M. BULÍČEK & J. MÁLEK : MATEMATICKÁ ANALÝZA 1
NOFY151 , ZS 2019/20

Zahájení : přivítání
obecné informace
sylabus
nutné požadavky ke zkoušce

1. LIMITA, SPOJITOST, DERIVACE

1.1 ZÁKLADNÍ POJMY

▶ MATEMATIKA, JEJÍ ROLE VE VĚDĚ, JEJÍ STRUKTURA

Věda jako celek představuje systematický, racionální a empirický způsob poznávání objektů a procesů reálného světa. Věda se dělí (nejednoznačným a navzájem se stále více překrývajícím způsobem) na vědy

- přírodní (fyzika, biologie, chemie, ...)
- technické (inženýrství – aplikované vědy přírodní ...)
- lékařské či obecněji vědy o živé přírodě
- společenské (ekonomie, lingvistika, teologie, ... psychologie, ...

Vědní obory shrnují poznatky a usilují o porozumění souvislostí, vztahů, procesů, případně predikci či co nejlepší posouzení dané situace. Procesy, vztahy, souvislosti jsou popisovány verbálně a následně, ve snaze dosáhnout přesnějšího popisu, popisovány univerzálnějším jazykem – matematikou, která intuitivní mění v konzistentní.

$\boxed{\text{Matematika je jazykem (přírodních) věd}}$

Filosofie či počítačová věda jsou další vědní disciplíny s přesahem přes vědu jako celek.

Znám-li dobře češtinu, slovenštinu, angličtinu, ruštinu, či jakýkoliv jiný jazyk, což zahrnuje pravopis, gramatiku, výslovnost, slovní zásobu, literaturu,... mohu velmi dobře (verbálně či písemně) popisovat procesy (= život) kolem sebe.

Zcela podobně, čím lépe známe matematiku, tím lépe (přesněji) dokážeme popsat pozorované jevy, zpracovávat/interpretovat experimenty, hledat souvislosti a odhalovat věci jinak takřka neodhalitelné, zkrátka lépe rozumět dané "fyzikální" teorii.

MATEMATIKA (podobně jako jiný dorozumívací jazyk) má mnoho oblastí:

LOGIKA, ALGEBRA, GEOMETRIE, TEORIE MNOŽIN, MATEMATICKÁ ANALÝZA, ..., TOPOLOGIE,

které se často dále dělí.

Ačkoliv předmětem našeho kursu je matematická analýza (což je, zhruba řečeno, studium měnících se procesů, kde klíčovým pojmem je funkce), dnes se analýze věnovat nebudeme. Potřebujeme se nejdříve domluvit na základech matematické gramatiky (tj. logice) a zavést číselné množiny (spojené se základy algebry, teorie množin, teorie čísel).

ZÁKLADY LOGIKY

angl. sentence

Věty v běžné řeči nazýváme vyjádření (anglicky statements).
VÝROKEM rozumíme vyjádření, o kterém lze jednoznačně rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé.
Výrokům, které jsou pravdivé, přiřadíme hodnotu 1 (true T)
Výrokům, které jsou nepravdivé, přiřadíme hodnotu 0 (false F)

Výroky tak splňují dvě pravidla:
(i) dichotomie, které říká, že každý výrok musí mít hodnotu buď 0 nebo 1.
(ii) vyloučeného středu, které říká, že vyjádření, kterému nelze přiřadit jednoznačně hodnotu 0 nebo 1, není výrok.

VÝROKOVÝ POČET (tj. počítání s výroky) je založen na základních operacích s výroky popsaných v Tabulce 1.:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 1. Popis operací negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence.

Matematická tvrzení (výroky), zpravidla nazývané Věty (angl. Theorems), Lemmy, ...) jsou často ve tvaru implikace $\Rightarrow$ či ekvivalence $\Leftrightarrow$. Protože pravdivostní tabulka $A \Leftrightarrow B$ je stejná jako pravdivostní tabulka $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, tak se častá matematická tvrzení redukují na implikace $\Rightarrow$.

Protože (viz Tabulka 2) jsou výroky

- $A \Rightarrow B$
- $\neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg (A \wedge \neg B)$

z pohledu logiky stejné, neboť mají stejnou pravdivostní tabulku, tak rozlišujeme tři způsoby důkazu implikací:

PŘÍMÝ $A \Rightarrow B$
NEPŘÍMÝ $\neg B \Rightarrow \neg A$
SPOREM $\neg (A \wedge \neg B)$

které ilustrujeme na následujícím příkladě.

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg (A \wedge \neg B)$
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1

Tabulka 2 Pravdivostní tabulky výroků $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ a $\neg (A \wedge \neg B)$ jsou stejné.

Příklad Buď $n = 1, 2, 3, \ldots$ neboli $n \in \mathbb{N}$ (množina přirozených čísel). Dokážeme trojím způsobem, že platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ výrok: $\boxed{\text{Je-li } n^2 \text{ liché, pak } n \text{ je liché.}}$

Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné, ale pevné.

PŘÍMÝ DŮKAZ Protože n lze rozložit na součin prvočísel, máme $n = p_1 \cdots p_r$ a $n^2 = p_1^2 \cdots p_r^2$. Protože n^2 je liché, tak každé p_i^2, $i = 1, \ldots, r$, je liché. Odsud a ze skutečnosti, že p_i je prvočíslo plyne, že p_i je liché. Pak však n = součin lichých čísel je liché. ∎

NEPŘÍMÝ DŮKAZ Dokazujeme implikaci
Není-li n liché (tj. n je sudé), pak není n^2 liché (tj. n^2 je sudé)

Dk Je-li n sudé, pak $n = 2k$ a pak $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ tedy n^2 je sudé. ∎

$\boxed{\text{Důkaz SPOREM}}$ Předpokládáme, že $\boxed{n^2 \text{ je liché}}$ a zároveň $\boxed{n \text{ je sudé}}$ a chceme nalézt nepravdivý výrok, neboli <u>spor</u> (značíme ↯) s předpoklady. Je-li však n^2 liché a n sudé, pak n^2+n je <u>liché</u> a zároveň $n^2+n = n(n+1)$ je číslo sudé, neboť jedno z čísel n resp. $n+1$ musí být sudé. Tedy n^2+n má být liché i sudé, což je hledaný spor. ↯

Výše uvedený příklad je zajímavý ještě ze dvou důvodů.

$\boxed{\text{ZAPRVÉ}}$ Výrok „je-li n^2 liché, pak je n liché" závisí na parametru $n \in \mathbb{N}$. Lze jej tedy označit $V(n)$. Tvrzení, které jsme dokázali třemi způsoby, říká, že $V(n)$ má platit pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což zapisujeme: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)}$

Symbol $\forall$ čteme "pro všechna" se nazývá <u>obecný kvantifikátor</u>

Negace výroku

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$ tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$

zní

Existuje $n \in \mathbb{N}$ neplatí $V(n)$.

Tento výrok zapíšeme

$(\exists n \in \mathbb{N})\, \neg V(n)$

Symbol $\exists$ čteme "existuje" se nazývá <u>existenční kvantifikátor</u>. Chceme-li zapsat "existuje právě jeden" píšeme $(\exists!)$. Někdy <u>lze také vidět</u> symbol $\exists_1$, který značí totéž.

$\boxed{\text{ZADRUHÉ}}$ Výrok (nebo výroková forma = výrok s kvantifikátory) $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$ kde $V(n)$ je např. "je-li n^2 liché, pak n liché" je parametrizován množinou přirozených čísel, což je nejmenší induktivní množina v množině reálných čísel (viz později). Takové tvrzení lze dokazovat <u>principem indukce</u>: (α) ověříme, že $V(n_0)$ platí pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ (typicky $n_0 = 1$)

(β) ověříme, že platí implikace: Pokud $V(n)$ platí pro $\forall n \le n_0$, pak $V(n_0+1)$.

Pro ilustraci dokažme naše jednoduché tvrzení z Příkladu metodou <u>indukce</u>.

$\boxed{\text{Ad } (\alpha)}$ $V(1)$ tj. "je-li 1^2 liché, pak 1 liché" platí ✓

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$ Předpokládejme, že $V(n)$ platí $\forall\, n \le n_0$. Chceme dokázat $V(n_0+1)$ tj. "je-li $(n_0+1)^2$ liché, pak n_0+1 je liché"

Avšak: $\underbrace{(n_0+1)^2}_{\text{liché}} = n_0^2 + 2n_0 + 1 = (n_0-1)^2 + \underbrace{4n}_{\text{sudé}} \Rightarrow (n_0-1)^2$ je liché

$2n_0$ sudé, 1 liché

n_0^2 sudé

Pro n_0^2 nelze indukční předpoklad použít

pak z indukčního předpokladu n_0-1 je liché, a tedy n_0+1 je rovněž liché.

Můžeme (a budeme) mít výroky (výrokové formy), které závisí na více proměnných. Uvažujme pro jednoduchost situaci, kdy výrok závisí na dvou parametrech $x \in X$ a $y \in Y$, tj. $V(x,y)$. Pak jsou možné tyto kombinace kvantifikátorových forem:

1a $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$ — 1b $(\forall y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$

2a $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$ — 2b $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$

3a $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$ — 3b $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$

4a $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$ — 4b $(\exists y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$

Výroky Na a Nb se liší pořadím kvantifikátorů. U výroků se stejnými kvantifikátory na pořadí <u>nezáleží</u>, neboť je můžeme zapsat $(\forall (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$ resp. $(\exists (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$.
Tedy 1a a 1b jsou ekvivalentní a podobně 4a a 4b.

NAOPAK, 2a a 2b a podobně 3a a 3b ekvivalentní NEJSOU, a pořadí kvantifikátorů je <u>extrémně</u> <u>důležité</u> jak podtrhuje následující příklad.

<u>Příklad</u> M množina mužů, $Ž$ množina žen, $V(m,ž)$ označuje výrok "$ž$ je matkou m". Pak

$(\forall m \in M)(\exists ž \in Ž)\ V(m,ž)$ je pravdivý výrok

zatímco

$(\exists ž \in Ž)(\forall m \in M)\ V(m,ž)$ je výrok nepravdivý.

Cvičení: Napište si negace obou výroků a rozhodněte zda jsou pravdivé.

AXIOMATICKÉ ZAVEDENÍ ČÍSEL

Množina je soubor objektů. Pokud objekt x patří do množiny M, píšeme $x \in M$. Jestliže x nepatří do M, pak píšeme $x \notin M$. Množina M je neprázdná, píšeme $M \neq \emptyset$, pokud obsahuje aspoň jeden prvek. Symbol $\emptyset$ značí prázdnou množinu.

[Axiomatické zavedení reálných čísel] Předpokládáme (definitoricky), že existuje neprázdná množina $\mathbb{R}$, na které existují dvě operace $+, \cdot$ a relace uspořádání $<$ tak, že platí axiomy (A1) – (A4) (o sčítání)
(M1) – (M4) (o násobení)
D (spojující násobení a sčítání)
(O1) – (O4) (o uspořádání)
(Arch) (Archimedův axiom úplnosti)

Takovouto strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ budeme nazývat **množina reálných čísel**, značíme $\mathbb{R}$.

Axiomy budeme zavádět postupně. Jejich postupné zavedení nám umožní oddělit a zavést jiné číselné množiny.

Nejdříve zavedeme axiomy pro sčítání a násobení. Předpokládáme, že na $\mathbb{R}$ jsou dvě operace $+$ a $\cdot$ tak, že ($+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) platí:

(A1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) : (x+y)+z = x+(y+z)$ — ASOCIATIVITA

(A2) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : x+y = y+x$ — KOMUTATIVITA

(A3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ (prvek) $x+0 = 0+x = x$ — EXISTENCE NEUTRÁLNÍHO PRVKU

(A4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists$ prvek $-x)$ $x+(-x) = 0$ — EXISTENCE INVERZNÍHO (OPAČNÉHO) PRVKU.

Poznámka pod čarou: Axiomy (A1) – (A4) říkají, že $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova (neboli komutativní) grupa.

(M1) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})$ $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ ASOCIATIVITA

(M2) $(\forall x,y \in \mathbb{R})$ $x\cdot y = y\cdot x$ KOMUTATIVITA

(M3) $\exists$ prvek, označíme $1\in\mathbb{R}$, tak, že EXISTENCE NEUTRÁLNÍHO PRVKU

$\boxed{1\neq 0}$ a $\boxed{x\cdot 1 = 1\cdot x = x \quad \forall x}$

(M4) $(\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0)$ ($\exists$ prvek označme jej x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$) $x\cdot x^{-1}=1$ EXISTENCE INVERZNÍHO PRVKU

Obě operace spojuje distributivní axiom:

(D) $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})$ $(x+y)\cdot z = x\cdot y + y\cdot z$ DISTRIBUTIVITA

<u>Definice</u> (z algebry) Množina, jejíž objekty splňují $\boxed{\text{(A1)-(A4) a (M1)-(M4) a také (D)}}$ se nazývá <u>těleso</u> (angl. field)

Z definice axiomů plyne, že těleso musí obsahovat alespoň dva různé prvky: $0 \neq 1$ (neutrální prvky vzhledem k sčítání a násobení).

<u>Příklad 1</u> (tělesa, které má právě dva prvky 0, 1). Buď $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$, kde operace + a $\bullet$ jsou dány tabulkami:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\bullet$	0	1
0	0	0
1	0	1

Na příkladu vidíme, že

- axiomy tělesa ani nezaručují, že $1+1\neq 0$
- ani přirozená čísla nemusí být podmnožinou číselného tělesa.

<u>Příklad 2</u> Definujme $\mathbb{C} \overset{\text{df.}}{=} \{z=(z_1,z_2);\ z_1,z_2\in\mathbb{R}\}$ a zaveďme na $\mathbb{C}$ operace $\oplus$ a $*$ takto: $\forall\, z,u\in\mathbb{C}$

$$z\oplus u \overset{\text{df.}}{=} (z_1+u_1, z_2+u_2)$$

$$z * u = (z_1,z_2)*(u_1,u_2) \overset{\text{df.}}{=} (z_1u_1 - z_2u_2,\ z_1u_2+z_2u_1)$$

<u>Cvičení (DÚ)</u> Ukažte, že $(\mathbb{C},\oplus,*)$ je těleso.

Terminologie: Je-li $z=(z_1,z_2)$, pak z_1 .... reálná část z, z_2 .... imaginární část z. Je-li $x\in\mathbb{R}$, pak ztotožňujeme $x=(x,0)$ a také reálnou osu s $\mathbb{R}$ a chápeme $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Speciálně: $0=(0,0)$ a $1=(1,0)$. Definujme $\boxed{i=(0,1)}$ IMAGINÁRNÍ JEDNOTKA

Tvrzení $(\forall z\in\mathbb{C})$ $z=(z_1,z_2)$ lze psát ve tvaru $z=z_1+iz_2$.

Dk

$$\left.\begin{array}{l} z_1=(z_1,0) \\ iz_2=(0,1)*(z_2,0)=(0,z_2) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+iz_2=(z_1,0)+(0,z_2)=(z_1,z_2)$$ ∎

Tvrzení $i^2=-1$

Dk $i^2=i*i=(0,1)*(0,1)=(-1,0)=-1.$ ∎

Nyní přidáme k R další 4 axiomy: předpokládáme existenci binární relace $>$, která dává uspořádání reálných čísel a splňuje:

(O 1) Nastává právě jedna z relací pro $\forall x\in\mathbb{R}$: $x>0, x=0$ nebo $-x>0$.

(píšeme: $x>y \overset{df.}{=} x-y>0$, $x=y \overset{df.}{=} x-y=0$, ..)

(O 2) Je-li $x>y$, pak pro každé $z\in\mathbb{R}$: $x+z>y+z$

(odsud nutně $1+1\neq 0$) $\boxed{\text{Úmluva } 1>0}$

(O 3) Je-li $x>0$ a $y>0$, pak $xy>0$

(O 4) Je-li $x>y$ a $y>z$, pak $x>z$.

Zavedeme označení: $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R};\ x>0\}$ kladná čísla

$\mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R};\ -x>0\}$ záporná čísla

$x\leq y \overset{df.}{=} y>x$ nebo $y=x$

Cvičení Z axiomů plyne: Je-li $x<y$ a $z>0$, pak $xz<yz$

Je-li $x<y$ a $z<0$, pak $xz>yz$.

Tvrzení 1 (důležité) Buďte $a,b\in\mathbb{R}$ splňující

$(\forall\varepsilon>0)(a\leq b+\varepsilon)$. Pak $a\leq b$.

Dk Sporem: Nechť $(a\leq b+\varepsilon$ pro $\forall\varepsilon>0)\wedge b<a$. Uvaž $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$.

Pak $b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$. Tedy

a podle předpokladu $b+\varepsilon<a$ což je $\lightning$ s předpokladem.

Def. Řekneme, že podmnožina $P\subset\mathbb{R}$ je induktivní množina pokud platí:

- $1\in P$
- $x\in P\Rightarrow x+1\in P$

Příklady: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ jsou induktivní množiny

Def. (Přirozená čísla $\mathbb{N}$) Nejmenší induktivní množina v $\mathbb{R}$, ozn. $\mathbb{N}$.

