathrm{E}\, L = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i \ \mathrm{LGD}_i \ \mathrm{PD}_i \tag{6}$$

a pro rozptyl

$$\operatorname{Var} L = \sum_{i,j} \mathrm{EAD}_i \; \mathrm{EAD}_j \; \operatorname{Cov}\left[S_i\, D_i, S_j\, D_j\right]. \tag{7}$$

Pro jednoduchost nyní předpokládejme nenáhodné ztráty na jednotku expozice,

$$S_i = \mathrm{LGD}_i, S_j = \mathrm{LGD}_j\,.$$

Potom

$$\operatorname{Var} L = \sum_{i,j} \mathrm{EAD}_i \; \mathrm{EAD}_j \; \mathrm{LGD}_i \; \mathrm{LGD}_j \sqrt{\mathrm{PD}_i\,(1-\mathrm{PD}_i)\; \mathrm{PD}_j\,(1-\mathrm{PD}_j)}\,\rho_{ij},$$

kde $\rho_{ij} = \operatorname{Corr}(D_i, D_j)$ představuje korelaci mezi dlužníky i a j.

4 Ekonomický kapitál

Připomeňme definici **ekonomického kapitálu** založenou na míře rizika ρ příslušné rozdělení celkové ztráty L:

$$\mathrm{E}\, C = \rho(L) - \mathrm{E}\, L.$$

Za míru rizika se nejčastěji volí **hodnota v riziku** na hladině α

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\left\{q > 0 \middle|\, \mathrm{P}(L \leq q) \geq \alpha\right\}.$$

V souvislosti s modelováním kreditního rizika bývá hodnota

$$\mathrm{EC}_\alpha = \mathrm{VaR}_\alpha(L) - \mathrm{E}\, L$$

nazývána **neočekávaná ztráta**.

Kvantil $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ představuje celkový **rizikový kapitál**. Ten se rozkládá na složku pokrývající očekávanou ztrátu a složku sloužící jako ochrana proti „neočekávané ztrátě“.

5 Modelování korelovaných selhání

Uvažujme portfolio sestávající z m úvěrů v jednoletém horizontu. Nechť R_i značí rating dlužníka i. Během uvažovaného období se může tento rating změnit na hodnotu R_i'. (**ratingová migrace**). Obecně předpokládáme

$$R_i, R_i' \in \{0, \ldots, d\},$$

kde d označuje stav selhání. Pravděpodobnost selhání v uvažovaném období pak značíme

$$p_i = \mathrm{P}(R_i' = d).$$

Dále se zaměříme na dvoustavový model, kde $d = 1$, rating na konci období nabývá hodnoty 0 nebo 1, uvažuje se tedy pouze "přežití"nebo selhání. Ve značení předchozích odstavců to znamená

$$D_i = R_i',\ p_i = PD_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

5.1 Bernoulliovský model

Přirozeným modelem pro selhání dlužníka v dvoustavovém modelu je alternativní rozdělení s parametrem p_i. Definujme

$$D = \sum_{i=1}^{m} D_i. \tag{8}$$

Náhodná veličina D představuje celkový počet selhání v portfoliu. Pokud budeme předpokládat u všech úvěrů jednotkovou expozici a ztrátu celé expozice v případě selhání, odpovídá (8) dříve uvažované celkové ztrátě L z portfolia.

Rozdělení náhodných veličin $D_i,\ i = 1, \ldots, m$, budeme modelovat *smíšeným bernoulliovským modelem*:

Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_m)'$ se sdruženou distribuční funkcí $F(p_1, \ldots, p_m)$ definovanou na $[0, 1]^m$. Předpokládejme, že při daných

$$P_i = p_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

jsou náhodné veličiny $D_i,\ i = 1, \ldots, m$, vzájemně nezávislé, s alternativním rozdělením $Bi(1, p_i)$.

