Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ____________________ Cvičící: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Body**
Maximum bodů	5	7	7	6	5	30
Získané body						

[5] 1. Určete objem toroidu, který vznikne rotací množiny K kolem osy x, kde

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 9(y-1)^2 < 9\}.$$

Řešení:

Množina K se dá popsat jako

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (-3,3),\ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} < y < 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right\}.$$

Pro výpočet objemu můžeme použít vzorec

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud teleso vznikne rotací kolem osy x plochy ohraničné $g(x) < y < f(x)$ a $x \in (a,b)$. Dosadíme do našeho zadání a získáme

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right)^2 \mathrm{d}x = 4\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci:

$$x = 3\sin t,\ \mathrm{d}x = 3\cos t\,\mathrm{d}t$$

kde interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se zobrazí prostě na $(-3,3)$. Dosadíme a získáme

$$V = 4\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\mathrm{d}x = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t)\,\mathrm{d}t = 3\pi[2t - \sin(2t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi^2.$$

[7] 2. Na intervalu $[-\pi, \pi]$ najděte alespoň jedno řešení úlohy

$$\begin{aligned} y' &= (y-1)^{\frac{1}{3}} \sin x, \\ y(-\pi) &= 0, \\ y(\pi) &= 2. \end{aligned}$$

Je toto řešení jednoznačné?

Řešení:

Úloha má stacionární řešení $y \equiv 1$. Pravá strana ODR je Lipschitzovsky spojitá kromě bodu $y = 1$. Pokud tedy $y_0 \neq 1$ pak každým bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno řešení (jdenoznačnost myšlena na okolí bodu x_0) a k větvení může dojít pouze pokud $y_0 = 1$.

Pro $y \neq 1$ budeme úlohu řešit separací proměnných.

$$\begin{aligned} y' &= (y-1)^{\frac{1}{3}} \sin x, \\ \frac{y'}{(y-1)^{\frac{1}{3}}} &= \sin x, \\ \frac{3}{2}\left((y-1)^{\frac{2}{3}}\right)' &= (-\cos x)', \\ (y-1)^{\frac{2}{3}} &= C - \frac{2}{3}\cos x, \\ y &= 1 \pm \left(C - \frac{2}{3}\cos x\right)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

kde výraz $C - \frac{2}{3}\cos x$ musí být nezáporný!

Nejdříve vyřešíme, jak vypadá řešení v okolí bodů $x = \pm\pi$, kde použijeme předepsané podmínky.

$$0 = y(-\pi) = 1 \pm \left(C - \frac{2}{3}\cos(-\pi)\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \left(C + \frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Z této podmínky získáme, že $C = \frac{1}{3}$ a že musíme volit znaménko mínus. Ještě ověříme, na jakém intervalu je $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos x \geq 0$, což je pro $x \in [-\pi, -\pi/3]$ a tedy řešení musí být nutně ve formě

$$y = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos x\right)^{\frac{3}{2}} \qquad x \in [-\pi, -\pi/3].$$

Podobně

$$2 = y(\pi) = 1 \pm \left(C - \frac{2}{3}\cos(\pi)\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \left(C + \frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Z této podmínky získáme, že $C = \frac{1}{3}$ a že musíme volit znaménko plus. Ještě ověříme na jakém intervalu je $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos x \geq 0$, což je pro $x \in [\pi/3, \pi]$ a tedy řešení musí být nutně ve formě

$$y = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos x\right)^{\frac{3}{2}} \qquad x \in [\pi/3, \pi].$$

Řešení je tedy jednoznačně určeno na intervalech $[-\pi, -\pi/3]$ a $[\pi/3, \pi]$. Na intervalu $(-\pi/3, \pi/3)$ ho můžeme dodefinovat např. jako $y \equiv 1$.