Tvr. $\mathbb{N} = \{1, \underbrace{1+1}_{2}, \underbrace{2+1}_{3}, \dots\}$

Def.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{\pm k;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
  celá čísla (integers)
- $\mathbb{Q} = \{x;\ x = \frac{p}{q}$ kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}\}$

Cvičení
- $\mathbb{Q}$ splňuje všechny axiomy (A1)-(A4), (M1)-(M4), D a (O1)-(O4).
- Jsou-li $a, b \in \mathbb{Q}$, pak $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$. Navíc $\frac{a+b}{2}$ leží mezi a a b. Odsud plyne:
  Je-li dáno racionální číslo, pak nelze mluvit o nejbližším větším racionálním čísle.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iracionální čísla

Tvrzení 2 Je-li $m \in \mathbb{N}$ takové, že m nelze zapsat ve tvaru $m = k^2$, pak $\sqrt{m}$ je iracionální.

Dk vynecháme. Pro $m=2$ se důkaz dělá na SŠ. Důkaz si najdete ve zdrojích/literatuře. ∎

- čísla $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$, ale i π, e^{π}, e jsou iracionální.
- Ukážeme si později, že množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ obsahuje "řádově více prvků" než množina $\mathbb{Q}$.
- Iracionální čísla vznikla přirozeně při hledání řešení rovnice $x^2 = 2$.

Uspořádání $<$, $\leq$ nám umožňují zavést pojem intervalu.

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$(a,b) =^{df} \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ OTEVŘENÝ INTERVAL

$\langle a,b \rangle =^{df} \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ UZAVŘENÝ INTERVAL (někdy $[a,b] := \langle a,b\rangle$)

$(a,b\rangle =^{df} \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$

$\langle a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

(polouzavřené intervaly)

Zavádíme také symboly $+\infty$ a $-\infty$ (nepatří do $\mathbb{R}$):

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$ a podobně $\langle a, +\infty)$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$ a podobně $(-\infty, a\rangle$

Někdy: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ a $\{a\}$ je degenerovaný uzavřený interval (bod a).

__Geometrická interpretace $\mathbb{R}$__ $\mathbb{R}$ ztotožníme s přímkou, na které zvolíme dva různé body 0 a 1. Zpravidla $0 < 1$. Tím ~~zvolíme~~ definujeme měřítko a orientaci. Uspořádání $x < y$ má pak jednoduchou interpretaci: y je napravo od x.

Budujeme axiomatickou teorii reálných čísel. Zbývá nám zformulovat __axiom úplnosti__, který by měl oddělit reálná čísla od racionálních. K formulaci axiomu úplnosti budeme potřebovat pojmy: horní/dolní závora (neboli mez) a supremum/infimum.

__Def.__
- Buď S podmnožina $\mathbb{R}$. Je-li $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in S$ platí $x \leq b$, pak b je __horní závora S__ a řekneme, že S je __omezená shora__.
- Podobně: dolní závora S, omezenost zdola.
- Množina S je __omezená__ $\stackrel{df}{\equiv}$ (S je omezená shora) $\wedge$ (S je omezená zdola).

__Cvičení!__
- Je-li b horní závora, pak každé číslo větší než b je také horní závora.
- Je-li b __horní závora S__ a $b \in S$, pak b je __maximum S__ (neboli maximální prvek S) $b = \max\{x; x \in S\} = \max\limits_{x \in S}\{x\}$

__Def.__ Množina S je neomezená shora, nemá-li horní závoru.

__Příklady__ (i) $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ je neomezená shora, je však omezená zdola, 0 je dolní závora (a také jakékoliv číslo menší než nula je dolní závora). 0 však není minimem $\mathbb{R}^+$, neboť $0 \notin \mathbb{R}^+$.

(ii) $S = \langle 0, 1 \rangle$ je omezená shora i omezená zdola, je tedy omezená, dolní závora $0 \in S$, horní závora $1 \in S$. tedy $0 = \min S$ a $1 = \max S$.

(iii) $S = (0, 1)$ 1 je nejmenší horní závora, $1 \notin S$

(iv) $S = \{\frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}\}$ je omezená, $1 \in S$ je horní závora $0 \notin S$ je ~~největší~~ největší dolní závora.

Def. Číslo $b \in \mathbb{R}$ je supremum S pokud b je nejmenší horní závora S, tzn., (i) b je horní závora S

(ii) žádné číslo menší než b není horní závora S.

Píšeme $\boxed{b = \sup S}$. Je-li $b \in S$, pak $\sup S = \max S$.

Číslo $b \in \mathbb{R}$ je infimum S, pokud b je největší dolní závora S.

Píšeme $\boxed{b = \inf S.}$ Je-li $b \in S$, pak $\inf S = \min S$.

Axiom ÚPLNOSTI Každá neprázdná shora omezená podmnožina $S \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Důsledek Každá neprázdná zdola omezená množina $S \subset \mathbb{R}$ má infimum.

Dk: K S sestrojme množinu $-S \stackrel{df}{=} \{x \in \mathbb{R};\ -x \in S\}$. Pak $-S$ je omezená shora. Má supremum b. Položme $a := -b$. Pak a je infimum S, neb vlastnosti plynou z vlastností suprema b.

Tvrzení 3 (Aproximační vlastnost) Buď $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}$, $b := \sup S$. Pak pro $(\forall a < b)(\exists x \in S)$ $\quad a < x \le b$.

Dk: Z definice suprema plyne $x \le b$ pro $\forall x \in S$. Když $(\exists a < b)(\forall x \in S)$ $x \le a$, pak b není supremum S (nejmenší horní závora), neboť a by byla horní závora a $a < b$, což je spor. ∎

Tvrzení 4 (Aditivní vlastnost suprema) Buď $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $a = \sup A$, $b = \sup B$. Definujme $C \stackrel{df}{=} \{x + y;\ x \in A, y \in B\}$. Potom $\boxed{\sup C = a + b \ (= \sup A + \sup B)}$

Dk: Rovnost dokážeme tak, že platí $\boxed{\sup C \le a + b}$ a pak $\boxed{a + b \le \sup C + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0}$, což s pomocí Tvrzení 1 dá důkaz Tvrzení 4.

$\boxed{\le}$ pro $(\forall x \in A)(\forall y \in B)$ $\quad x + y \le a + b$. Tedy $a + b$ je horní závora C a $\sup C \le a + b$.

$\boxed{\ge}$ Buď ε libovolné, ale pevné. Z Tvrzení 3 plyne existence $x_0 \in A$ a $y_0 \in B$:
$$\begin{cases} a - \varepsilon < x_0 \le a \\ b - \varepsilon < y_0 \le b \end{cases}$$

Sečtením:
$$a + b - 2\varepsilon < x_0 + y_0 \le \sup C$$

Tedy $a + b \le \sup C + 2\varepsilon$ a dle Tvrz. 1: $a + b \le \sup C$. ∎

Tvrzení 5 $\mathbb{N}$ není omezená shora

(Dk) Sporem. Předpokládejme, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ je omezené shora. Pak z axiomu úplnosti plyne, že existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $\sup \mathbb{N} = a$. Protože $\mathbb{N}$ je induktivní, dle Tvrzení 3: k $a-1$ musí existovat $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a-1 < m_0 \leq a$. Pak však $m_0+1 \in \mathbb{N}$ a zároveň $a < m_0+1$. Tedy a nemůže být horní mez, a máme spor $\lightning$. ▨

Tvrzení 6 Buď $x \in \mathbb{R}$ libovolné. Pak $\exists m \in \mathbb{N}$ tak, že $x < m$.

(Dk) Kdyby takové m neexistovalo, pak x omezuje $\mathbb{N}$. Ale dle Tvrzení 5, $\mathbb{N}$ není shora omezené.

Tvrzení 7 (Archimédův princip) Buď $y \in \mathbb{R}$ libovolné a $\varepsilon > 0$ také libovolné ("velmi malé"). Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$m\varepsilon > y$$

(Dk) Použij Tvrzení 6 na $x = \frac{y}{\varepsilon}$.

Tvrzení 8 (Hustota racionálních čísel v $\mathbb{R}$) Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $x < r < y$.

[Neboli: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists r \in \mathbb{Q})\quad x < r < x+\varepsilon$]

(Dk) Protože $y - x > 0$ tak $\frac{1}{y-x} > 0$ a dle Tvrzení 6 existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\boxed{m > \frac{1}{y-x} \ (\bullet)}$ k číslům $mx, -mx \in \mathbb{R}$ existují, opět dle Tvrzení 6, čísla $m, m' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$mx < m \quad a \quad -mx < m'$$

Odtud

$$-\frac{m'}{m} < x < \frac{m}{m} \quad .$$

Existuje $m'' \in \mathbb{N}$ nejmenší takové, že $x < \frac{m''}{m}$. Pak hledané $r = \frac{m''}{m}$ neboť

$$x < \frac{m''}{m} = \frac{m''-1}{m} + \frac{1}{m} \leq x + \frac{1}{m} \overset{(\bullet)}{<} x + y - x = y$$ ▨

Tvrzení 9 Existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ tak, že $M^2 = 2$ (toto číslo pak označíme $\sqrt{2}$ nebo $2^{1/2}$)

(Dk) Uvažujme $S = \{x; (0 < x) \wedge (x^2 < 2)\}$. S je omezené shora (např. $x \in S \Rightarrow x < 2$); tedy 2 je horní závora pro S). Z axiomu úplnosti plyne existence $\sup S$, označme jej M.

Mohou, dle axiomu (O1) nastat tři případy: buď $M^2=2$ nebo $M^2>2$ nebo $M^2<2$. Ukážeme, že $\boxed{M^2<2}$ i $[M^2>2]$ vedou ke sporu s definicí suprema.

Nechť $M^2<2$. Uvažujme $M'=M+\frac{1}{n}$. Pak

$$(M')^2 = M^2+\frac{2M}{n}+\frac{1}{n^2} < M^2+\frac{2M}{n}+\frac{1}{n} = M^2+\frac{2M+1}{n}$$

Vidíme, že $(M')^2<2$ pokud $M^2+\frac{2M+1}{n}<2$ tj. pokud $n>\frac{2M+1}{2-M^2}$. Dle Tvrzení 6 však takové n existuje. Pak však $M'>M$ a $(M')^2<2$ a máme ↯ s tím, že M je supremem S, přesněji M není horní závora S.

Nechť $M^2>2$. Pak uvažme $M''=M-\frac{1}{n}$. Opět

$$(M'')^2 = M^2-\frac{2M}{n}+\frac{1}{n^2} > M^2-\frac{2M}{n}$$

a vidíme, že $(M'')^2>2$ pokud najdem n tak, že $M^2-\frac{2M}{n}>2$ tzn. pokud $n>\frac{2M}{M^2-2}$. Takové n však dle Tvrzení 6 existuje. Pak však $(M'')^2>2$ a $M''<M$, což dává spor se skutečností, že M je nejmenší horní závora. ▨

Tedy nutně $M^2=2$.

Tvrzení 10 $\mathbb{Q}$ nesplňuje axiom úplnosti.

(Dk) Sporem: Nechť $\mathbb{Q}$ splňuje axiom úplnosti. Pak $T=\{x\in\mathbb{Q}; x^2<2\}$ má v $\mathbb{Q}$ supremum: $\exists r\in\mathbb{Q}$ tak, že $\sup T = r$.

Dle (O1) mohou nastat tři možnosti: $r=\sqrt{2}$, $r>\sqrt{2}$, $r<\sqrt{2}$.

- Když $r=\sqrt{2}$, pak spor s Tvrzením 2: $\sqrt{2}$ je iracionální.
- když $r>\sqrt{2}$, pak dle Tvrzení 8 existuje $r'\in\mathbb{Q}$: $\sqrt{2}<r'<r$. Pak však r není supremum.
- když $r<\sqrt{2}$, pak opět dle Tvrzení 8 existuje $r''\in\mathbb{Q}$: $r<r''<\sqrt{2}$. což vede opět ke sporu s definicí suprema. ▨

Důležité pozorování $(\mathbb{C},\oplus,\circledast)$ je těleso. Nelze však na $\mathbb{C}$ zavést uspořádání splňující (O1)-(O4). Kdyby to bylo možné, pak $\boxed{\text{buď } i>0}$ $\boxed{\text{nebo } i<0}$. Když $i>0$, pak (O3) $i*i>i*0 \iff -1>0$ což po přičtení 1 dává $\boxed{0>1}$. Protože $-1>0$ tak $(-1)\cdot(-1)>(-1)\cdot 0$ implikuje $\boxed{1>0}$ a spor plyne z toho, že $0>1$ ∧ $1>0$. Podobně pro $i<0$.

▶ $\boxed{\text{ZÁKLADY TEORIE MNOŽIN, POJEM FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI}}$

Axiomatická teorie množin je abstraktní netriviální matematická disciplína. My se omezíme na intuitivní porozumění <u>množiny</u> coby <u>soubor objektů</u>, který bude zadán:

- výčtem (např. $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$)
- vlastností prvků ($M = \{k \in \mathbb{N};\ k \text{ liché} \wedge k < 12\}$)

Budeme se vyhýbat definicím, které jsou blízké Russellovu paradoxu*).

Zavedeme toto značení:

- $\boxed{A \subset B} \stackrel{\text{df}}{=} x \in A \Rightarrow x \in B$ (NEBO $(\forall x \in A)\ x \in B$)
- $\boxed{A = B} \stackrel{\text{df.}}{=} A \subset B \wedge B \subset A$
- $\boxed{A \cap B} \stackrel{\text{df}}{=} \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$
- $\boxed{A \cup B} \stackrel{\text{df}}{=} \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$
- $\boxed{A \setminus B} \stackrel{\text{df}}{=} \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$
- $\boxed{A \subsetneqq B} \stackrel{\text{df.}}{=} A \subset B \wedge \neg(A = B)$

Je-li P_α soubor množin indexovaný množinou A, tzn. $\alpha \in A$,

pak $\boxed{\bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha} \stackrel{\text{df.}}{=} \{x;\ (\exists \alpha_0 \in A)\ x \in P_{\alpha_0}\}$

a $\boxed{\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha} \stackrel{\text{df.}}{=} \{x;\ (\forall \alpha_0 \in A)\ x \in P_{\alpha_0}\}$

Platí: Pro A, B, C:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

Obecněji pro C, $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$:

$$\left[\begin{aligned} C \setminus \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in A} (C \setminus P_\alpha) \\ C \setminus \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in A} (C \setminus P_\alpha) \end{aligned}\right]$$

De Morganovy vzorce.

Dokažte sami nebo na cvičení.

---

*) Russellův paradox: Buď $Y = \{$soubor množin, které neobsahují sebe jako prvek$\}$

Otázka (Russellův paradox): patří nebo nepatří Y do Y?

Když $Y \in Y$, pak by tam dle definice Y nemělo patřit.

Když $Y \notin Y$, pak by tam dle definice Y mělo patřit.

Ejhle, paradox!

Def. Kartézský součin neprázdných množin A a B, značený $A \times B$, definujeme jako množinu uspořádaných dvojic (a,b), kde $a \in A$, $b \in B$:
$A \times B \overset{df.}{=} \{(a,b);\ a \in A \wedge b \in B\}$. Pokud $A = B$, pak $A \times A =: A^2$

Podobně: $M_1 \times \ldots \times M_k \overset{df.}{=} \{(z_1, \ldots, z_k);\ z_i \in M_i$ pro $i = 1, \ldots, k\}$.

Jsou-li $M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, pak $M^k = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{k\text{-krát}}$.

Def. Zobrazení ϕ z (množiny) A do (množiny) B (angl. Mapping from A to B) $\overset{df.}{=}$ předpis, který každému $a \in A$ přiřadí nejvýš jedno $b \in B$.

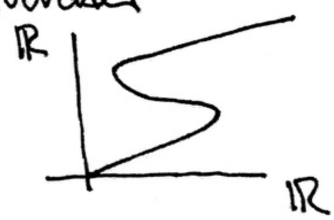
Složitěji: $\phi \subset A \times B$ je zobrazení pokud platí:

$\forall (a_1,b_1), (a_2,b_2) \in \phi: \ a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

$\Updownarrow$ —||— $: \ b_1 \neq b_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2$

Př. a) $\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + y^2 = 1\}$ není zobrazení

b) ϕ dané křivkou v obr. 1 není zobrazení



Def. Buď ϕ zobrazení A do B.

$D\phi := \{x \in A;\ (\exists y \in B)\ (x,y) \in \phi\}$ definiční obor (domain)

$R\phi := \{y \in B;\ (\exists x \in A)\ (x,y) \in \phi\}$ obor hodnot (codomain)

Místo $(x,y) \in \phi$ píšeme $y = \phi(x)$. Graf $\phi \overset{df.}{=} \{(x, \phi(x)), x \in D\phi\}$

|| Zobrazení, která zobrazují z číselných množin do číselných množin, jsou funkce

V tomto semestru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

později: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, ...

Jiné typy zobrazení: funkcionály, operátory, ...
(nejsme schopni tato zobrazení ani definovat (v této chvíli), později v letním semestru nebo 2. rok.)

Další důležité pojmy k zobrazením.