Nepodmíněné rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_m)'$ je pak dáno pravděpodobnostmi

$$\mathrm{P}(D_1 = d_1, \ldots, D_m = d_m) = \int \cdot \cdot \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m} p_i^{d_i} (1 - p_i)^{1-d_i}\, dF(p_1, \ldots, p_m), \tag{9}$$

kde $d_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, m.$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin D_i pak platí

$$\mathrm{E}\, D_i = \mathrm{E}\, P_i, \tag{10}$$

$$\mathrm{Var}\, D_i = \mathrm{E}\, P_i\, (1 - \mathrm{E}\, P_i). \tag{11}$$

Dále je zřejmě

$$\mathrm{Cov}(D_i, D_j) = \mathrm{E}(L_i\, L_j) - \mathrm{E}\, L_i\ \mathrm{E}\, L_j = \mathrm{Cov}(P_i, P_j).$$

Kovarianční struktura náhodných selhání jednotlivých úvěrů je tedy plně popsána kovariančí strukturou mnohorozměrného rozdělení s d.f. F. Korelaci selhání úvěru i a úvěru j můžeme vyjádřit vztahem

$$\mathrm{Corr}(D_i, D_j) = \frac{\mathrm{Cov}(P_i, P_j)}{\sqrt{\mathrm{E}\, P_i(1 - \mathrm{E}\, P_i)}\sqrt{\mathrm{E}\, P_j(1 - \mathrm{E}\, P_j)}}. \tag{12}$$

Speciální případ - homogenní portfolio.

Jako speciální případ uvažujme portfolio úvěrů se stejnou pravděpodobností selhání a stejnou korelací pro všechny dvojice úvěrů. Smíšený model pro náhodná selhání v tomto případě pracuje s náhodnou veličinou P s d.f. F a s předpokladem, že při dané hodnotě $P = p$ jsou všechny náhodné veličiny $D_i,\ i = 1, \ldots, m$, vzájemně nezávislé se stejným rozdělením $Bi(1, p)$. Nepodmíněné rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_m)'$ je dáno pravděpodobnostmi

$$\mathrm{P}(D_1 = d_1, \ldots, D_m = d_m) = \int_0^1 p^k (1-p)^{m-k}\, dF(p), \tag{13}$$

kde

$$k = \sum_{i=1}^{m} d_i,\ \ d_i \in \{0, 1\}.$$

Pravděpodobnost, že v daném období nastane právě k selhání, je možné vyjádřit vztahem

$$\mathrm{P}(D = k) = \binom{m}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{m-k}\, dF(p). \tag{14}$$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin D_i nyní dostáváme

$$\mathrm{E}\, D_i = \bar{p} \tag{15}$$

$$\mathrm{Var}\, D_i = \bar{p}(1-\bar{p}), \tag{16}$$

kde

$$\bar{p} = \int_0^1 p\, dF(p).$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Corr}(D_i, D_j) &= \frac{\mathrm{P}(D_i = 1, D_j = 1) - \bar{p}^2}{\bar{p}(1-\bar{p})} \\ &= \frac{\int_0^1 p^2\, dF(p) - \bar{p}^2}{\bar{p}(1-\bar{p})}. \end{aligned}$$

Pro libovolnou dvojici úvěrů v homogenním portfoliu tak máme korelační koeficient

$$\mathrm{Corr}(D_i, D_j) = \frac{\mathrm{Var}\, P}{\bar{p}(1-\bar{p})}. \tag{17}$$

Krajní případ $\mathrm{Corr}(D_i, D_j) = 0$ dle (17) nastává, pokud je rozdělení náhodné veličiny P degenerované s veškerou pravděpodobností soustředěnou v $\bar{p}$. Druhý extrém, $\mathrm{Corr}(D_i, D_j) = 1$, odpovídá situaci, kdy rozdělení náhodné veličiny P je alternativní s parametrem $\bar{p}$.

5.2 Poissonovský model

Nyní budeme uvažovat pro náhodná selhání model náhodných veličin $L'_i,\ i = 1, \ldots, m$, kde L'_i má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou λ_i. Selhání dlužníka i pak představuje náhodný jev $L'_i \geq 1$ s pravděpodobností

$$p_i = \mathrm{P}(L'_i \geq 1) = 1 - e^{-\lambda_i}. \tag{18}$$

Rozdělení náhodných veličin $L'_i,\ i = 1, \ldots, m$, budeme modelovat *smíšeným poissonovským modelem*:

Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)'$ se sdruženou distribuční funkcí $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ definovanou na $[0, \infty)^m$. Předpokládejme, že při daných

$$\Lambda_i = \lambda_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

jsou náhodné veličiny $L'_i,\ i = 1, \ldots, m$, vzájemně nezávislé, s Poissonovým rozdělením $Poi(\lambda_i)$.