Co se týče jednoznačnosti: může se vyskytnout pouze na intevalu $(-\pi/3, \pi/3)$ a to pouze v případě, když existují $x_{1,2} \in (-\pi/3, \pi/3)$ a C takové, že $C_1 - \frac{2}{3}\cos x_{1,2} = 0$ a navíc musí platit, že $C_1 - \frac{2}{3}\cos x \geq 0$ na (x_1, x_2). Poslední podmínka je ale nesplnitelná. Ze sudosti cos a z jeho prostoty na $(0, \pi)$ plyne, že $x_1 = -x_2$. na intervalu $(x_1, 0)$ je ale funkce $C_1 - \frac{2}{3}\cos x$ klesající a a tedy záporná, což odporuje předpokladům. Na intervalu $(-\pi/3, \pi/3)$ je tedy jediná možnost a celkem tedy máme

$$y = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos x\right)^{\frac{3}{2}} & x \in [-\pi, -\pi/3], \\ 1 & x \in [-\pi/3, \pi/3], \\ 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cos x\right)^{\frac{3}{2}} & x \in [\pi/3, \pi] \end{cases}$$

[7] 3. Buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Uvažujte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right) \ln\left(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1}\right).$$

Rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ řada konverguje absolutně, konverguje, či diverguje.

Nápověda: Pokud by se vám nedařilo vyřešit výše uvedený problém, soustřeďte se na řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \ln\left(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1}\right).$$

Pokud vyřešíte kompletně tento příklad získáte 3.5 bodu.

Řešení:

Označíme

$$a_n := \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right), \qquad c_n := \ln\left(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1}\right)$$

Zkoumejme chování jednotlivých posloupností:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{neexistuje},$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha > 0, \\ -\ln 2 & \text{pro } \alpha = 0, \\ -\infty & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}$$

Nutná podmínka konvergence: Není splněna pro $\alpha \leq 0$. Pro tato α tedy řada nekonverguje.

Absolutní konvergence: Platí

$$|a_n c_n| \leq |c_n| = \left|\ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha+1}\right)\right| \leq \frac{1}{n^\alpha+1} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Můžeme tedy použít klasický výsledek a vidíme, že řada konverguje absolutně pro $\alpha > 1$.

Neabsolutní konvergence: Ukážeme, že pro $\alpha \in (0,1]$ řada konverguje neabsolutně.

Nejříve pro a_n získáme

$$a_n = \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right) = \sin\left(n - \frac{n}{n+1}\right) = \sin n \cos\left(\frac{n}{n+1}\right) - \cos n \sin\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Nyní posloupnosti $\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)$ a $\sin\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konvergují monotónně k $\cos 1$ a $\sin 1$ a dle Abelova kritéria výsledná řada bude konvergovat, pokud konvergují řady $\sum \cos n c_n$ a $\sum \sin n c_n$. Protože $\cos n$ i $\sin n$ mají omezené posloupnosti částečných součtů, můžeme použít Dirichletova kritéria a ukázat konvergneci řad $\sum \sin n c_n$ a $\sum \cos n c_n$ za předpokladu, že ukážeme, že posloupnost c_n konverguje monotónně k nule. Protože pro $\alpha > 0$

$$\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha} \nearrow 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c_n \nearrow 0.$$

Můžeme tedy použít Dirichletova kritéria a vidíme, že řada $\sum a_n c_n$ konverguje.

Naopak, protože

$$2|a_n||c_n| \geq 2(a_n)^2|c_n| = -2\sin^2\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)c_n = -c_n + c_n\cos\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)$$

Nyní

$$\sum_n |a_n||c_n| \geq -\sum c_n + \sum \cos\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)c_n.$$

Řada $\sum c_n$ ale diverguje (pro $\alpha \in (0,1]$) a řada $\sum \cos\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)c_n$ konverguje, což se ukáže jako výše.

Shrnutí:

- $\alpha \leq 0$ - diverguje
- $\alpha \in (0,1]$ konverguje neabsolutně
- $\alpha > 1$ konverguje absolutně

[6] 4. Uvažujte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + Cxy,$$

kde C je reálný parametr. Určete globální extrémy, lokální extrémy a sedlové body funkce f.