Buď $\Phi : A \to B$ (nebo $\Phi \subset A \times B$) zobrazení z A do B.

Řekneme, že

Φ zobrazuje A do B $\overset{df}{=}$ $A = D_\Phi$

Φ zobrazuje z A do B $\overset{df}{=}$ $D_\Phi \subset A$

Φ zobrazuje A na B $\overset{df}{=}$ $R_\Phi = B$ (Φ je na nebo surjektivní)

Φ zobrazuje A do B $\overset{df}{=}$ $R_\Phi \subset B$

Řekneme, že Φ je prosté (angl. injective) na množině $A \subset D_\Phi$

pokud platí: $(\forall x_1, x_2 \in A)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$

$\left(\Longleftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)\ \Phi(x_1) = \Phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ načrtnutá na obr. 2 není prostá na $(0, \infty)$:

Buď Φ prosté zobrazení A na B. Pak lze definovat

$\Phi^{-1} : B \xrightarrow{na} A$ předpisem $\Phi^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = \Phi(x)$

$$\left[\begin{array}{c} (y, x) \in \Phi^{-1} \subset B \times A \\ \Updownarrow \\ (x, y) \in \Phi \subset A \times B \end{array} \right]$$

a platí:
- $D_{\Phi^{-1}} = R_\Phi$
- $R_{\Phi^{-1}} = D_\Phi$
- Φ^{-1} je prosté
- $(\Phi^{-1})^{-1} = \Phi$

Dokažte, rozmyslete sami.

Zobrazení Φ^{-1} se nazývá zobrazení inverzní k Φ.
(INVERZNÍ ZOBRAZENÍ Φ^{-1})

Zobrazení Φ, které je surjektivní (na) a injektivní se nazývá bijektivní (vzájemně jednoznačné).
1−1

Def. (složeného zobrazení) Buď $\phi : A \to B$ a $\psi : B \to C$ a nechť $R_\phi \cap D_\psi \neq \emptyset$. Zobrazení $\psi \circ \phi$ nazveme **složené zobrazení** pokud:

- $D_{\psi\circ\phi} = \{ x \in D_\phi ;\ \phi(x) \in D_\psi \}$
- $(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x)) \quad \forall x \in D_{\psi\circ\phi}$

Příklad (a) Deformace houby (tělesa v $\mathbb{R}^3$)

b) $(\sin x)^2 = f_1 \circ f_2$ kde $f_2(x) := \sin x : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$
a $f_1(y) = y^2 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$.

Je-li $\phi : D_\phi \xrightarrow{na} R_\phi$ prosté, pak $\phi \circ \phi^{-1} = \text{Identita}\big|_{R_\phi}$ zatímco $\phi^{-1} \circ \phi = \text{Identita}\big|_{D_\phi}$

Buď $\phi : A \to B$ a $C \subset A$, pak $\phi[C] \stackrel{df}{=} \{ \phi(x) ;\ x \in C \}$ obraz C

—||— a $D \subset B$, pak $\phi^{-1}[D] = \{ x \in A ;\ \phi(x) \in D \}$ vzor (předobraz) D

Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že

f je omezená v $\mathbb{R}$ (nebo v D_f) $\stackrel{df}{=}$ $f[\mathbb{R}]$ (nebo $f[D_f]$) je omezená množina

f je sudá $\stackrel{df}{\equiv}$
- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D_f$.

f je lichá $\stackrel{df}{\equiv}$
- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

f je T-periodická $\stackrel{df}{=}$ $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
pro $T \in \mathbb{R}$
$T > 0$

• ZÁKLADNÍ FUNKCE, JEJICH INVERZE, ABSOLUTNÍ HODNOTA

(i) Funkce $\boxed{x \mapsto x}$ se nazývá identita, či identické zobrazení, $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Prosté a shoduje se s inverzním zobrazením.

(ii) Pro $\boxed{x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}}$ definujeme $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-krát}}$

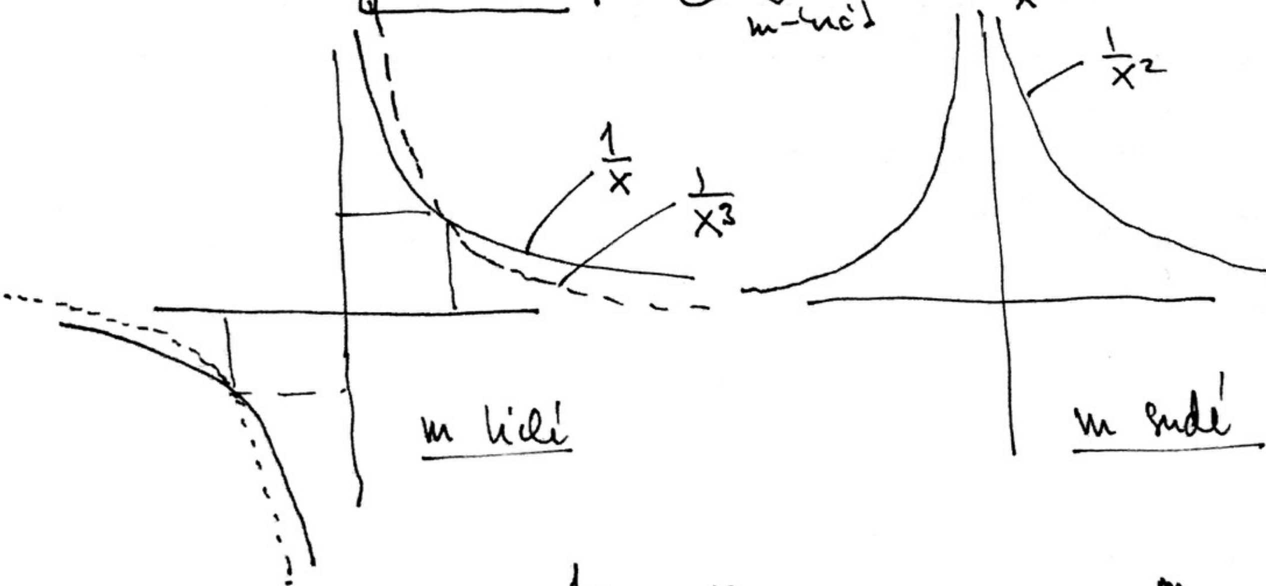
Lze uvažovat funkce $\boxed{x \mapsto x^n}$ definované v $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \xrightarrow{na} \begin{cases} \langle 0, +\infty) & n \text{ sudé} \\ \mathbb{R} & n \text{ liché} \end{cases}$

Skutečnost, že tyto funkce opravdu zobrazují na $\langle 0, \infty)$ resp. $\mathbb{R}$ vede k řešení úlohy: pro dané $y \in \langle 0, \infty)$ (resp. $\mathbb{R}$) nalézt (!) $x \in \mathbb{R}$ tak, že $x^n = y$

n liché   n sudé

K $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ $\exists!\ x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak, že $x \cdot x^{-1} = 1$

Uvažme $\boxed{x \to x^{-n}} := \underbrace{x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{n\text{-krát}} = \frac{1}{x^n}$



n liché   n sudé

<u>Platí</u>:
n liché $\quad x^{\frac{1}{n}} : \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ je inverzní k x^n (lichá f.)
n sudé $\quad x^{\frac{1}{n}} : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ je inverzní k x^n (sudá f.)
n liché $\quad x^{-\frac{1}{n}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{na} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je inverzní k x^{-n} (lichá f.)
n sudé $\quad x^{-\frac{1}{n}} : (0, \infty) \xrightarrow{na} (0, \infty)$ — " — k x^{-n}. (sudá f.)

Kombinací výše uvedených funkcí lze definovat:

$\boxed{x \longmapsto x^{\frac{p}{q}} \quad \text{kde } p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}}$ $\boxed{p, q \text{ nesoudělné}}$

Přičemž definiční obor se liší v závislosti na sudosti/lichosti q a znaménku p:

$$D_{x^{\frac{p}{q}}} = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } q \text{ sudé},\ p>0 \\ (0, +\infty) & \text{pro } q \text{ sudé},\ p<0 \\ \mathbb{R} & \text{pro } q \text{ liché},\ p\geq 0 \\ \mathbb{R}\setminus\{0\} & \text{pro } q \text{ liché},\ p<0 \end{cases}$$

(iii) $x \longmapsto |x|$, kde $|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x\geq 0 \\ -x & \text{pro } x<0 \end{cases}$ zobrazuje $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}_0^+$

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

není prosté.

geometrický význam: vzdálenost od počátku

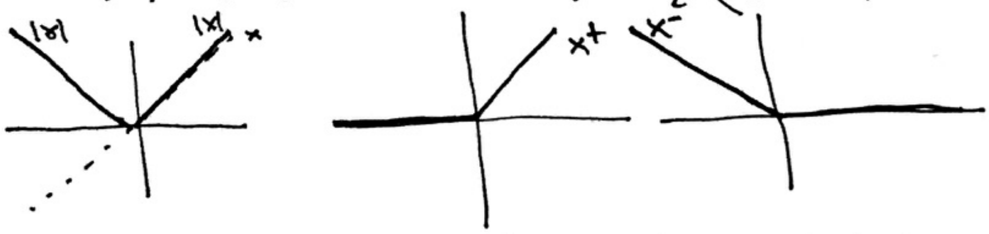
Definujme $x^+ := \max\{0, x\}$

$x^- := \max\{0, -x\}$

Pak $x^+ = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ a $x^- = \begin{cases} 0 & \text{pro } x\geq 0 \\ -x & \text{pro } x<0 \end{cases}$ a

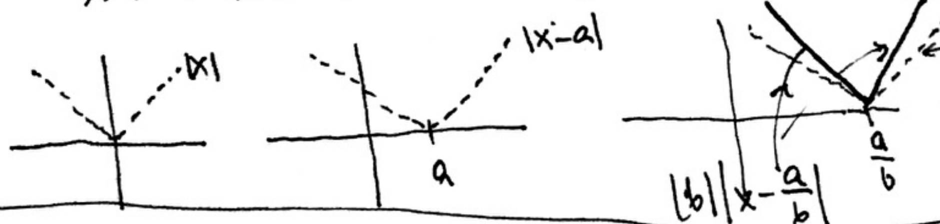
Tedy

$$\left.\begin{aligned} x &= x^+ - x^- \\ |x| &= x^+ + x^- \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^+ &= \tfrac{1}{2}(|x| + x) \\ x^- &= \tfrac{1}{2}(|x| - x) \end{aligned}$$



$x \longmapsto |x-a| : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}_0^+$ vzdálenost od bodu a

$x \longmapsto |bx-a| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \quad = |b|\left|x - \frac{a}{b}\right|$ ..... $|b|$ krát vzdálenost od $\frac{a}{b}$.



Tvrzení 11 Je-li $a\geq 0$, pak platí: $|x|\leq a \iff -a\leq x\leq a \iff x\in\langle -a, a\rangle$

(Dk) 2. ekvivalence plyne z definice intervalu. Zbývá dokázat 1. ekvivalenci. Platí

$\boxed{(\star) \qquad -|x| \leq x \leq |x|}$ neboť $|x| = x$ nebo $|x| = -x$

$\boxed{\Rightarrow}$ z $(\star)$ plyne $\underline{-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a}$ a tvrzení plyne z podvlneného.

$\boxed{\Leftarrow}$ Protože $-a\leq x\leq a$, tak pro $x\geq 0$: $-a \leq |x| \leq a$
a pro $x\leq 0$: $-a \leq -|x| \leq a$ $\Big\} \Rightarrow |x|\leq a$. ■

Tvrzení 12 (Δ-nerovnost a její důsledky)

(1) $(\forall x,y \in \mathbb{R})$ $\quad |x+y| \le |x|+|y|$

(2) $(\forall a,b \in \mathbb{R})$ $\quad |a-b| \ge \big||a|-|b|\big|$

(3) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})$ $\quad |x-y| \le |x-z|+|z-y|$

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Napišme si (☆) pro x a y. Sečtením

$$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y| .$$

$$\Downarrow \text{ Tvrzení 11}$$

$$|x+y| \le |x|+|y| .$$

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Z (1) plyne $|x|-|x+y| \ge -|y|$ $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Volme $(x=a) \wedge (x+y=b) \Rightarrow y=b-a \Rightarrow |a|-|b| \ge -|b-a|$

Volme $(x=b) \wedge x+y=a \Rightarrow y=a-b \Rightarrow |b|-|a| \ge -|a-b| = |b-a|$

$$|b|-|a| = -(|a|-|b|)$$

$\Rightarrow |b-a| = |a-b| \ge \pm(|a|-|b|)$.

Z obou nerovností plyne tvrzení.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ $\quad |x-y| = |\underbrace{x-z}_{\xi} + \underbrace{z-y}_{\zeta}| \le |x-z|+|z-y|$ □

$\le$: (1) aplikované na ξ a ζ (zeta, xi)

(iv) $z \in \mathbb{C}$: (z_1,z_2)

$z \longmapsto z$ identita $\quad \mathbb{C} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C}$ prosté

$z \longmapsto \bar{z}$ $\quad \mathbb{C} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C}$ prosté

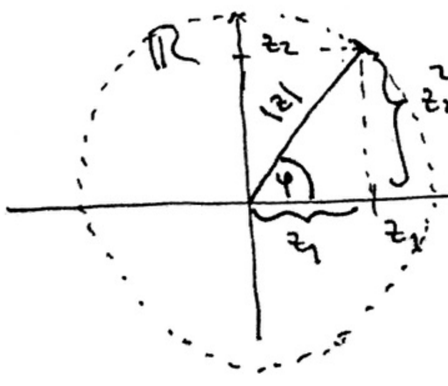
$z \longmapsto |z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$

$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,\infty)$ není prosté

např. pro $\forall z \in \mathbb{C}$ taková, že $z_1^2+z_2^2 = \rho^2$

platí: $|z| = \rho$.

$z \in \mathbb{C} \longmapsto (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$ zobrazení je prosté a na (v tomto smyslu lze $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ ztotožnit)



Z této geometrické interpretace plyne $z_1 = |z|_{\mathbb{C}} \cos\varphi$

$z_2 = |z|_{\mathbb{C}} \sin\varphi$

kde φ se nazývá (hodnota) argument(u) čísla z.

Tvrzení 13 (Vlastnosti $|\cdot|_{\mathbb{C}}$) Platí

(1) $|(0,0)|_{\mathbb{C}} = 0$ a $|z| > 0$ pro $\forall z \neq (0,0)$

(2) $|\underbrace{zu}_{z*u}|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{C}} |u|_{\mathbb{C}}$ a $\left|\frac{z}{u}\right|_{\mathbb{C}} = \frac{|z|_{\mathbb{C}}}{|u|_{\mathbb{C}}}$ pokud $u \neq 0$

(3) $|(x,0)|_{\mathbb{C}} = |x|$

Dk $\boxed{\text{Ad (1) a (3)}}$ přímo z definice $|\cdot|_{\mathbb{C}}$.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Protože $zu = (z_1u_1 - z_2u_2) + i(z_1u_2 + z_2u_1)$ tak

$$|zu|_{\mathbb{C}}^2 = z_1^2u_1^2 + z_2^2u_2^2 + z_1^2u_2^2 + z_2^2u_1^2 = (z_1^2+z_2^2)(u_1^2+u_2^2) = |z|_{\mathbb{C}}^2 |u|_{\mathbb{C}}^2$$

Druhé tvrzení plyne z již dokázaného, : $z = \frac{z}{u} u \Rightarrow |z|_{\mathbb{C}} = \left|\frac{z}{u}\right|_{\mathbb{C}} |u|_{\mathbb{C}}$. ▨

Tvrzení 14 Pro $u, z \in \mathbb{C}$: $|u+z|_{\mathbb{C}} \le |u|_{\mathbb{C}} + |z|_{\mathbb{C}}$ $\left(\overset{\text{Tvrzení 12}}{\Rightarrow} |a-b|_{\mathbb{C}} \ge \big||a|_{\mathbb{C}} - |b|_{\mathbb{C}}\big| \ \forall a,b \in \mathbb{C}.\right)$

Dk pro $u = z = 0$ triviální.

$$(LS)^2 = (u_1+z_1)^2 + (u_2+z_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + z_1^2 + z_2^2 + 2u_1z_1 + 2u_2z_2 = |u|_{\mathbb{C}}^2 + |z|_{\mathbb{C}}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{z}$$

$$(PS)^2 = |u|_{\mathbb{C}}^2 + |z|_{\mathbb{C}}^2 + 2|u|_{\mathbb{C}}|z|_{\mathbb{C}}$$

Vidíme, že stačí ukázat $\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{z} \le |u|_{\mathbb{C}}|z|_{\mathbb{C}}}_{(*)}$ kde $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{z} = (z_1, z_2)$

Tato $\le$ platí obecněji:

Tvrzení 15 (Cauchy-Schwartzova $\le$ v $\mathbb{R}^k$) $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

Pro $\vec{a} \in \mathbb{R}^k, \vec{b} \in \mathbb{R}^k$: $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|_{\mathbb{R}^k} |\vec{b}|_{\mathbb{R}^k}$ (CS)

kde $|\vec{a}|_{\mathbb{R}^k} \overset{\text{df.}}{=} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{1/2}$

(*) je speciální případ (CS) kde $\mathbb{C}$ ztotožníme s $\mathbb{R}^2$.