Nepodmíněné rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{L}' = (L_1, \ldots, L_m)'$ je pak dáno pravděpodobnostmi

$$\mathrm{P}(L'_1 = L_1, \ldots, L'_m = L_m) = \int \cdot \cdot \int_{[0,\infty)^m} e^{-(\lambda_1 + \ldots \lambda_m)} \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{L_i}}{L_i!}\, dF(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \tag{19}$$

kde $L_i \in \{0, 1, 2, \dots\},\ i = 1, \dots, m$.

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin L'_i pak platí

$$\mathrm{E}\, L'_i = \mathrm{E}\, \Lambda_i, \tag{20}$$

$$\mathrm{Var}\, L'_i = \mathrm{Var}\, \Lambda_i + \mathrm{E}\, \Lambda_i. \tag{21}$$

Pro kovariance náhodných veličin L'_i a L'_j platí

$$\mathrm{Cov}(L'_i, L'_j) = \mathrm{Cov}(\Lambda_i, \Lambda_j).$$

Korelační koeficient je pak opět jednoznačně určen sdruženou d.f. F:

$$\mathrm{Corr}(L'_i, L'_j) = \frac{\mathrm{Cov}(\Lambda_i, \Lambda_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, \Lambda_i + \mathrm{E}\, \Lambda_i}\sqrt{\mathrm{Var}\, \Lambda_j + \mathrm{E}\, \Lambda_j}}. \tag{22}$$

Speciální případ - homogenní portfolio.

V modelu homogenního portfolia budeme nyní uvažovat náhodnou veličinu Λ s d.f. F a předpoklad, že při dané hodnotě $\Lambda = \lambda$ jsou náhodné veličiny L_i', $i = 1, \ldots, m$, vzájemně nezávislé se stejným rozdělením $Poi(\lambda)$. Nepodmíněné rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{D} = (L_1, \ldots, L_m)'$ je dáno pravděpodobnostmi

$$\mathrm{P}(L_1 = L_1, \ldots, L_m = L_m) = \int_0^\infty e^{-m\lambda} \frac{\lambda^{(L_1 + \cdots + L_m)}}{L_1! \ldots L_m!} \, dF(\lambda). \tag{23}$$

Z předpokladu podmíněné nezávislosti náhodných veličin L_i' plyne, že jejich součet

$$L' = \sum_{i=1}^m L_i'$$

má při dané hodnotě $\Lambda = \lambda$ Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $m\,\lambda$. Pro nepodmíněné rozdělení celkového počtu selhání tak dostaneme vztah

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(L' = k) &= \int_0^\infty \mathrm{P}(L' = k | \Lambda = \lambda) \, dF(\lambda) \\ &= \int_0^\infty e^{-m\lambda} \frac{m^k \lambda^k}{k!} \, dF(\lambda). \end{aligned}$$

Poznámka. Poissonovský model připouští možnost více než jednoho selhání na jednom úvěru v uvažovaném období. Pravděpodobnost takového jevu je

$$\mathrm{P}(L_i' \geq 2) = 1 - e^{-\lambda_i}(1 + \lambda_i). \tag{24}$$

Přitom

$$p_i = 1 - e^{-\lambda_i} \approx \lambda_i,$$

hodnota parametru λ_i tedy bude blízká pravděpodobnosti selhání a ve většině případů bude velmi malá. Pak bude velmi malá i pravděpodobnost (24). Například pro $\lambda_i = 0,01$ bychom dostali $\mathrm{P}(L'_i \geq 2) = 0,00005$.