Stačí uvažovat pouze případ $C \neq 1$. Pokud vyřešíte i případ $C = 1$, pak to vede k získání dvou bonusových bodů.

Řešení:

Nejdříve vypočteme všechny parciální derivace prvního a druhého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 2xy + y^2 + x + Cy,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + 2xy + x^2 + y + Cx,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x + 2y + 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y + 2x + 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y + C.$$

Hledejme body, ve kterých jsou první derivace nulové

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + Cy = 0,$$
$$y^2 + 2xy + x^2 + y + Cx = 0,$$

Odečtením od sebe získáme

$$(1 - C)(x - y) = 0.$$

Případ $C = 1$: V tomto případě jsou obě rovncice závislé a máme

$$0 = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = (x + y)^2 + (x + y) = (x + y)(x + y + 1).$$

A nulové body jsou tedy dvě přímky $\{(x, y); x + y = 0\}$, $\{(x, y); x + y = -1\}$. Určíme Hessián

$$H = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 1 & 2x + 2y + C \\ 2x + 2y + C & 2x + 2y + 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{pro } x + y = -1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{pro } x + y = 0. \end{cases}$$

V obou případech jde o matici semidefinitní a o extrémech neříká nic.

Zkusme tedy upravit funkci f pokud $C = 1$. Potom

$$f(x, y) = \frac{1}{3}(x + y)^3 + \frac{1}{2}(x + y)^2 = \frac{1}{6}(x + y)^2(2(x + y) + 3).$$

Nejdříve body typu $x = -y$: V tomto případě $f(x, -x) = 0$ a pro bod $(x + h_1, -x + h_2)$, což je bod v okolí $(x, -x)$ pro $|h_i| \ll 1$, máme

$$f(x+h_1, -x+h_2) = \frac{1}{6}(x+h_1-x+h_2)^2(2(x+h_1-x+h_2)+3) = \frac{1}{6}(h_1+h_2)^2(2(h_1+h_2)+3) \geq 0,$$

pokud $|h_1| + |h_2| \leq 1$. Tedy jde o bod lokálního minima.

Nyní body typu $x = -y - 1$: V tomto případě $f(x, -x-1) = \frac{1}{6}(-1)^2(-2+3) = \frac{1}{6}$. Pro bod $(x + h_1, -x + h_2 - 1)$, což je bod v okolí $(x, -x - 1)$ pro $0 \leq h_i \ll 1$, máme

$$\begin{aligned} f(x + h_1, -x + h_2 - 1) &= \frac{1}{6}(-1 + h_1 + h_2)^2(2(-1 + h_1 + h_2) + 3) \\ &= \frac{1}{6}(1 + (h_1 + h_2)^2 - 2(h_1 + h_2))(1 + 2(h_1 + h_2)) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(h_1 + h_2)^2 \left(-3 + 2(h_1 + h_2)\right) \leq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

pokud $|h_1| + |h_2| \leq 1$. Tedy jde o bod lokálního maxima.

Případ $1 \neq C$: V tomto případě víme, že $x = y$ a dosadíme

$$0 = x^2 + 2xy + y^2 + x + Cy = 4x^2 + (1 + C)x = x(4x + 1 + C)$$

Máme tedy dva body podezřelé z extrému a to $(0, 0)$ a $(-\frac{1+C}{4}, -\frac{1+C}{4})$. Vyčíslíme Hessovu matici

$$H = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 1 & 2x + 2y + C \\ 2x + 2y + C & 2x + 2y + 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & C \\ C & 1 \end{pmatrix} & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \\ \begin{pmatrix} -C & -1 \\ -1 & -C \end{pmatrix} & \text{pro } (x, y) = (-\dfrac{1 + C}{4}, -\dfrac{1 + C}{4}). \end{cases}$$

Případ $C = 1$ je diskutován už výše a tedy ho můžeme vyloučit.