Dk Vždy $\sum_{i=1}^{k} (a_i x + b_i)^2 \ge 0$. Odtud plyne

(**) $Ax^2 + 2Bx + C \ge 0$ kde $A = \sum_{i=1}^{k} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$ a $C = \sum_{i=1}^{k} b_i^2$

Když $A = 0$, pak $\vec{a} = \vec{0}$ a (CS) plyne snadno.
Pokud $A \neq 0$, volme $x = -\frac{B}{A}$ a dostáváme

$$\frac{B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + C \ge 0 \iff \underline{B^2 \le AC}$$ což po odmocnění dává (CS). ▨

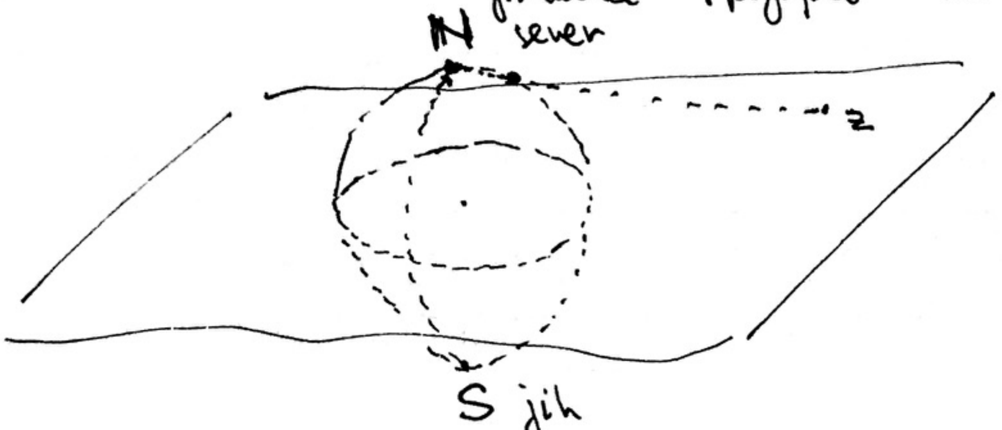
Vlastnost (3) Tvrzení 13 ukazuje, že $|\cdot|$ je speciální případ $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ a ta je speciální případ $|\cdot|_{\mathbb{R}^k}$. Často budeme psát ve všech případech $|b|$, a o tom, kterou normu myslíme rozhodne zda $b \in \mathbb{R}$ nebo $b \in \mathbb{C}$ nebo $b \in \mathbb{R}^k$.

▶ $\mathbb{C}^*, \mathbb{R}^*$ ROZŠIŘUJÍCÍ $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$. Pojem OKOLÍ BODU

Uvažujme ještě jiný způsob zobrazení $\mathbb{C}$ pomocí stereografické projekce: $\mathbb{C} \to S_2 \setminus \{N\}$ → jednotková sféra bez severního pólu.

je definována tak, že

každému $z \in \mathbb{C}$ přiřadí bod na sféře, kterým prochází přímka spojující **N** s A. (viz obrázek)



<u>Otázky</u> Kam se zobrazí počátek? kam jednotková kružnice tzn. $\{x \in \mathbb{C}; |x|_{\mathbb{C}} < 1\}$
Kam $\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$. Jaké body se zobrazí na [illegible]?

Vidíme:

$\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \xrightarrow{na}$ dolní (jižní) polokouli

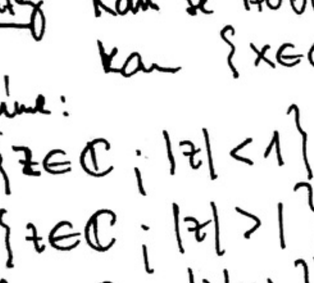
$\{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\} \xrightarrow{na}$ horní (severní) polokouli

$\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \xrightarrow{na}$ rovník.

Nyní zavedeme pojem <u>(úplného a prstencového) okolí</u> bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a budeme se dívat kam se tato okolí zobrazí. Pro $\varepsilon > 0$

$U_\varepsilon(z_0) \overset{df.}{=} \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0|_{\mathbb{C}} < \varepsilon\}$ <u>úplné ε-ové okolí z_0</u>

$P_\varepsilon(z_0) \overset{df.}{=} \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ <u>prstencové ε-ové okolí z_0</u>



.... bod $z_0 \notin P_\varepsilon(z_0)$.

Platí: <u>$U_\varepsilon(z_0) = P_\varepsilon(z_0) \cup \{z_0\}$</u>

$\underbrace{\{z \in \mathbb{C}; |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}}$ se zobrazí na <u>oblast kolem severního pólu</u>

Tuto množinu nazveme okolím $\boxed{\infty}$ (symbol bez znaménka + či −) → nekonečno.

Definujme $\boxed{\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}}$. Pak stereografická projekce zobrazuje $\mathbb{C}^*$ na S_2.

Máme-li $x_0 \in \mathbb{R}$ (lze se na něj podívat jako bod $z_0 = (x_0, 0)$, uvažovat pro něj ε-okolí a to pak zúžit na $\mathbb{R}$)

definujme

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$$P_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

Protože na $\mathbb{R}$ (na rozdíl od $\mathbb{C}$) máme uspořádání $>$, lze mluvit/definovat pravé a levé okolí:

$$U_\varepsilon^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x - x_0 \geq 0 \wedge x - x_0 < \varepsilon\} = \langle x_0, x_0 + \varepsilon)$$

$$P_\varepsilon^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x - x_0 > 0 \wedge x - x_0 < \varepsilon\} = (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

$$U_\varepsilon^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x - x_0 \leq 0 \wedge x - x_0 < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0\rangle$$

$$P_\varepsilon^-(x_0) = \qquad = (x_0 - \varepsilon, x_0).$$

Definujme $\boxed{\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}} = \langle -\infty, +\infty\rangle$

Je smysluplné zavést následující operace na $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$:

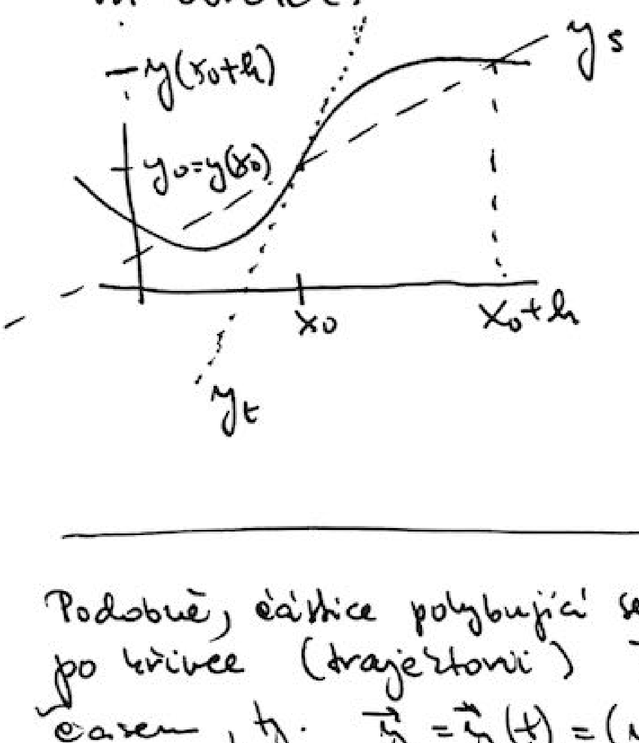
	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{C}^*$
(a)	$x \in \mathbb{R}$: $x + (+\infty) = +\infty$, $x - (+\infty) = -\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$	$z \in \mathbb{C}$: $z + \infty = z - \infty = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$
(b)	$x > 0$: $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$; $x < 0$: $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$	$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$: $z * \infty = \infty$, $\frac{z}{0} = \infty$
(c)	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty = -\infty \cdot -\infty = +\infty \cdot +\infty$; $(-\infty) - (-\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	$\infty + \infty = \infty$
(d)	$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $(a, +\infty)$ … okolí $+\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$; $(-\infty, a)$ … okolí $-\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$; $U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$, $U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$	
	KAŽDÁ MNOŽINA MÁ V $\mathbb{R}^*$ SUPREMUM / INFIMUM $\leftarrow$	Je-li $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$, pak $\inf A \leq \sup A$. Je-li $A = \emptyset$, pak $\sup A = -\infty$, $\inf A = +\infty$.

VM.

1.2. LIMITA A SPOJITOST

Definice limity tvoří základ předmětu matematická analýza. Jejímu porozumění je třeba věnovat zvýšenou pozornost. Trvalo takřka století od Newtona a Leibnize než-li matematika dospěla k přesnému uchopení a popsání pojmu limita. Pojem limity je všude kolem nás. Potřebujeme jej při sečítání nekonečných řad, pro výpočet ploch a objemů (vymezených funkcemi), pro určení tečen v bodech dané křivky, při hledání maximálních či minimálních (extremálních) hodnot, při stanovení okamžité rychlosti (zrychlení) částic či těles.

Uvažujme dvě úlohy. Mějme nejdříve křivku, která je v okolí bodu (x_0, y_0) popsána funkcí $y = y(x)$. Cílem je napsat (určit) rovnici tečny ke dané křivce v bodě (x_0, y_0), viz obrázek.



Sečna (přímka) procházející body $(x_0, y(x_0))$ a $(x_0+h, y(x_0+h))$ má tvar

$$\boxed{y_s(x) = y(x_0) + \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}(x - x_0)}$$

Tečna y_t je pak dána rovnicí

$$y_t(x) = y(x_0) + k(x - x_0), \text{ kde}$$

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}.$$

Podobně, částice pohybující se po křivce (trajektorii) $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ parametrizovanou časem, tj. $\vec{y} = \vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ má v čase t_0 okamžitou rychlost $\vec{v}(t_0)$ danou jako limita podílu typu

$$\frac{\text{relativní vzdálenost}}{\text{relativní čas}} = \frac{\vec{y}(t_0+\Delta) - \vec{y}(t_0)}{\Delta t}. \quad \left[\leftarrow \text{výraz } \frac{0}{0}\right]$$

dráha/změna polohy

Tzn. $\vec{v}(t_0) = (y_1'(t_0), y_2'(t_0), y_3'(t_0)) = (\dot{y}_1(t_0), \dot{y}_2(t_0), \dot{y}_3(t_0))$

Uvažujme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nebo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (tzn. reálné a komplexní funkce reálné proměnné), přičemž případ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lze vnímat jako speciální případ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (neb $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + i f_2(x)$)

Limita je číslo z $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$; v takovém případě mluvíme o <u>vlastní</u> limitě. Může se stát, že limita je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, nebo ∞ ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$). Pak mluvíme o <u>nevlastní</u> limitě.

Pojem limity je <u>lokální</u> vlastnost, tzn. týká se chování funkce v okolí jediného bodu $x_0\in\mathbb{R}^*$. Je-li $x_0\in\mathbb{R}$ mluvíme o limitě <u>ve vlastním bodě</u>, je-li $x_0=+\infty$ nebo $x_0=-\infty$ pak se jedná o limitu v <u>nevlastním bodě</u>.

Pokud limita existuje (vlastní/nevlastní), pak je chování funkce v okolí $x_0\in\mathbb{R}^*$ kontrolované. Pokud limita nebude existovat, pak je chování funkce v okolí uvažovaného bodu podezřelé.

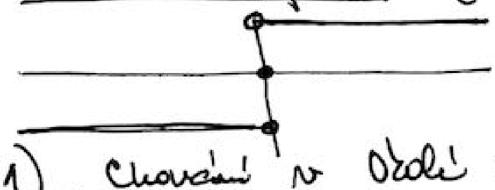
<u>Příklady</u> ① $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Zajímá nás chování v okolí $a>0$. Pokud x se blíží k a, pak x^2 se blíží k a^2

NEBOLI: $f(x)$ je "libovolně blízko" a^2, pokud x "dostatečně blízko" a.

② $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ $\quad D_f := \mathbb{R}\setminus\{a\}$ $\quad$ a $f(x)=x+a$ pokud $x\neq a$

Fce f není v a definována. To však pro pojem limity nevadí, neb zkoumáme chování v okolí a a pro x <u>blízká</u> a je $f(x)$ <u>blízká</u> $2a$.

③ $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ $\quad$ <u>znaménková funkce</u> (sign fumction) FUNCTION



V okolí $x\neq 0$ se chová funkce jako fce konstantní ($+1$ nebo -1). Chování v okolí $x=0$ je podezřelé.

④ $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$ $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{a\}$. Pro $x\neq a$ je chování v.k. V okolí $x=a$ je chování ještě podezřelejší.

DÚ: Zkoumejte chování posledních dvou funkcí pro x jdoucí k 0 resp. k a zprava/zleva

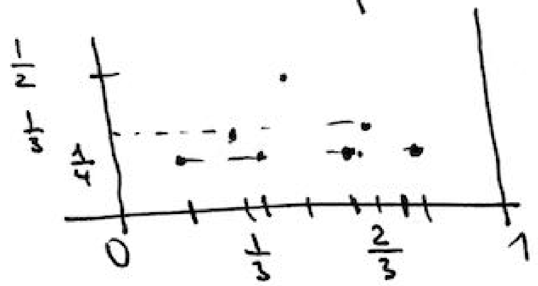
⑤ Dirichletova fce $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Chování v okolí každého (tzn. libovolného) bodu je podezřelé, proč?

⑥ Riemannova funkce $R: \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R}$

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \wedge x = \frac{p}{q} \quad p,q \text{ nesoudělná} \end{cases}$$



Motto: Těžko v Definici, lehko ve Větách
(Těžce na cvičišti, lehce na bojišti)

Def. (obecná definice limity) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$) a $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je limitou f pro x jdoucí k x_0, píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že všechna x z prstencového δ-okolí x_0 se zobrazí do ε-ového okolí A:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \overset{\text{df.}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\underbrace{(\forall x \in P_\delta(x_0))\ f(x) \in U_\varepsilon(A)}_{\Updownarrow \atop f[P_\delta(x_0)] \subset U_\varepsilon(A)}$$

[V definici je schována implicitně podmínka, že $P_\delta(x_0) \subset D_f$.]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left([P_\delta(x_0) \subset D_f] \wedge [f(P_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)] \right)$$

[Omezíme se (až do odvolání) na vlastní limity ve vlastních bodech (pro jednoduchost a lepší pochopení)

Pak existuje přehršle ekvivalentních tvarů definice limity:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

$$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|\leq\varepsilon)$$

$$\iff (\exists \varepsilon_1>0)(\forall\, 0<\varepsilon\leq\varepsilon_1)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

$$\iff (\exists K>0)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<K\varepsilon)$$

Tyto tvary občas využijeme v důkazech.

$\boxed{\text{Ad Př. 2}}$ Ukažme z definice, že $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$.

Nepřítel nám dodá $\varepsilon>0$ malé, libovolné. Po dodání je toto ε pro nás pevné. K němu hledáme $\delta>0$ tak, aby platilo

(*) $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-2a|<\varepsilon$.

Avšak $f(x)=x+a$ pro $\forall x: 0<|x-a|<\delta$ a tak $|f(x)-2a| = |x-a|$.

Vidíme, že hledané δ lze zvolit $\delta=\varepsilon$ (a nebo číslo menší než ε) a pak (*) platí. ▨

$\boxed{\text{Ad Př. 1}}$ Chceme ukázat, že $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ ($a>0$ pro jednoduchost (sudá fce))

Opět obdržíme $\varepsilon>0$ nepříjemně malé, ale pevné.

Hledáme $\delta>0$ tak, aby platilo

$$x\in(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\} \Rightarrow x^2=f(x)\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$$

Pozoruj: $x^2<a^2+\varepsilon \iff x\in\left(-\sqrt{a^2+\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon}\right)$

$x^2>a^2-\varepsilon \iff x\in\left(-\infty,-\sqrt{a^2-\varepsilon}\right)\cup\left(\sqrt{a^2-\varepsilon},+\infty\right)$ NAKRESLI SI OBRÁZEK

Tedy: je-li $x\in\left(\sqrt{a^2-\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon}\right)$ pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$

$\Updownarrow$

(•) je-li $x\in\left(a-a+\sqrt{a^2-\varepsilon},\, a-a+\sqrt{a^2+\varepsilon}\right)$, pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$

Označme $\delta_1 := a-\sqrt{a^2-\varepsilon}$ a $\delta_2 := \sqrt{a^2+\varepsilon}-a$, pak

(•) $\iff$ je-li $x\in(a-\delta_1, a+\delta_2)$, pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$ ▨

Hledané δ volím jako $\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Pozn. $\min\{\delta_1,\delta_2\} = \delta_1$.

Věta 1 (O jednoznačnosti limity neboli O smysluplnosti/korektnosti definice limity)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\exists P_\delta(x_0) \subset D_f$. Pak existuje nejvýš jedna limita f v bodě x_0.

Dk Sporem. Kdyby existovaly dvě limity A_1 a A_2, tak platí:

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1$

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2$

(c) $A_1 \neq A_2$

Položme $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{2}$.