V homogenním portfoliu je jednotná pravděpodobnost selhání dána vztahem

$$\begin{aligned} \bar{p} = \mathrm{P}(L'_i \geq 1) &= \int_0^\infty \mathrm{P}(L' \geq 1 | \Lambda = \lambda) \, dF(\lambda) \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda}) \, dF(\lambda) \end{aligned}$$

a jednotný korelační koeficient pro dvojici úvěrů i, j $(i \neq j)$ je

$$\mathrm{Corr}(L'_i, L'_j) = \frac{\mathrm{Var}\,\Lambda}{\mathrm{Var}\,\Lambda + \mathrm{E}\,\Lambda}. \tag{25}$$

Korelační koeficient (25) poroste s rostoucím podílem $\frac{\mathrm{Var}\,\Lambda}{\mathrm{E}\,\Lambda}$ (tzv. **disperzí** n.v. Λ).

6 Modelování korelovaných selhání pomocí faktorových modelů

Popíšeme faktorový přístup k modelování korelovaných selhání, který byl navržen pro komerční nástroje řízení kreditního rizika. Příslušné modely jsou v literatuře známy jako KMV-model a model CreditMetrics.

Poznámka. KMV je společnost založená v roce 1989 (název je zkratkou jmen zakladatelů - Kealhofer, McQuown, Vašíček). Nyní je pod názvem Moody's KMV součástí Moody's Analytics Enterprise Risk Solutions. Ukážeme některé principy modelování kreditního rizika portfolia navržené pod názvem KMV Portfolio Manager. Na podobných základech je postaveno modelování korelovaných selhání v metodice CreditMetrics. Tento model byl vyvinut bankou JPMorgan, z níž se vydělila skupina RiskMetricsGroup, v současné době vlastněná společností MSCI. Technický dokument k modelu CreditMetrics, publikovaný poprvé v roce 1997, se stal jedním z prvních a často citovaných pramenů pro modelování kreditního rizika portfolií.

Obě zmíněné metodiky slouží k modelování celkové ztráty z kreditního portfolia a k odhadu jejích charakteristik, např. hodnoty v riziku. Rozdělení celkové ztráty je získáno na základě modelování budoucího ratingu dlužníků při zohlednění vzájemných korelací. Vývoj ratingu je odvozován z vývoje hodnoty aktiv dlužníků v daném časovém horizontu.

V souladu s koncepcí předchozí kapitoly se nyní zaměříme na zjednodušený model, který rozlišuje pouze stavy „přežití“ či selhání. Potom budeme za selhání považovat stav, kdy proces hodnoty aktiv v čase poklesne pod určitou kritickou hranici. Ukážeme, že za těchto předpokladů přístup užívaný v modelech KMV a CreditMetrics odpovídá smíšenému bernoulliovskému modelu z odstavce 5.1.

Faktorové modely vysvětlují rozptyl modelované veličiny v závislosti na podkladových faktorech. Modelovanou veličinou pro i-tého dlužníka v portfoliu je logaritmický výnos v časovém horizontu T

$$r_i = \log\left(A_T^{(i)}/A_0^{(i)}\right),$$

kde $A_t^{(i)}$ je hodnota aktiv i-tého dlužníka v čase t.

Ve faktorovém modelu se tato veličina modeluje vztahem

$$r_i = \beta_i \, \Phi_i + \epsilon_i, \ i = 1, \ldots, m, \tag{26}$$

kde Φ_i je **kompozitní faktor** dlužníka i.

Náhodné veličiny $\{\epsilon_i\}$ jsou nezávislé na $\{\Phi_i\}$ a navzájem. Platí

$$\operatorname{Var} r_i = \beta_i^2 \operatorname{Var} \Phi_i + \operatorname{Var} \epsilon_i.$$

To představuje rozklad rozptylu r_i na systematickou složku a složku specifickou pro dlužníka.

Koeficient β_i vyjadřuje míru korelace r_i a Φ_i. Podobně lze uvažovat **koeficient determinace** regresní rovnice (26)

$$R_i^2 = \frac{\beta_i^2 \operatorname{Var} \Phi_i}{\operatorname{Var} r_i}, \ i = 1, \ldots, m, \tag{27}$$

který udává, kolik variability r_i může být vysvětleno prostřednictvím Φ_i.