Nyní tedy, pokud $C^2 < 1$, potom první matice je pozitivně definitní a bod $(0, 0)$ je bodem lokálního minima. Naopak druhá matice je indefinitní a $(-\frac{1+C}{4}, -\frac{1+C}{4})$ je sedlový bod. Obráceně pokud $C^2 > 1$, pak je první matice indefinitní a tedy $(0, 0)$ je sedlový bod a naopak bod $(-\frac{1+C}{4}, -\frac{1+C}{4})$ je bodem lokálního minima (pokud $C < -1$) a maxima (pokud $C > 1$).

Případ $C = -1$ nelze rohodnout na základě matice druhých derivací, navíc máme jen jeden podezřelý bod $(0, 0)$. Opět funkci upravíme $(C = -1)$

$$\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + Cxy = \frac{1}{3}(x + y)^3 + \frac{1}{2}(x - y)^2$$

a tedy vidíme, že pro $x > 0$

$$f(-x, -x) = -\frac{1}{3}x^3 < f(0, 0) < f(x, x)$$

a tedy bod $(0, 0)$ není bodem extrému a ani není sedlový bod.

Globální extrémy:
Protože

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, 0) = \pm\infty,$$

vidíme, že funkce nemá globální extrémy.

[5] 5. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{(x^2+4y^2)^{\alpha}}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je reálný parametr. Rozhodněte v závislosti na parametru α, zda funkce f:

- je spojitá v bodě $(0,0)$,
- existují všechny parciální derivace v bodě $(0,0)$,
- existuje totální diferenciál v bodě $(0,0)$.

Řešení:

Spojitost v bodě $(0,0)$**:**
Přepíšeme funkci do pozměněných polárních souřadnic

$$x = r\cos\theta, \quad y = \frac{r}{2}\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 4y^2 = r^2.$$

Potom

$$f(x,y) = \frac{x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{(x^2+4y^2)^{\alpha}} = \frac{r^{\frac{4}{3}} \cos^{\frac{4}{3}}\theta \cdot r^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}}\theta}{2^{\frac{2}{3}} r^{2\alpha}} = r^{2(1-\alpha)} \frac{\cos^{\frac{4}{3}}\theta \sin^{\frac{2}{3}}\theta}{2^{2/3}}.$$

Nyní, určit $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ je to samé jako $\lim_{r\to 0}$. Z výše uvedeného získáme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0_+} r^{2(1-\alpha)} \frac{\cos^{\frac{4}{3}}\theta \sin^{\frac{2}{3}}\theta}{2^{2/3}} = 0,$$

pouze pokud $\alpha < 1$. Funkce je tedy spojitá v bodě $(0,0)$ pro $\alpha < 1$.

Parciální derivace v bodě $(0,0)$**:**
Parciální derivaci spočítáme přímo podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Parciální derivace existují vždy, bez ohledu na α.

Totální diferenciál v bodě $(0,0)$**:**
Pokud totální diferenciál existuje pak musí být roven $\nabla f(0,0) = (0,0)$ a musí platit následující limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Z předchozí části víme, že $f(0,0) = 0$ a parciální derivace jsou nulové, takže se limita zjednoduší na

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+4y^2)^{\alpha}}.$$

Přechodem k souřadnicím

$$x = r\cos\theta, \quad y = \frac{r}{2}\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + 4y^2 = r^2.$$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+4y^2)^{\alpha}} = \lim_{r\to 0_+} \frac{r^{\frac{4}{3}} \cos^{\frac{4}{3}}\theta r^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}}\theta}{2^{\frac{2}{3}} r^{2\alpha}\sqrt{r^2\cos^2\theta + \frac{r^2}{4}\sin^2\theta}}$$

$$= \lim_{r\to 0_+} \frac{r^{1-2\alpha}\cos^{\frac{4}{3}}\theta \sin^{\frac{2}{3}}\theta}{2^{\frac{2}{3}-1}\sqrt{1+3\cos^2\theta}} = 0,$$

pokud $\alpha < \frac{1}{2}$. Funkce má totální diferenciál v bodě $(0,0)$ právě tehdy, když $\alpha < \frac{1}{2}$.