Pak z (a) plyne: $\exists \delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in P_{\delta_1}(x_0)$ $|f(x) - A_1| < \varepsilon$

A z (b) plyne: $\exists \delta_2 > 0$ —"— $\forall x \in P_{\delta_2}(x_0)$ $|f(x) - A_2| < \varepsilon$

Pro $x \in P_{\delta_1}(x_0) \cap P_{\delta_2}(x_0)$:

$$0 < |A_1 - A_2| = |A_1 \underbrace{- f(x) + f(x)}_{=0} - A_2| \leq |f(x) - A_1| + |f(x) - A_2|$$

$$< 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

a z podtrženého plyne spor. ☑

Def. (Jednostranné limity) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Nechť $A \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je limitou $f(x)$ pro x jdoucí k x_0 $\left\{\begin{matrix}\text{zprava}\\ \text{zleva}\end{matrix}\right\}$, píšeme $\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\end{matrix}\right\}$,

jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna

$$\left\{\begin{matrix} x \in P_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta) \\ x \in P_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0) \end{matrix}\right\} \text{ platí } |f(x) - A| < \varepsilon$$

Symbolicky:

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(x) = A \overset{\text{df.}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta^\pm(x_0))(|f(x) - A| < \varepsilon)$$

$\boxed{\text{Ad Př. 3}}$ $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} = -1$, což snadno ověříte z definice fce sgn a z definice jednostranné limity.

Q: Existuje $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$?

Odpověď dává (mimojiné) následující věta.

Věta 2 Platí: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff \left(\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A\right) \wedge \left(\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A\right)$

Slovy: limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ existuje a rovná se A právě když existují jednostranné limity $f(x)$ pro $x\to x_0+$ a pro $x\to x_0-$ a rovnají se A.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ je jednodušší. ROZMYSLETE.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\varepsilon>0$ dáno, hledám δ. Z existence jednostranných limit však víme, že k danému $\varepsilon>0$ existují $\delta_1>0$ a $\delta_2>0$ tak, že

- $x\in(x_0,x_0+\delta_1) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$
- $x\in(x_0-\delta_2,x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Pro $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ máme: $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$,
Q.E.D. ■

$\boxed{\text{Ad Př. 3}}$ Ačkoliv $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x$ a $\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x$ existují, tak $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x \neq \lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x$. ■

Vidíme, že limita fce vždy nemusí existovat. Výrok "limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ existuje" znamená: $(\exists A\in\underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))(f(x)\in U_\varepsilon(A))$

Negací získáme výrok "limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ neexistuje", který má tvar:

$(*)$ $(\forall A\in\underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in P_\delta(x_0))\ \boxed{f(x)\notin U_\varepsilon(A)}\ \vee (x\notin D_f)$

$\boxed{\text{Ad Př. 5}}$ Ukažme, že $\lim\limits_{x\to 1/2} D(x)$ neexistuje (neexistují ani $\lim\limits_{x\to 1/2\pm} D(x)$).

Použijeme $(*)$.
$\boxed{\text{Pro } A\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}}$, zvolme $\varepsilon<\min\{|A|,|A-1|\}$. Pak dokonce pro $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $f(x)\notin U_\varepsilon(A)$ (neboť $f(x)=0$ nebo $f(x)=1$).
Je-li $A=\{0\}$ nebo $A=1$, pak zvolme $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$. Je-li $A=0$, pak v libovolném $P_\delta(\frac{1}{2})$ leží $x_r\in\mathbb{Q}$ pro které však $f(x_r)=1\notin U_\varepsilon(0)$. Podobně, je-li $A=1$, pak v libovolném $P_\delta(\frac{1}{2})$ leží iracionální číslo $x_{ir}\in P_\delta(\frac{1}{2})$ pro které $f(x_{ir})=0\notin U_\varepsilon(1)$.

$\boxed{\text{Ad Př. 6}}$ Q: Existuje $\lim\limits_{x\to 1/2} R(x)$?

Řešitelé mohou odevzdat zpracované čitelné řešení přednášejícímu.

Věta 3 (Jak počítat limitu komplexní fce) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. $[f(x) = f_1(x) + i f_2(x)]$

Platí: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1 + i A_2 \iff \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A_1\right) \wedge \left(\lim_{x \to x_0} f_2(x) = A_2\right)$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ $\varepsilon > 0$ dáno.

Víme: $(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0))$ $\underbrace{|(f_1(x) - A_1) + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}}}_{= |f(x) - A|_{\mathbb{C}}} < \varepsilon$

Tvrzení plyne ze skutečnosti

$$\left.\begin{array}{l}|z_1| \\ |z_2|\end{array}\right\} \leq \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = |z|_{\mathbb{C}}, \text{ což implikuje } \begin{array}{l}|f_1(x) - A_1| < \varepsilon \\ |f_2(x) - A_2| < \varepsilon\end{array}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Nyní potřebujeme odhadnout $|f(x) - A|_{\mathbb{C}}$ pomocí $|f_1(x) - A_1|$ a $|f_2(x) - A_2|$.

Avšak

$$\begin{aligned}|f(x) - A|_{\mathbb{C}} &= |(f_1(x) - A_1) + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} \\ &\leq |(f_1(x) - A_1)|_{\mathbb{C}} + |i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} \\ &= |f_1(x) - A_1| + |f_2(x) - A_2|\end{aligned}$$ ◪

Proč tato nerovnost stačí k důkazu implikace?

Věta 4 Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Pak $\lim |f(x)|_{\mathbb{C}} = A$

Dk plyne z nerovnosti $\left| |f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}} \right| \leq |f(x) - A|_{\mathbb{C}}$ ◪
viz Tvrzení 12 a 14.

[**Definice** Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že
f je omezená na A $\equiv (\exists K > 0)(\forall x \in A)\ |f(x)|_{\mathbb{C}} \leq K$
(všechny funkční hodnoty $f(x)$ pro $x \in A$ leží v kouli o poloměru K)]

[Následující dvě věty říkají, zhruba řečeno, že pokud má f v x_0 limitu, pak se f chová v okolí x_0 kulturně.]

Věta 5 Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ má v x_0 limitu, pak existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že f je omezená na $P_\delta(x_0)$. Neboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A_{\in \mathbb{C}} \Rightarrow (\exists K > 0)(\exists P_\delta(x_0))(\forall x \in P_\delta(x_0))\ |f(x)|_{\mathbb{C}} \leq K.$$

Dk K $\varepsilon = 1$ $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x \in P_\delta(x_0)$ $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} < 1$. Pak

$$|f(x)|_{\mathbb{C}} = |\underbrace{f(x) - A} + A|_{\mathbb{C}} \underset{\Delta\text{-ner.}}{\leq} |f(x) - A|_{\mathbb{C}} + |A|_{\mathbb{C}} < |A|_{\mathbb{C}} + 1 =: K,$$

což dává tvrzení. ◪

Věta 6 Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$. Pak existuje $P_\delta(x_0)$: $\forall x \in P_\delta(x_0)$ je $|f(x)|_{\mathbb{C}} \geq \frac{|A|}{2} > 0$.

Dk: K $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ $(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0))$ je $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}$.

Avšak, $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} \geq \left| |f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}} \right| = \pm (|f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}})$ speciálně

$$|f(x) - A|_{\mathbb{C}} \geq |A|_{\mathbb{C}} - |f(x)|_{\mathbb{C}}$$

Odtud $|f(x)| \geq |A|_{\mathbb{C}} - |f(x) - A|_{\mathbb{C}} \geq |A|_{\mathbb{C}} - \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2} = \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}$. ∎

Věta 7 (O limitě $+, -, \cdot, \div$) Buď $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$.
Pak platí:
(α) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

(β) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = AB$

(γ) Je-li $B \neq 0$, pak $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

[Tvrzení (α), (β), (γ) obsahují dvě informace: (i) limity součtu, rozdílu, součinu a podílu existují, a (ii) víme i čemu se rovnají.

Dk: $\boxed{\text{Ad } (\alpha)}$ $|f(x) + g(x) - (A+B)| \leq \underbrace{|f(x) - A|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - B|}_{\frac{\varepsilon}{2}}$

$\boxed{\text{Ad } (\beta)}$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)(g(x) - B) + (f(x) - A)B| \\ &\leq |f(x)(g(x) - B)| + |(f(x) - A)B| \\ &\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq K} \underbrace{|g(x) - B|}_{\frac{\varepsilon}{2K}} + \underbrace{|f(x) - A|}_{\frac{\varepsilon}{2|B|}} |B| < \varepsilon \end{aligned}$$

dle V5 $\to \leq K$

$(\Leftarrow \lim g(x) = B)$ $(\Leftarrow \lim f(x) = A)$

$x \in P_{\delta_1}(x_0)$ $x \in P_{\delta_2}(x_0)$ $x \in P_{\delta_3}(x_0)$

$\boxed{\text{Ad } (\gamma)}$ Dle (β) stačí ukázat:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right|_{\mathbb{C}} = \left| \frac{g(x) - B}{g(x) B} \right|_{\mathbb{C}} = \frac{|g(x) - B|_{\mathbb{C}}}{|g(x)|_{\mathbb{C}} |B|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{|B|_{\mathbb{C}}^2} \underbrace{|g(x) - B|_{\mathbb{C}}}_{< \frac{\varepsilon |B|_{\mathbb{C}}^2}{2}} < \varepsilon.$$

Dle V6 totiž víme, že $|g(x)|_{\mathbb{C}} \geq \frac{|B|_{\mathbb{C}}}{2}$ na jistém okolí x_0

A existence $\lim g(x) = B$.
∎

Příklad Z konstrukce fcí $x^m, \frac{1}{x^m}$ pozorujeme, že z vlastnosti

$\lim_{x\to a} x = a$ (tohle je snadné dokázat/ověřit z definice)

ve spojení s větou o limitě součinu plyne

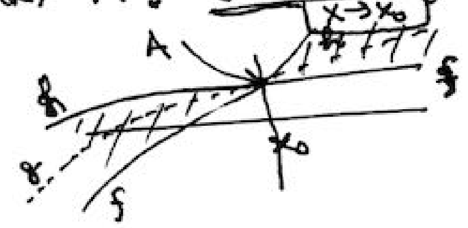
$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x\cdot x = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$ a obecněji

$\lim_{x\to a} x^m = a^m$ a $\lim_{\substack{x\to a\\ a\neq 0}} x^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Věta 8 (sendvičové tvrzení o dvou strážnících) Buď $x_0\in\mathbb{R}$ a $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x\in P_\delta(x_0)$$

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$. Pak $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.



Q: Proč jsou zobrazení f,g,h do $\mathbb{R}$ (a nikoliv do $\mathbb{C}$)?

Dk: Víme

$$A-\varepsilon \le f(x) \le A+\varepsilon \quad \forall x\in P_{\Delta_1}(x_0)$$
$$A-\varepsilon \le h(x) \le A+\varepsilon \quad \forall x\in P_{\Delta_2}(x_0)$$

Pro $x\in P_\delta(x_0)\cap P_{\Delta_1}(x_0)\cap P_{\Delta_2}(x_0)$:

$$A-\varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le A+\varepsilon \Rightarrow |g(x)-A|<\varepsilon \quad \blacksquare$$

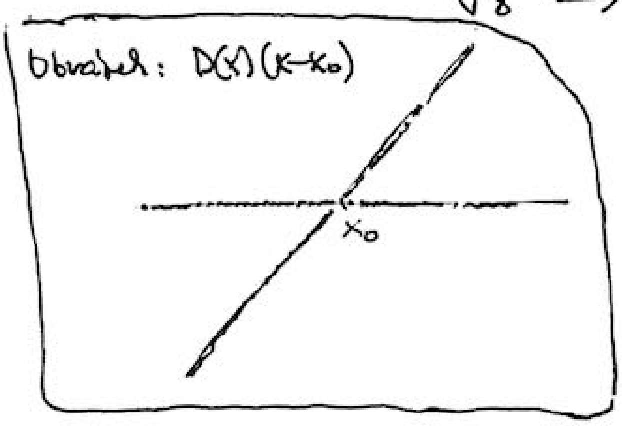
Př. 6 Víme, že $\lim_{x\to x_0} D(x)$ neexistuje pro libovolné x_0. Avšak

$\lim_{x\to x_0} D(x)(x-x_0) = 0$.

Vskutku: $-|x-x_0| \le D(x)(x-x_0) \le |x-x_0|$

pro $x\to x_0$: $-|x-x_0| \downarrow 0$, $|x-x_0| \downarrow 0$

$$V8 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} D(x)(x-x_0) = 0.$$



Uvažujme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ (\mathbb{R})$. Nechť

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$.

Následující příklad ukazuje, že tyto předpoklady ještě nestačí aby $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = B$.

<u>Příklad 7</u> Buď $f(x) = D(x)(x-x_0)$ a $g(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y=0 \\ y^2 & \text{pro } y\neq 0 \end{cases}$

Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$

ale $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x)$ <u>neexistuje</u> neboť v libovolném $P_\delta(x_0)$

- existují body, kde $g(f(x)) = 1$ $(x\in\mathbb{Q})$
- existují body, kde $g(f(x)) = (x-x_0)^2$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

Q: K zamyšlení: která fce to kazí? g nebo f?

<u>Věta 9</u> (1. věta o limitě složené fce) Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Nechť: (i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$; (ii) $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ a (iii) $(\exists P_{\delta^*}(x_0))(\forall x\in P_{\delta^*}(x_0))$ $f(x)\neq A$

Pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = B$

Dk Chceme ukázat, že

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ \ g(f(x))\in U_\varepsilon(B)$.

Přitom víme:

(1) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\Delta>0)(\forall y\in P_\Delta(A))\ \ g(y)\in U_\varepsilon(B)$

(2) $(\forall\Delta>0)(\exists\tilde{\delta}>0)(\forall x\in P_{\tilde{\delta}}(x_0))\ \ f(x)\in U_\Delta(A)$

(3) $(\exists\delta^*>0)(\forall x\in P_{\delta^*}(x_0))\ \ f(x)\neq A$

Z (2) a (3) ihned plyne volbou $\delta := \min\{\tilde{\delta},\delta_*\}$

(4) $(\forall\Delta>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ \ f(x)\in P_\Delta(A)$

což ve spojení s (1) dává výrok, který jsme chtěli ukázat. ▨

Věta 9 naznačuje, že problematická funkce je funkce f a že je třeba se vyvarovat situacím, kdy f má v libovolně malém okolí x_0 body, které se zobrazují fcí f do A. To je však také proto, že z předpokladů Věty 9 neplyne žádná informace o chování fce g v bodě A.
Nyní si ukážeme, jaká vlastnost g v bodě A stačí k tomu aby $\boxed{\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)}$ aniž bychom požadovali předpoklad (iii) Věty 9.

Podíváme-li se na podmínky (1) a (2) v důkazu předchozí věty, vidíme, že problém, proč podmínky (i) a (ii) nestačí na existenci $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$, spočívá v tom, že

- y v (1) lze brát jen z prstencového okolí A

zatímco

- $f(x)$ v (2) patří do úplného okolí A

To jsme v předchozí větě ošetřili existencí okolí x_0, jehož body se nemohly zobrazit do A zobrazením f.
Problém lze však ošetřit i jinak (a tato varianta bude pro nás častokrát vhodnější). Můžeme totiž požadovat, aby hodnoty $g(y)$ pro úplné okolí bodu A patřily do $U_\varepsilon(B)$, neboli aby také $g(A) \in U_\varepsilon(B)$ (pro $\forall \varepsilon>0$). To však znamená, že $g(A) = B$, neboli místo (ii) budeme požadovat

$$\lim_{y\to A} g(y) = g(A)$$

což říká, že (nejenže) $\lim_{y\to A} g(y)$ existuje, ale navíc se tato limita rovná $g(A)$. Této vlastnosti se říká spojitost g v bodě A.
Z našich úvah plyne tedy:
Věta 10 (2. věta o limitě složené funkce) Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Nechť (i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a (ii) $\lim_{y\to A} g(y) = g(A)$ (tj. g je spojitá v A). Pak

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(A) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

Dk Chceme ukázat: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ |g(f(x))-g(A)|<\varepsilon$

Přitom z (ii) plyne (*) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\Delta>0)(\forall y\in U_\Delta(x_0))\ |g(y)-g(A)|<\varepsilon$

a z (i) plyne (**) $(\forall\Delta>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ (f(x)\in U_\Delta(x_0))$,

což dává tvrzení neboť k danému $\varepsilon>0$, najdu z (*) $\Delta>0$ tak, že (*) platí. K tomuto $\Delta>0$, aplikuji (**) a najdu $\delta>0$ tak, že (**) platí. Tzn. pro $x\in P_\delta(x_0)$ jsou $f(x)\in U_\Delta(x_0)$ a dle (*) musí platit pro $y=f(x)$ $|g(f(x))-g(A)|<\varepsilon$. ∎

Ad Příklad 7 Buď $f(x)=D(x)(x-x_0)$ a nechť nyní $g(y)=y^2$ $\forall y\in\mathbb{R}$.

Víme, že $\lim_{y\to 0} g(y)=0=g(0)$ a tak $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(0)=0$.

Def. (SPOJITOST FUNKCE V BODĚ x_0) Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $x_0\in\mathbb{R}$.