Hodnota R_i^2 odpovídá systematické části rozptylu standardizovaných výnosů

$$\tilde{r}_i = \frac{r_i - \mathrm{E}\, r_i}{\sqrt{\mathrm{Var}\, r_i}} \tag{28}$$

Reziduální (specifická) část rozptylu standardizovaných výnosů je potom $1 - R_i^2$.

Rozdělení rozptylu výnosů z aktiv firmy na systematickou a specifickou část je první úrovní 3-úrovňového faktorového modelu.

Další úroveň spočívá v rozkladu systematického rizika na složky příslušející odvětví podnikání a regionu. Tohoto rozkladu dosáhneme zavedením

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{K} w_{i,k}\, \Psi_k, \;\; i = 1, \ldots, m, \tag{29}$$

kde $\Psi_1, \ldots, \Psi_{K_0}$ jsou faktory příslušející oboru podnikání a $\Psi_{K_0+1}, \ldots, \Psi_K$ jsou regionální faktory.

$\{w_{i,1}, \ldots, w_{i,K_0}\}$ a $\{w_{i,K_0+1}, \ldots, w_{i,K}\}$ jsou příslušné váhy, přitom se předpokládá $w_{i,k} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, K$,

$$\sum_{k=1}^{K_0} w_{i,k} = \sum_{k=K_0+1}^{K} w_{i,k} = 1, \;\; i = 1, \ldots, m.$$

Příklad. Uvažujme dva dlužníky. Předpokládejme, že koeficienty β vyjadřující míru závislosti volatility výnosu z aktiv na systematickém faktoru jsou $\beta_1 = 0,9$ a $\beta_2 = 0,7$. Aktivita dlužníka 1 spočívá ze 60% v automobilovém průmyslu a ze 40% v leteckém průmyslu. Dlužník 2 je činný pouze v automobilovém průmyslu. Pro jednoduchost neuvažujeme územní faktory.

Pro logaritmické výnosy dostáváme na první úrovni

$$r_1 = 0,9\,\Phi_1 + \epsilon_1$$

$$r_2 = 0,7\,\Phi_2 + \epsilon_2.$$

Přitom

$$\Phi_1 = 0,6\,\Psi_1 + 0,4\,\Psi_2,$$

$$\mathrm{Var}\,\Phi_1 = 0,6^2\ \mathrm{Var}\,\Psi_1 + 0,4^2\ \mathrm{Var}\,\Psi_2 + 0,6 \cdot 0,4\ \mathrm{Cov}(\Psi_1, \Psi_2)$$

a

$$\Phi_2 = \Psi_1,\ \mathrm{Var}\,\Phi_2 = \mathrm{Var}\,\Psi_1.$$

Dále platí

$$\mathrm{Cov}\,(\Phi_1, \Phi_2) = 0,6\ \mathrm{Var}\,\Psi_1 + 0,4\ \mathrm{Cov}\,(\Psi_1, \Psi_2)\,.$$

Korelaci mezi logaritmickými výnosy z aktiv obou dlužníků pak vyjádříme dosazením výše uvedených hodnot do vztahu

$$\mathrm{Corr}(r_1, r_2) = \frac{0,9 \cdot 0,7\ \mathrm{Cov}\,(\Phi_1, \Phi_2)}{\sqrt{0,9^2\ \mathrm{Var}\,\Phi_1 + \mathrm{Var}\,\epsilon_1}\,\sqrt{0,9^2\ \mathrm{Var}\,\Phi_2 + \mathrm{Var}\,\epsilon_2}}.$$

Pro celé portfolio dostaneme z (26) vektorový zápis

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\Phi} + \epsilon, \tag{30}$$

kde $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)'$, $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)'$, β je diagonální matice s diagonálními prvky β_i, $i = 1, \ldots, m$.

Z rozkladu (29) plyne

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{W}\,\mathbf{\Psi} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{31}$$

kde $\mathbf{W}$ je matice vah a $\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_K)'$.

Příklad. Ve výše uvedeném příkladu máme

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}, \ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V poslední úrovni jsou odvětvové a regionální faktory vyjádřeny pomocí nekorelovaných globálních faktorů:

$$\Psi_k = \sum_{n=1}^{N} b_{k,n}\,\Gamma_n + \delta_k, \ \ k = 1, \ldots, K,$$

zapsáno maticově

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{B}\,\mathbf{\Gamma} + \boldsymbol{\delta}, \tag{32}$$

kde $\mathbf{B}$ je matice typu $K \times N$, $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N)'$ je vektor globálních faktorů a $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_k)'$ vektor reziduí nezávislý na $\mathbf{\Gamma}$.