Řekneme, že f je *spojitá v x_0* $\overset{\text{def}}{\equiv} \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ tzn.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x: |x-x_0|<\delta)(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in U_\delta(x_0))(f(x)\in U_\varepsilon(f(x_0)))$$

Příklady

(a) $f(x)=x$ či $f(x)=kx$ $(k\in\mathbb{R})$ jsou spojité v každém $x\in\mathbb{R}$

(b) $f(x)=C\in\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ je — " — — " — .
(C … konstanta)

Obojí je jednoduché ověřit přímo z definice spojitosti. ∎

Definice spojitosti vyžaduje (implikuje):
(1) f je definována v x_0
(2) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a je vlastní
(3) tato $\lim_{x\to x_0} f(x)$ se rovná $f(x_0)$

Navíc (2) vyžaduje, aby f byla definována na okolí x_0.

Neboli:
- není-li f definována v x_0 $\Rightarrow$ f není spojitá v x_0
- jsou-li $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ různé nebo nevlastní $\Rightarrow$ f není spojitá v x_0
- je-li $\lim_{x\to x_0} f(x)$ různá od $f(x_0)$ $\Rightarrow$ f není spojitá v x_0.

Příklady

c) Protože $f(x) = x^2$ je sudá, a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a^2 = f(a)$, tak x^2 je spojitá v každém $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ v $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ není v a spojitá

e) $$f(x) \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x \neq a \\ 2a & x = a \end{cases}$$ je spojité v každém $x \in \mathbb{R}$.

zatímco
$$f(x) \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x \neq a \\ \ell & x = a \end{cases}$$
kde $\ell \neq 2a$. není spojitá v a.

f) • Dirichletova fce není spojitá v žádném $x \in \mathbb{R}$.

• $x \mapsto (x - x_0)D(x)$ je spojitá v x_0
není spojitá ($\Leftrightarrow$ je nespojitá) v $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$.

g) Platí: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0 \quad \text{pro } \forall x_0 \in (0,1)}$

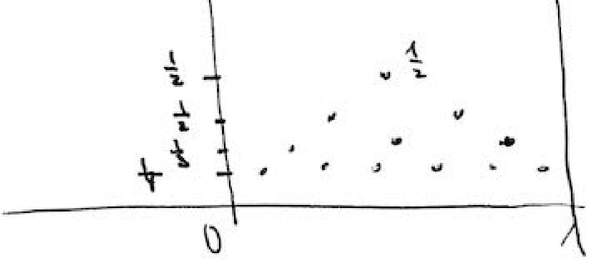
Odtud Riemannova fce je spojitá $\forall x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}|_{(0,1)}$
je nespojitá $\forall x \in \mathbb{Q}|_{(0,1)}$.

Dk $\boxed{}$ Buď $x_0 \in (0,1)$ lib. a $\varepsilon > 0$ lib., pevné.
Hledáme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P_\delta(x_0)$ bude $|R(x)| < \varepsilon$ ($|R(x)| = R(x)$)

Avšak k danému $\varepsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{N}:\ n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n}$

Pak však jen pro konečný počet bodů x_i platí $R(x_i) \geq \varepsilon$.
Počet bodů závisí na ε, označme jej $N(\varepsilon)$*). Definujme
$$\delta = \min\{|x_0 - x_i|;\ i \in \{1, \dots, N(\varepsilon)\}\}.$$
Pak určitě pro $x \in P_\delta(x_0)$ platí $R(x) < \varepsilon$.

*) Určitě $N(\varepsilon) < n^2$, viz obrázek.



Věta 11 Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou spojité v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak fce $\boxed{f \pm g, fg}$ jsou spojité v x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, pak fce $\boxed{\frac{f}{g}}$ je spojitá v x_0.
Konečně, je-li $f: \mathbb{R} \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a je-li f spojitá v x_0 a g spojité v $f(x_0)$, pak $\boxed{g \circ f}$ je spojitá v x_0.

Dk . . Plyne z Věty 7 a Věty 10.

Příklady (1) Pro $n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) \stackrel{df.}{=} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

kde $a_i \in \mathbb{C}$.

Pak P_n se nazývá polynom nejvýše n-tého stupně.
Je-li $a_n \neq 0$, pak P_n je polynom stupně n.

Z Věty 11 a předchozích úvah plyne P_n je spojitá fce v každém $x \in \mathbb{R}$.

(2) Buďte $P_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $Q_m: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dva polynomy.
Pak $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se nazývá racionální fce definovaná na $D_R := \{x \in \mathbb{R}; Q_m(x) \neq 0\}$

a dle Věty 10 a Př (1) je R spojitá v $x \in D_R$.

1.3 DERIVACE

Def. Buď $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$ a nechť existuje $U(x)\subset D_f$.

- Řekneme, že

f má v x derivaci $\stackrel{df.}{\equiv}$ existuje $\displaystyle\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

Tuto limitu značíme $\boxed{f'(x) \text{ nebo } \frac{df}{dx}(x).}$

- Řekneme, že

f má v x derivaci $\left\{\begin{matrix}\text{zprava}\\ \text{zleva}\end{matrix}\right\}$, značíme $\left\{\begin{matrix}f'_+(x)\\ f'_-(x)\end{matrix}\right\}$, existují-li $\left\{\begin{matrix}\lim_{z\to x+}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\\ \lim_{z\to x-}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\end{matrix}\right.$

Důležité pozorování (a) Označme $h := z-x$. Pak $z = x+h$ a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} D_h f(x) \quad \text{kde}$$

$$D_h f(x) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

diferenční podíl f v bodě x.

(b) Také se někdy používá $\Delta f(x) = f(x+h)-f(x)$ a $\Delta x = h$. Pak $\Delta f(x) = f(x+\Delta x)-f(x)$ a máme

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

Pozor Δ zde značí přírůstek. Neplést s Laplaceovým operátorem (bude za týden).

My se značení v (b) budeme vyhýbat!

Má-li funkce v x_0 derivaci, pak je v x_0 určitě [illegible] jak plyne z následující věty.

Věta 12 ($f'(x) \Rightarrow f$ je spojitá v x). Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, ~~..~~ Pokud $f'(x)$ existuje, pak je f spojitá v x.

(Dk) Protože $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existuje, tak dle Věty 5 je $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ omezená v jistém okolí 0. Tedy $(\exists\delta>0)(\exists M>0)$ tak, že pro $(\forall h, 0\neq|h|\le\delta)$ $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| < M$, neboli

$|f(x+h)-f(x)| < M|h|$, což implikuje spojitost f v x. □

Věta 13 (o derivaci součtu, součinu, podílu) Nechť existují $f'(x), g'(x)$. Pak platí:
(1) ex. $(f+g)'(x)$ a $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
(2) ex. $(fg)'(x)$ a $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(3) Je-li navíc $g(x) \neq 0$, pak ex. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$ a $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Protože

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a limity výrazů vpravo existují, tak dle Věty 6 o limitě součtu dostáváme tvrzení (1). Samozřejmě jsme využili definici derivace.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Postupujeme podobně. Protože

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) g(x+h) + f(x)\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$$

a limity diferenčních podílů vpravo existují a dle Věty 12 $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, tak s pomocí Věty 6 dostáváme tvrzení (2).

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Stačí ukázat, že $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$. Proč? *)

Avšak

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \, \frac{1}{g(x+h)\,g(x)}$$

a opět využijeme Věty 6 o limitě podílu, Větu 12 o spojitosti g v x, atd. ▨

Věta 14 (o derivování složené funkce neboli řetízkové pravidlo)
Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takové, že $f'(x)$ a $g'(f(x)) := g'(y)\big|_{y=f(x)}$ existují. Pak

(▲) $$(g \circ f)'(x) = \left[g(f(x))\right]' = g'(f(x))\, f'(x)$$

ŘETÍZEK

Obecněji, pokud $h(x) := f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x))))) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5)(x)$, pak

$$h'(x) = f_1'\big(f_2(f_3(f_4(f_5(x))))\big)\, f_2'\big(f_3(f_4(f_5(x)))\big)\, f_3'\big(f_4(f_5(x))\big)\, f_4'\big(f_5(x)\big)\, f_5'(x).$$

$$= f_1'(z)\Big|_{z=(f_2\circ f_3\circ f_4\circ f_5)(x)} \cdot f_2'(w)\Big|_{w=(f_3\circ f_4\circ f_5)(x)} \cdot f_3'(\xi)\Big|_{\xi=(f_4\circ f_5)(x)} \cdot f_4'(t)\Big|_{t=f_5(x)} \cdot f_5'(x)$$

$\boxed{\text{MÍSTO 5-ti fcí LZE VZÍT JAKÝKOLIV KONEČNÝ POČET.}}$

*) Protože na výraz $f \cdot \frac{1}{g}$ mohu poté použít již dokázaný vztah (2) o derivování součinu: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\,\frac{1}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g} - f\,\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

$\boxed{\text{Dk} \mid \text{věty } 14}$ Chceme ověřit (▲). Opět vyjdeme z jednoduché úvahy pro diferenční podíl:

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: (*)$$

Problém máme se jmenovatelem $f(x+h) - f(x)$; nevíme zda je nenulový. Kdyby byl, pak označme $y := f(x+h) - f(x) \Leftrightarrow f(x+h) = f(x) + y$ a $(*)$ lze přepsat jako

$$(*) = \frac{g(f(x)+y) - g(f(x))}{y} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

což už by dalo výsledek neb pro $h \to 0$ platí $f(x+h) - f(x) = y \overset{\neq 0}{\to} 0$ a dle V6 a z existence limit vpravo bychom dostali tvrzení.

Problém vyřešíme takto. Definujeme pomocnou funkci

$$h(y) := \begin{cases} \dfrac{g(f(x)+y) - g(f(x))}{y} & \text{pro } y \neq 0 \\[2ex] g'(f(x)) & \text{pro } y = 0 \end{cases}$$

Pak z předchozího víme, že pro $y \neq 0$:

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = h(y) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Z definice h plyne, že h je spojitá v 0 $\left(\lim_{y \to 0} h(y) = g'(f(x)) = h(0)\right)$

Tedy pro $h \to 0$ máme $y \to 0$ a $\lim_{y \to 0} h(y) = g'(f(x))$ a $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, což implikuje tvrzení. $\boxtimes$

Příklady

1) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$

2) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = (x \cdot x)' \overset{V12}{=} 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

Indukcí dokážeme, že pro $f(x) = x^n$ platí $f'(x) = n x^{n-1}$

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = n x^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1) x^n$$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Pak $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

a obecněji $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \left(x^{-m}\right)' = -m x^{-m-1} = -\frac{m}{x^{m+1}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x;\ x^7 + 1 = 0\}$ 4) Umíme derivovat racionální funkce: $\left(\frac{x^4 + 2}{x^7 + 1}\right)' = \frac{4x^3(x^7+1) - 7(x^4+2)x^6}{(x^7+1)^2}$

5) Také $\left[(x^2 + 3x + 1)^2\right]' = \left(y^2\Big|_{y = x^2+3x+1}\right)' = \underline{\underline{2(x^2+3x+1)(2x+3)}}$

dle řetízkového pravidla.

Věta 15 <u>O derivaci inverzní funkce</u> <u>Buď</u> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že

(i) existují $\alpha,\beta_1,\beta_2>0$ tak, že $f:(x-\alpha,x+\alpha)\xrightarrow{\text{na}}(f(x)-\beta_1,f(x)+\beta_2)$

(ii) existuje $f'(x)$ a $f'(x)\neq 0$

(iii) f^{-1}, jejíž existence plyne z (i), je spojité v $y=f(x)$.

<u>Pak</u> existuje $(f^{-1})'(f(x))$ nebo $(f^{-1})'(y)$, kde $y=f(x)$

a platí

(*) $$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \iff (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

kde $y=f(x)$.

<u>Poznámka</u> Uvedeme chybný důkaz, který však umožňuje snadné zapamatování vzorečku (*).

Z (i) plyne vztah

(1) $$[f^{-1}\circ f](z)=z \quad \text{pro } z\in(x-\alpha,x+\alpha)$$

a také

(1') $$[f\circ f^{-1}](y)=y \quad \text{pro } y\in(f(x)-\beta_1,f(x)+\beta_2)$$

Zderivujeme-li (1) a (1') dle Věty 14 (složené zobrazení), pak $[f^{-1}]'(f(z))\,f'(z)=1$ a $f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y)=1$

což po vydělení $f'(z)$ resp. $f'(f^{-1}(y))$ dává vzorečky.

Proč je tento důkaz nesprávný? Ano, správně, Větu 14 nelze použít, neboť nevíme, že $(f^{-1})'(y)$ existuje.

<u>Příklad</u> $x^{\frac{1}{p}}$ je inverzní funkce k y^p na $D_f=\mathbb{R}$ je-li p liché $\in\mathbb{N}$, $D_f=\langle 0,\infty)$ je-li p sudé

Dle (*) $$\underline{\underline{\left(x^{\frac{1}{p}}\right)'}}=\frac{1}{(y^p)'\big|_{y=f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{p}}}}=\frac{1}{p\,y^{p-1}\big|_{y=x^{\frac{1}{p}}}}$$

$$=\frac{1}{p\,x^{\frac{p-1}{p}}}=\underline{\underline{\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}}}$$

Kombinací vět o derivaci součinu tak dostáváme, že $\boxed{p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}}$ $$\boxed{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)'=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}}$$

$\boxed{\text{Důkaz Věty 15}}$ Z předpokladu (ii) plyne, ve spojení s Větou 5, existence $P_\delta(x)$ tak, že

$$(\Delta) \qquad \left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \geq \frac{|f'(x)|}{2} > 0 \qquad \text{pro } \forall z \in P_\delta(x).$$

Pro tato $z \in P_\delta(x)$ definujme

$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{z-x}{f(z)-f(x)} & z \neq x \\[2ex] \dfrac{1}{f'(x)} & z = x \end{cases}$$

Díky (Δ) je tato definice korektní, neboli $D_h = P_\delta(x)$, a navíc h je spojitá v x, $h(z) \to \frac{1}{f'(x)}$ pro $z \to x$.

Platí

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \lim_{y\to f(x)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x))}{y - f(x)} = \lim_{y \to f(x)} h\left(f^{-1}(y)\right)$$

$$\overset{\text{Věta 10}}{=} h\left(\lim_{y\to f(x)} f^{-1}(y)\right) \overset{(iii)}{=} h\Big(\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{x}\Big) \underset{\text{definice } h}{=} \frac{1}{f'(x)}.$$

Tak jsme ukázali, že derivace f^{-1} v $f(x)$ existuje a zároveň jsme ukázali platnost vztahu (*). ∎

Třetí předpoklad Věty 15 se obecně těžko ověřuje. Často však budeme moci nahradit předpoklady (i)-(iii) předpokladem jediným. Platí totiž toto tvrzení.

<u>Věta 15*</u> Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ splňuje, pro všechna $x \in (a,b)$, jednu z následujících podmínek

Buď $(\forall x \in (a,b))\ f'(x) > 0$ nebo $\forall x \in (a,b)\ f'(x) < 0$

Pak tvrzení Věty 15 platí, tj. existuje $(f^{-1})'(y)$ pro $\forall y \in (f(a); f(b))$ a platí vztahy (*) a (**).

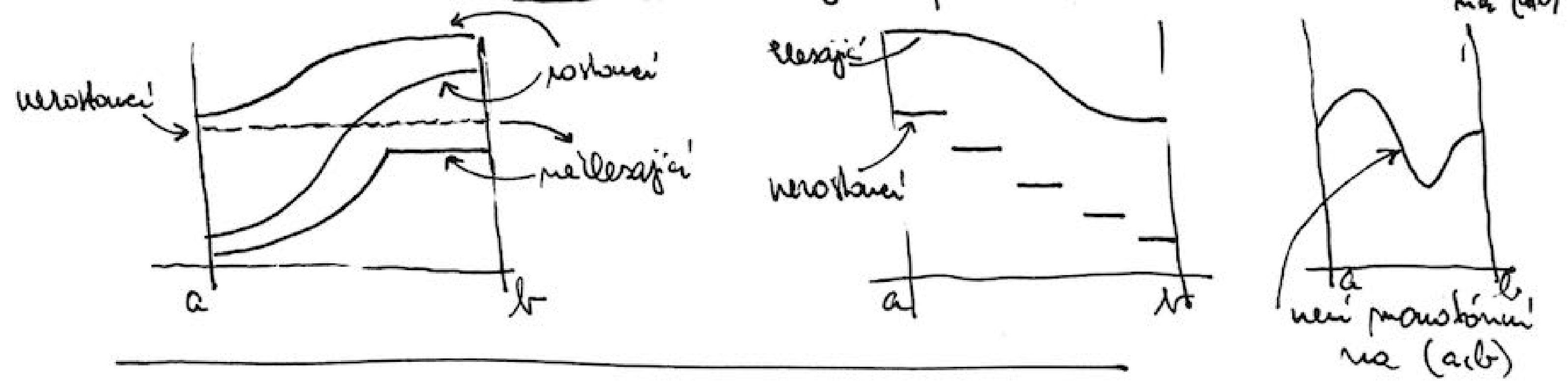
Dříve než Větu 15* okomentujeme (její důkaz provedeme později), uveďme definice pojmů <u>monotónie</u> resp. <u>ryzí monotónie</u>.