Poznámka. Rozklad (32) je založen na analýze hlavních komponent. Tato metoda vícerozměrné statistiky je užívaná ke snížení dimenze proměnných vysvětlujících variabilitu - cílem je najít v pozadí stojící (latentní) proměnné (komponenty), které dostatečně vysvětlují původní variabilitu. Tyto nově vytvořené proměnné jsou lineární kombinací původních měřitelných proměnných a jsou nekorelované.

Kombinací výše uvedených tří úrovní dostáváme

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{W}\,(\mathbf{B}\,\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\epsilon}. \tag{33}$$

Pro výpočet korelace výnosů z aktiv přejdeme ke standardizované veličině $\tilde{r}_i$ zavedené v (28).

Lze psát

$$\tilde{r}_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\operatorname{Var} r_i}}\,\bar{\Phi}_i + \frac{\bar{\epsilon}_i}{\sqrt{\operatorname{Var} r_i}}, \tag{34}$$

kde $\bar{\Phi}_i = \Phi_i - \operatorname{E}\Phi_i$, $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i - \operatorname{E}\epsilon_i$.

Pro korelaci výnosů z aktiv dlužníků i a j pak dostaneme

$$\operatorname{Corr}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_j] = \operatorname{E}[\tilde{r}_i\,\tilde{r}_j] = \frac{\beta_i}{\sqrt{\operatorname{Var} r_i}}\,\frac{\beta_j}{\sqrt{\operatorname{Var} r_j}}\;\operatorname{E}[\bar{\Phi}_i\,\bar{\Phi}_j], \tag{35}$$

což lze vyjádřit pomocí koeficientů determinace

$$\begin{aligned}\operatorname{Corr}[\tilde{r}_i, \tilde{r}_j] &= \frac{R_i}{\sqrt{\operatorname{Var}\Phi_i}}\,\frac{R_j}{\sqrt{\operatorname{Var}\Phi_j}}\;\operatorname{E}[\bar{\Phi}_i\,\bar{\Phi}_j]\\ &= \frac{R_i}{\sqrt{\operatorname{Var}\bar{\Phi}_i}}\,\frac{R_j}{\sqrt{\operatorname{Var}\bar{\Phi}_j}}\;\operatorname{E}[\bar{\Phi}_i\,\bar{\Phi}_j].\end{aligned}$$

Pro výpočet korelací je pak třeba získat prvky matice

$$\operatorname{E}\left[\bar{\boldsymbol{\Phi}}\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}^T\right] = \boldsymbol{W}\left[\boldsymbol{B}\,\operatorname{E}\left[\bar{\boldsymbol{\Gamma}}\,\bar{\boldsymbol{\Gamma}}^T\right]\boldsymbol{B}^T + \operatorname{E}\left[\bar{\boldsymbol{\delta}}\,\bar{\boldsymbol{\delta}}^T\right]\right]\,\boldsymbol{W}^T, \tag{36}$$

kde $\bar{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} - \mathrm{E}\,\mathbf{\Gamma}$, $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\delta} - \mathrm{E}\,\boldsymbol{\delta}$.

Výše uvedené vyjádření plyne z rovnosti

$$\bar{\mathbf{\Phi}} = \boldsymbol{W}\,\left(\boldsymbol{B}\,\bar{\mathbf{\Gamma}} + \bar{\boldsymbol{\delta}}\right) \tag{37}$$

a z předpokladu nekoralovanosti vektorů $\mathbf{\Gamma}$ a $\boldsymbol{\delta}$.

Pravděpodobnost selhání

Předpokládáme, že dlužníku i je přiřazena hodnota C_i tak, že k selhání v časovém horizontu $[0, T]$ dochází, právě když $A_T^{(i)} < C_i$. V dříve uvedeném bernoulliovském modelu tak má veličina D_i rozdělení $B_i\left(1, \mathrm{P}\left(A_T^{(i)} < C_i\right)\right)$.