<u>Definice</u> Řekneme, že $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{rostoucí}}\\ \underline{\text{neklesající}}\\ \underline{\text{nerostoucí}}\\ \underline{\text{klesající}}\end{array}\right\} \ \underline{v\ (a,b)} \text{ jestliže pro každé } x_1,x_2\in(a,b) \text{ platí: } x_1<x_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x_1)<f(x_2)\\ f(x_1)\le f(x_2)\\ f(x_1)\ge f(x_2)\\ f(x_1)>f(x_2)\end{array}\right.$$

Řekneme, že f je <u>ryze monotónní</u> (na (a,b)) je-li f buď <u>klesající</u> nebo <u>rostoucí</u> na (a,b)

—||— f je <u>monotónní</u> je-li f buď <u>neklesající</u> nebo <u>nerostoucí</u> na (a,b)



<u>KOMENTÁŘ K DŮKAZU VĚTY 15*</u> Platí následující implikace:

- Je-li $f'(x)\left\{\begin{array}{l}>0\\<0\end{array}\right\}$ pro $\forall x\in(a,b)$, pak $\left\{\begin{array}{ll}\text{(Věta 12)} & f \text{ je spojitá v } x\\ \boxed{\text{Věta 4.13}} & f \text{ je } \left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{array}\right\} \text{ na } (a,b)\end{array}\right.$

- Je-li f spojitá a $\left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{array}\right\}$ na (a,b), pak $\left\{\begin{array}{l} f:(a,b)\xrightarrow{\text{na}}(f(a),f(b)) \text{ prostě}\\ f:(a,b)\xrightarrow{\text{na}}(f(b),f(a)) \text{ prostě}\end{array}\right.$

  a tedy f^{-1} existuje a zobrazuje $(f(a);f(b))\xrightarrow{\text{na}}(a,b)$ prostě

- Je-li f $\left\{\begin{array}{l}\text{ryze monotónní}\\ \text{spojitá}\end{array}\right\}$ na (a,b), pak f^{-1} je $\left\{\begin{array}{l}\text{ryze monotónní}\\ \text{spojitá}\end{array}\right\}$ na $(f(a);f(b))$ $\boxed{\text{Věta 4.6}}$

~~Věta~~ Tedy předpoklad $f'(x)\left\{\begin{array}{l}>0\\<0\end{array}\right.$ na (a,b) implikuje nejen předpoklad (ii) ve Větě 15, ale zaručuje i existenci f^{-1} a její spojitost v $(f(a);f(b))$. Věta 15* je tak důsledkem V15 a Vět 4.6 a 4.13, které si dokážeme později.

Def. (derivace funkce f vyššího řádu). Buď $f:(x-\delta,x+\delta)\to\mathbb{C}$. Nechť $f'(z)$ existuje $\forall z\in(x-\delta,x+\delta)$. Řekneme, že f má v x derivaci 2. řádu, píšeme $\boxed{f''(x)}$, pokud existuje

$$\lim_{z\to x}\frac{f'(z)-f'(x)}{z-x}.\quad \text{Tzn. } f''(x)=(f')'(x).$$

Pro $k\in\mathbb{N}$, $k>1$, definujeme analogicky $\boxed{f^{(k)}(x)\overset{\text{df.}}{=}\left(f^{(k-1)}\right)'(x)}$

Příklady: Spočtěte první, druhou, třetí a čtvrtou derivaci těchto fcí:
(1) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\in(0,\infty))$; (2) $g(x)=x^2+1$; (3) $h(x)=\sqrt{x}\,(x^2+1)$.

Řešení

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ $f(x)=x^{\frac12}$, $f'(x)=\frac12 x^{-\frac12}$, $f''(x)=\left(-\frac12\right)\left(\frac12\right)x^{-\frac32}=-\frac14 x^{-\frac32}$, $f'''(x)=\frac38 x^{-\frac52}$
$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac72}$.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ $g(x)=x^2+1$, $g'(x)=2x$, $g''(x)=2$, $g'''(x)=g^{(4)}(x)=0$.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Protože $h(x)=f(x)g(x)$ lze, vedle přímého derivování, postupovat takto:

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$h''(x)=f''(x)g(x)+\underbrace{f'(x)g'(x)+f'(x)g'(x)}+f(x)g''(x)$$
$$=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$
$$h'''(x)=f'''(x)g(x)+3f''(x)g'(x)+3f'(x)g''(x)+f(x)g'''(x)$$
$$h^{(4)}(x)=f^{(4)}(x)g(x)+4f'''(x)g'(x)+6f''(x)g''(x)+4f'(x)g'''(x)+f(x)g^{(4)}(x)$$

a dosadit.

Tento postup shrnuje následující věta o Leibnizově pravidlu.

$\boxed{\text{Věta 16}}$ (Leibnizovo pravidlo) Nechť $f^{(n)}(x)$ a $g^{(n)}(x)$ existují. Pak

$$(fg)^{(n)}(x)=(gf)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x).$$

Dk Indukcí! 1 pro $\boxed{n=1}$ se jedná o Větu o derivování součinu.

$$LS=(fg)'(x)$$
$$PS=\underbrace{\binom{1}{0}}_{=1}f(x)g'(x)+\underbrace{\binom{1}{1}}_{=1}f'(x)g(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

② Ukážeme, že z platnosti tvrzení pro n, plyne platnost tvrzení pro $n+1$.

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \left[(fg)^{(n)}\right]'(x) \overset{\text{indukční předpoklad}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)\right)'$$

Věta o derivování součinu

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f^{(k+1)}(x)\, g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)\, g^{(n-k+1)}(x)\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x) + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x)$$

$l := k+1$ v první části

$l := k$ v druhé části

$$= \sum_{l=1}^{n}\Bigg[\underbrace{\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}}\Bigg] f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x)\, g^{(0)}(x) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x)\, g^{(n+1)}(x)$$

$$\frac{n!}{(n-l+1)!\,(l-1)!} + \frac{n!}{(n-l)!\,l!} = \frac{n!\,(n-l+l+1)}{(n-l+1)!\,l!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-l)!\,l!} = \binom{n+1}{l}$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\binom{n+1}{l} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x) + \underset{\binom{n}{n}}{\binom{n+1}{n+1}} f^{(n+1)}(x)\, g^{(0)}(x) + \underset{\binom{n}{0}}{\binom{n+1}{0}} f^{(0)}(x)\, g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x).$$

▨

V závěru této kapitoly uvažujme funkce více proměnných a zaveďme pro ně derivaci ve směru (směrovou derivaci) a jako speciální případ parciální derivace.

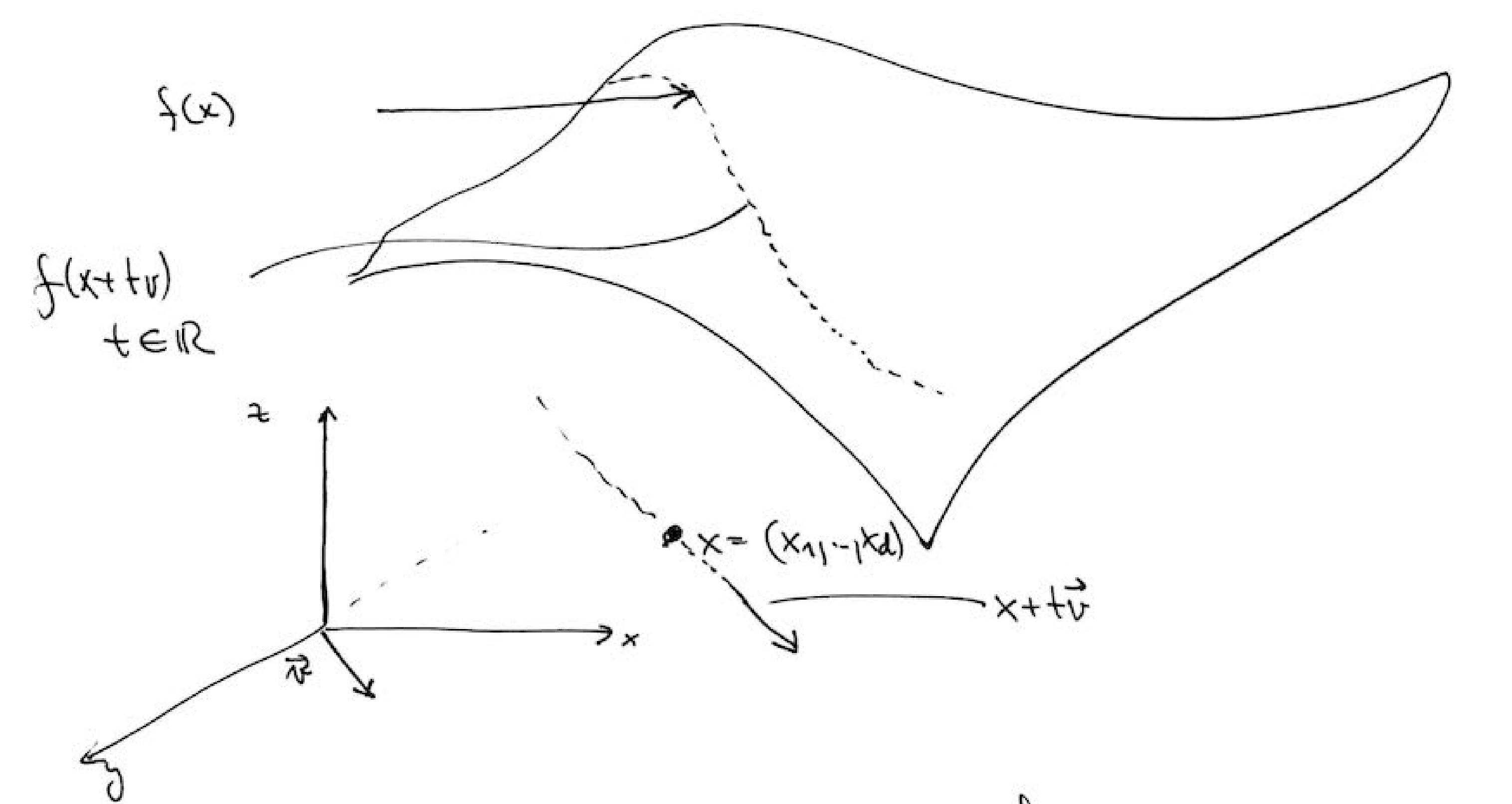
Def (Derivace f ve směru $\vec{v}$) Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $x = (x_1, \dots, x_d)$. Buď $\vec{v} = (v_1, \dots, v_d)$, $|\vec{v}|_{\mathbb{R}^d} = 1$. Zavedeme $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f(x + t\vec{v})$$

Derivací f ve směru $\vec{v}$ v bodě x, značenou $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(x)}$, definujeme

$$\partial_{\vec{v}} f(x) := g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{t}$$

(viz obrázek).



Směrů $\vec{v}$ máme obecně ∞-mnoho. V $\mathbb{R}^d$ je jen d lineárně nezávislých vektorů. Uvažme standardní bázi

$$\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0) \longrightarrow \text{Kroneckerovo delta}$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_i = (0,\dots,\delta_{ij},\dots 0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_d = (0,\dots,1)$$

Pak tyto speciální směrové derivace ve směrech $\vec{e}_i$ nazýváme parciální derivace f dle x_i, tj.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) :\overset{df.}{=} \partial_{\vec{e}_i} f(x).}$$

Tedy

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_i+t,\dots,x_d) - f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_d)}{t}}$$

<u>Příklad</u> Pro $x=(x_1,\dots,x_d)$: $|x|_{\mathbb{R}^d} := \sqrt{x_1^2+\dots+x_d^2} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Pak $\frac{\partial}{\partial x_i}|x|_{\mathbb{R}^d} = \frac{1}{2}\left(x_1^2+\dots+x_d^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{|\vec{x}|_{\mathbb{R}^d}}$.

a $$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|x|_{\mathbb{R}^d} = -\frac{1}{2}\frac{x_i^2}{(x_1^2+\dots+x_d^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_1^2+\dots+x_d^2)^{1/2}}$$

Tedy $$\Delta|x|_{\mathbb{R}^d} \overset{df.}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|x|_{\mathbb{R}^d} = -\frac{1}{|\vec{x}|^{1/2}} + \frac{d}{|x|^{1/2}} = \frac{d-1}{|x|}$$ ◻

Cvičení: Ukažte, že $-\Delta \frac{1}{|x|_{\mathbb{R}^3}} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

<u>Věta 17</u> Platí Tabulka základních derivací:

Tabulka základních derivací

f	f'	D_f	$D_{f'}$	Poznámka
C	0	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$C \in \mathbb{C}$
$(x+a)^n$	$n\,(x+a)^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,\infty)$	$\bullet$	$\alpha \in \mathbb{C}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	$\bullet$	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$a > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0,\infty)$	$\bullet$	$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$	$\bullet$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$	$\bullet$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1\rangle$	$(-1,1)$	v ± 1 jednostranné derivace
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1\rangle$	$(-1,1)$	v ± 1 jednostranné derivace
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\operatorname{tgh} x$	$1 - \operatorname{tgh}^2 x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$\operatorname{cotgh} x$	$1 - \operatorname{cotgh}^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\bullet$	$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
$\operatorname{arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$\operatorname{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1,\infty)$	$\bullet$	$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\operatorname{arctgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1,1)$	$\bullet$	$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
$\operatorname{arccotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$	$\bullet$	$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

Symbol "$\bullet$" znamená, že $D_{f'} = D_f$.

Dk) Je založen na Větě o exponenciále a Větě o sinu/cosinu, definicích příslušných funkcí a Větách o derivování součtu, součinu, podílu, složeného a inverzního zobrazení. Podrobněji v dalším textu.

Ověření prvních dvou řádků Tabulky jsme již provedli (pro $C \in \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$).

$\boxed{\text{VĚTA O SINU A COSINU}}$ Existují právě dvě reálné funkce cos a sin: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a iracionální číslo π taková, že platí

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $(\forall x,y\in\mathbb{R})$

(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $(\forall x,y\in\mathbb{R})$

(3) $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

(4) sin je rostoucí na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$

(5) $\sin 0 = 0$

(6) $(\sin x)'\big|_{x=0} = 1$ $\quad \left[\sin' x\big|_{x=0} = 1\right]$

$\boxed{\text{VĚTA O EXPONENCIÁLE}}$ Existuje právě jedna funkce $\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ taková, že

(7) $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \exp z_2$ $\quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$

(8) $\exp(x+iy) = \exp x(\cos y + i\sin y)$ $\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

(9) $\exp 0 = 1$

(10) $(\exp x)' = \exp x$

(11) $\exp\big|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0,+\infty)$ je rostoucí

(12) pro $x\in\mathbb{R}^+$, $p,q\in\mathbb{N}$: $\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right) = \sqrt[q]{x^p}$

Tyto věty dokážeme později v LS 2019/20.

Nyní se zaměříme na důsledky těchto dvou vět a důkazy (většiny) tvrzení z Věty 17.