Standardizované logaritmické výnosy lze psát ve tvaru

$$\tilde{r}_i = R_i\,\tilde{\Phi}_i + \tilde{\epsilon}_i,\ i = 1, \ldots, m, \tag{38}$$

kde

$$\tilde{\Phi}_i = \frac{\Phi_i - \mathrm{E}\,\Phi_i}{\sqrt{\mathrm{Var}\,\Phi_i}}$$

je (standardizovaný) kompozitní faktor firmy i.

Vyjdeme-li z předpokladu normálního rozdělení logaritmických výnosů, dostáváme pro veličiny z formule (38)

$$\tilde{r}_i \sim N(0,1),\ \tilde{\Phi}_i \sim N(0,1),\ \tilde{\epsilon}_i \sim N(0, 1 - R_i^2).$$

Označme c_i kritickou hranici pro logaritmický výnos odvozenou z ekvivalence

$$\tilde{r}_i < c_i \Leftrightarrow A_T^{(i)} < C_i.$$

S ohledem na rozdělení standardizované veličiny $\tilde{r}_i$ je zřejmě

$$c_i = \varPhi^{-1}(p_i),$$

kde $\varPhi$ značí distribuční funkci standardního normálního rozdělení.

Pro pravděpodobnost selhání vzhledem k (38) platí

$$\begin{aligned} p_i = \mathrm{P}(\tilde{r}_i < c_i) &= \mathrm{P}\left(\tilde{\epsilon}_i < c_i - R_i\,\tilde{\Phi}_i\right) \\ &= \varPhi\left(\frac{c_i - R_i\,\tilde{\Phi}_i}{\sqrt{1-R_i^2}}\right), \end{aligned}$$

kde $\varPhi$ je distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$.

Pravděpodobnost selhání tedy můžeme vyjádřit v závislosti na náhodném faktoru $\tilde{\Phi}_i$ vztahem

$$p_i(\tilde{\Phi}_i) = \varPhi\left(\frac{\varPhi^{-1}(p_i) - R_i\,\tilde{\Phi}_i}{\sqrt{1-R_i^2}}\right). \tag{39}$$

Jedná se tedy o smíšený model, ve kterém pro nepodmíněné rozdělení vektoru selhání platí

$$\mathrm{P}(D_1 = d_1, \ldots, D_m = d_m) = \int\cdot\cdot\int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m} q_i^{d_i}\,(1-q_i)^{1-d_i}\,dF(q_1,\ldots,q_m), \tag{40}$$

kde distribuční funkce F je dána vztahem

$$F(q_1,\ldots,q_m) = \varPhi_{m,V}\left(p_1^{-1}(q_1),\ldots,p_m^{-1}(q_m)\right),$$

kde $\varPhi_{m,V}$ představuje distribuční funkci m-rozměrného normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a korelační maticí $V = \mathrm{E}\,\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\,\tilde{\boldsymbol{\Phi}}'$.

Model lze využít zejména k testování scénářů. Za kompozitní faktory je možno dosadit rozklad na oborové a regionální faktory (29) a zkoumat vliv těchto faktorů na podmíněné pravděpodobnosti selhání.

7 Model CreditRisk$^+$

V této části se zaměříme na přístup k modelování kreditního rizika portfolia, který byl navržen v roce 1997 v souvislosti s produktem CreditRisk$^+$ vyvinutým divizí investičního bankovnictví skupiny Credit Suisse. Model je zajímavý tím, že pro popis celkové ztráty z kreditního portfolia využívá techniky známé z modelování úhrnů škod v pojistné matematice. V literatuře týkající se kreditního rizika bývá nazýván aktuárským modelem.

Ukážeme, že model odpovídá struktuře smíšeného poissonovského modelu zavedeného v odstavci 5.2.

Pro modelování celkové ztráty budeme nyní uvažovat i expozice jednotlivých dlužníků. Uvažujme nenáhodnou expozici i=tého dlužníka ve tvaru

$$E_i = \mathrm{EAD}_i \ \mathrm{LGD}_i \,. \tag{41}$$

Zvolme jednotku expozice E. Potom

$$\nu_i = \frac{E_i}{E} \tag{42}$$

je expozice i-tého dlužníka vyjádřená v násobcích jednotky E.

Model pracuje s rozdělením portfolia do pásem expozice označených $[j],\ j = 1, \ldots, m_E$: dlužník i patří do pásma $[j]$, pokud jeho expozice zaokrouhlená na nejbližší celočíselný násobek jednotky E je $\nu_{[j]}\, E$. (Tím se zmenší množina možných hodnot pro expozice jednotlivýách dlužníků, jde o proces podobný diskretizaci spojitých rozdělení používané při výpočtech rozdělení škodních úhrnů.

Předpokládejme, že pro i-tého dlužníka máme odhadnutou pravděpodobnost selhání p_i, která má v poissonovském modelu vyjádření (18). Odtud stanovíme intenzitu selhání i-tého dlužníka

$$\lambda_i = -\log(1 - p_i).$$

Pro střední hodnotu počtu selhání v pásmu $[j]$ pak dostaneme vztah

$$\lambda_{[j]} = \sum_{i \in [j]} \lambda_i, \tag{43}$$

střední hodnota počtu selhání v celém portfoliu je pak

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m_E} \lambda_{[j]}. \tag{44}$$

V našem modelu je celková škoda portfolia dána součtem

$$\tilde{L}' = \sum_i E_i\, L_i'.$$

Označme jako

$$L_{[j]}' = \sum_{i \in [j]} L_i'$$

počet selhání v pásmu $[j]$.

Předpokládáme-li, že při daných $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, m$, jsou veličiny L'_i nezávislé, má $L'_{[j]}$ Poissonovo rozdělení s parametrem (43). Podobně, celkový počet selhání L' má Poissonovo rozdělení s parametrem (44).

Dále nahradíme expozice jednotlivých dlužníků jejich zaokrouhlenými hodnotami. Potom můžeme celkovou ztrátu portfolia (v jednotkách E) vyjádřit vztahem

$$\tilde{L}' = \sum_{j=1}^{m_E} \nu_{[j]}\, L'_{[j]} \tag{45}$$

.

Model předpokládá existenci **sektorů**, které představují různé vlivy na ekonomickou situaci subjektů, které mají v daném sektoru kladnou váhu. Sektory mohou být spojeny například s odvětvím podnikání, regionem, státem apod. Sektoru $s \in \{1, \ldots, m_S\}$ je přiřazena náhodná intenzita selhání $\Lambda^{(s)}$ s rozdělením $\Gamma(\alpha_s, \beta_s)$. Intenzity selhání příslušné jednotlivým sektorům se považují za vzájemně nezávislé.

Citlivost pravděpodobnosti selhání dlužníka i na systematické riziko pocházející ze sektoru s je vyjádřena váhou w_{is}. Přitom platí

$$\sum_{s=1}^{m_s} w_{is} = 1,\ \ w_{is} \geq 0.$$

Označme střední hodnotu intenzity selhání příslušné sektoru s jako λ_s. Dlužníku i přísluší náhodná intenzita selhání Λ_i se střední hodnotou λ_i, která souvisí s pravděpodobností selhání prostřednictvím vztahu (18). V uvažovaném sektorovém modelu je náhodná intenzita selhání dlužníka i vyjádřena vztahem

$$\Lambda_i = \sum_{s=1}^{m_S} w_{is}\, \lambda_i\, \frac{\Lambda^{(s)}}{\lambda_{(s)}}. \tag{46}$$

Je vidět, že selhání dvou dlužníků bude korelováno, právě když existuje alespoň jeden sektor, ve kterém mají oba dlužníci kladnou váhu.

Pro výpočet rozdělení celkové ztráty se pak používá pravděpodobnostní vytvořující funkce odvozená z výše popsaných předpokladů, kdy počet selhání v jednom sektoru se řídí složeným negativně binomickým rozdělením a rozdělení celkové ztráty je jejich konvolucí.

Literatura: Bluhm, Ch., Overbeck, L., Wagner, Ch.: An Introduction to Credit Risk Modeling. Chapman & Hall/CRC, 2003.