$\boxed{\text{Důsledky}}$ Platí: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \& \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \& \quad \cos 0 = 1}$ (13)

$\underbrace{\sin(x+0) = \sin x\cos 0 + \underbrace{\cos x \sin 0}_{0}}_{\sin x}$ $\Rightarrow \underline{\cos 0 = 1}$

; neb z (6) + (5) plyne $1 = (\sin x)'\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \overset{0}{\sin 0}}{x-0}$

; $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x} \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} \to \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(14) $\boxed{\sin^2 y + \cos^2 y = 1}$

Z (8) $\exp iy = \cos y + i\sin y$
Z (8)+(3) $\exp(-iy) = \cos y - i\sin y$
$\Rightarrow$ $\cos y = \frac{1}{2}(\exp iy + \exp(-iy))$, $\sin y = \frac{1}{2i}(\exp iy - \exp(-iy))$

Tyto vzorce implikují tvrzení:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = \frac{1}{4}\left[e^{2iy} + 2 + e^{-2iy} - \left(e^{2iy} - 2 + e^{-2iy}\right)\right] = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{(15) \quad \sin' x = \cos x \quad \text{a} \quad \cos' x = -\sin x}$$

• Platí: $\sin' x = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$

$$= (\sin x) \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h^2}}_{\to -1/2} \underbrace{h}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} = \underline{\cos x}$$

$$\cos' x = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

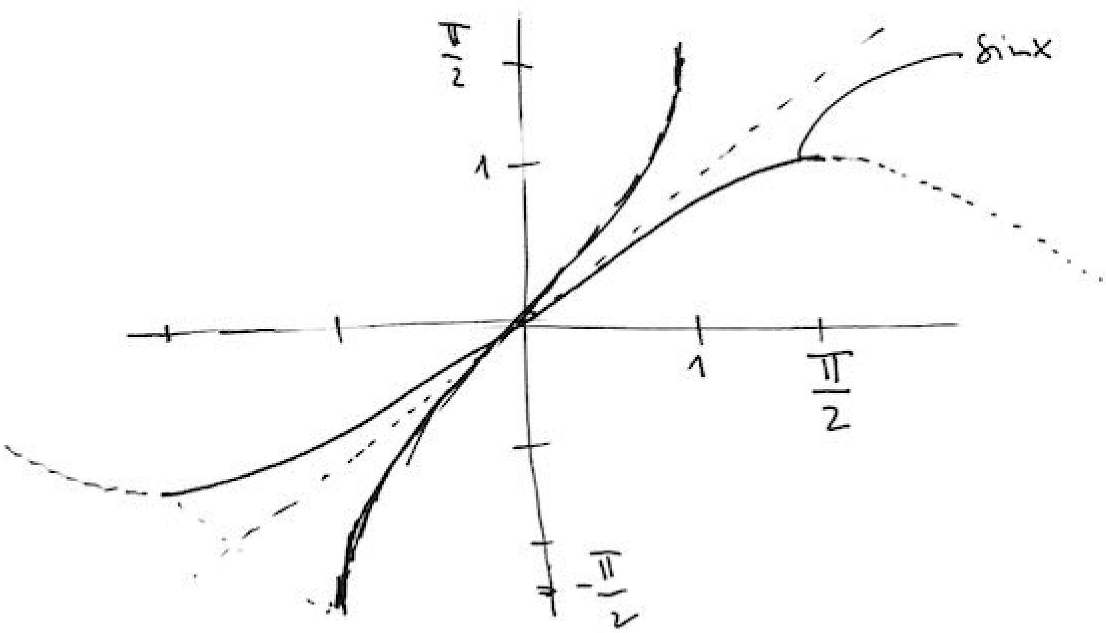
$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} h - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \underline{-\sin x}$$

Dále z (3), (4) a (14) plyne, že $\sin x : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle -1, 1 \rangle$ prostě a $\sin x$ je rostoucí, což implikuje $\cos x = (\sin x)' > 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(16) Tedy $\boxed{\text{existuje inverzní zobrazení } \sin^{-1} : \langle -1, 1 \rangle \xrightarrow{\text{na}} \left\langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \right\rangle \text{ prostě}}$ které je rostoucí. Toto zobrazení se značí <u>arcsin</u> a platí

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y \big|_{y = \arcsin x}} = \frac{1}{\cos y \big|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \Bigg|_{y = \arcsin x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$



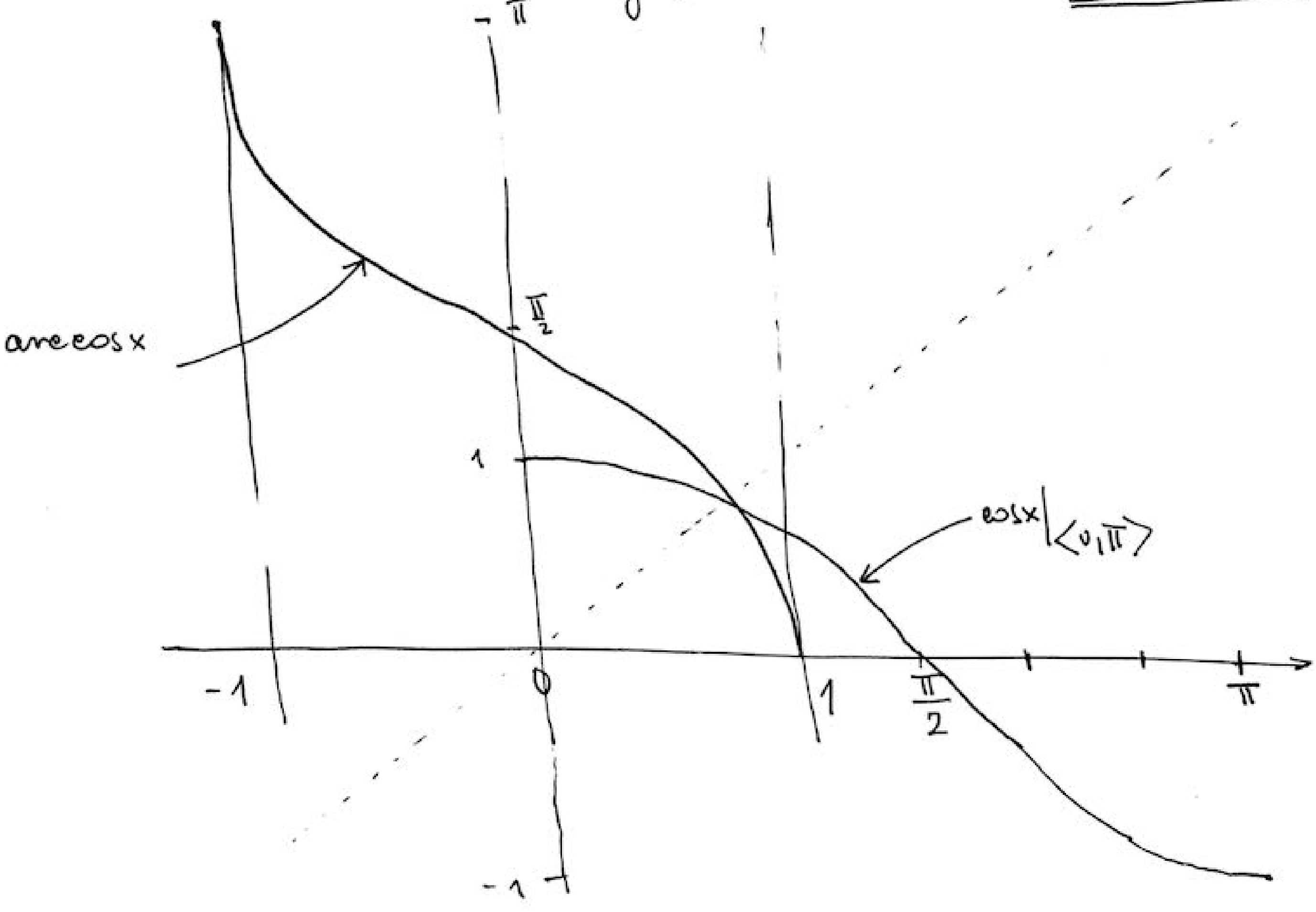
Podobně, protože $\cos : \langle 0,\pi\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle -1,1\rangle$ prostá a je zde klesající.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ na $\langle 0,\pi\rangle$

Tak

(17) Existuje inverzní zobrazení $\cos^{-1}$, značený **arccos**, tak, že
$$\arccos : \langle -1,1\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,\pi\rangle \text{ prostá a je zde klesající}$$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ na $\langle -1,1\rangle$

a platí

$$\arccos' \cancel{x}\, y = \frac{1}{\cos' y\Big|_{y=\arccos x}} = \frac{-1}{\sin \arccos x} = \underline{\underline{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$



Obr. Grafy funkcí $\cos x|_{\langle 0,\pi\rangle}$ a inverzního zobrazení $\arccos x$.

(18) $\operatorname{tg} x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad D_{tg} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ je lichá, π-periodická

$$\operatorname{tg}' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}} > 0 \quad \text{všude v } D_{tg}$$

věta o derivování podílu

$\Rightarrow$ tg je na intervalech patřících do D_{tg} rostoucí.

Speciálně: $\boxed{\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{na} (-\infty, +\infty) \text{ rostoucí spojitá}}$ lichá

$$\boxed{\operatorname{arctg} := (\operatorname{tg})^{-1} : (-\infty, \infty) \xrightarrow{na} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ rostoucí, spojitá}}$$

a platí

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}' y \big|_{y = \operatorname{arctg} x}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)} =$$

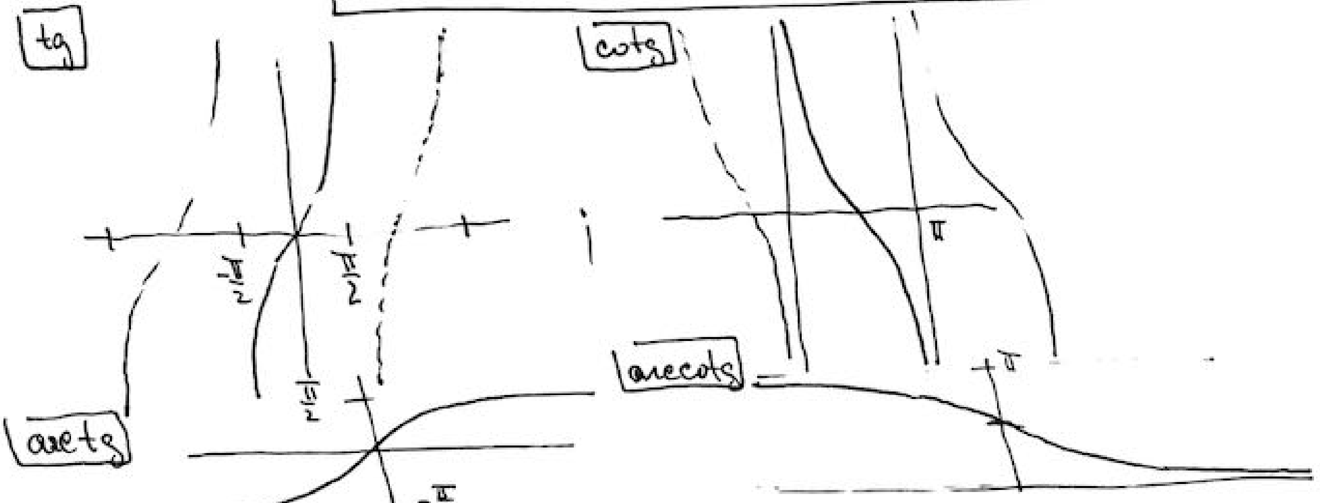
$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + x^2}}}$$

(19) Podobně: $\operatorname{cotg} x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad D_{cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

a $\boxed{\operatorname{cotg} x : (0, \pi) \xrightarrow{na} (-\infty, \infty) \text{ prostá a klesá}}$ *)

$$\operatorname{cotg}' x = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0 \Rightarrow \operatorname{cotg} x \text{ je spojitá.}$$

Tedy $\boxed{\operatorname{arccotg} \overset{ozn.}{=} (\operatorname{cotg})^{-1} : (-\infty, \infty) \xrightarrow{na} (0, \pi) \text{ prostá, klesající spojitá}}$



*) není ani lichá, ani sudá neboť neplatí: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$.

(20) Z (9) a (10) plyne $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\exp x - 1}{x} = 1}$ neboli (jinak ...)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

(21) Z (11) plyne existence $(\exp)^{-1} : (0,\infty) \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ prosté. Toto zobrazení značíme $\ln := \exp^{-1}$ přirozený logaritmus.

Platí
$$(\ln x)' = \frac{1}{(\exp y)'\big|_{y=\ln x}} = \frac{1}{\exp y\big|_{y=\ln x}} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$
platný pro $\forall x \in (0,+\infty)$.

Z $\boxed{\exp 0 = 1}$ plyne mj. $\boxed{\ln 1 = 0}$

(22) Obecná exponenciála

Motivováni (12), definujeme $\boxed{a^x := \exp(x \ln a)}$ pro $a>0$ a $x \in \mathbb{R}$

Pro $\boxed{a=1}$ $a^x \equiv 1$

Pro $\boxed{a>1}$ $\mathcal{D}_{a^x} = \mathbb{R}$, $R_{a^x} = (0,+\infty)$ rostoucí; $\boxed{(a^x)' = (\ln a)\, a^x}$

Pro $\boxed{a<1}$ —"— —"— klesající; —"—

Pro $a \neq 1$ $\exists$ inverzní zobrazení $: (0,+\infty) \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ značíme $\boxed{\ln_a x} := (a^x)^{-1}$

$\ln_a x$ je rostoucí pro $a>1$ a klesající pro $a \in (0,1)$.

Platí
$$(\ln_a x)' = \frac{1}{(a^y)'\big|_{y=\ln_a x}} = \frac{1}{\ln a \; a^y\big|_{y=\ln_a x}} = \frac{1}{(\ln a)\, x}$$

Definujeme $e>1$ předpisem $\ln e = 1$ $(\Leftrightarrow \exp 1 = e)$

Pak je $\boxed{e^x \text{ totéž co } \exp x}$ a budeme používat zápis, který se nám bude více líbit.

(23) Obecná mocnina pro $\alpha \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $x>0$

$$x^\alpha := \exp(\alpha \ln x) \qquad x>0$$
$$= 0 \qquad x=0 \quad \text{je-li } \alpha>0$$

Tato definice se shoduje s předchozími, avšak $x^{\frac{p}{q}}$, pro $q \in \mathbb{Z}$, kde je $D_{x^{\frac{p}{q}}} = \mathbb{R}$.

Definiční obor pro x^α (shrnutí, rozšiřuje Tabulku)

$\alpha = \frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, q liché a $\begin{cases}\frac{p}{q}>0\\ \frac{p}{q}<0\end{cases}$	$D_{x^\alpha} = \begin{cases}\mathbb{R}\\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases}$
$\alpha > 0$	$D_{x^\alpha} = \mathbb{R}^+\cup\{0\}$
$\alpha < 0$ nebo $\alpha\in\mathbb{C}$	$D_{x^\alpha} = \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$

Pro $\boxed{\alpha\in\mathbb{R}}$ již víme $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$ $x^\alpha: \begin{cases}(0,+\infty)\xrightarrow{\text{na}}(0,+\infty) & \text{prosté } \alpha\\ \langle 0,+\infty)\xrightarrow{\text{na}}\langle 0,+\infty) & \text{prosté } \alpha\end{cases}$

rostoucí

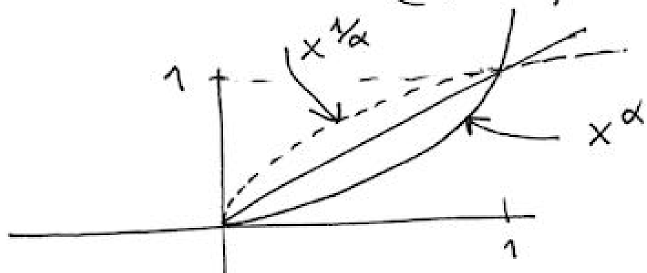
$$x^{\frac{1}{\alpha}} := (x^\alpha)^{-1}$$

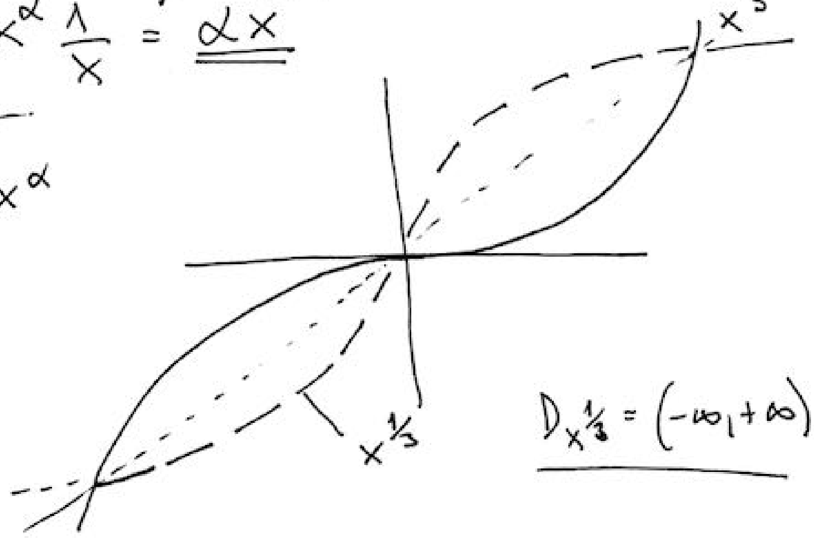
$\boxed{\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)' = \frac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ neboť $\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)' = \frac{1}{(y^\alpha)'}\Big|_{y=x^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\alpha y^{\alpha-1}}\Big|_{y=x^{\frac{1}{\alpha}}}$

$$= \frac{1}{\alpha x^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}}}$$

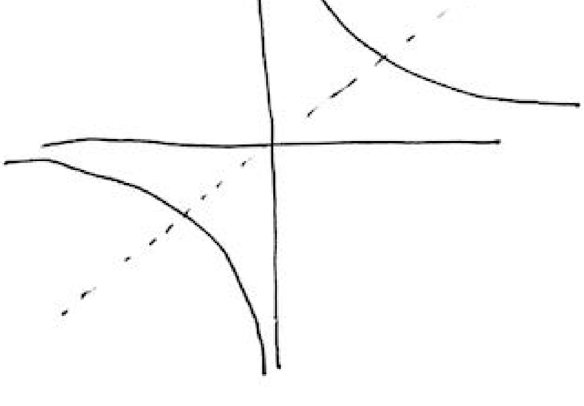
Pro $\boxed{\alpha\in\mathbb{C}}$ $(x^\alpha)' = \left(\exp\left((\alpha_1+i\alpha_2)\ln x\right)\right)'$

$$= (\alpha_1+i\alpha_2)\,x^\alpha\,\frac{1}{x} = \underline{\underline{\alpha x^{\alpha-1}}}$$





$$\underline{D_{x^{1/3}} = (-\infty,+\infty).}$$



$\frac{1}{x}: \mathbb{R}\setminus\{0\}\xrightarrow{\text{na}}\mathbb{R}\setminus\{0\}$ klesající

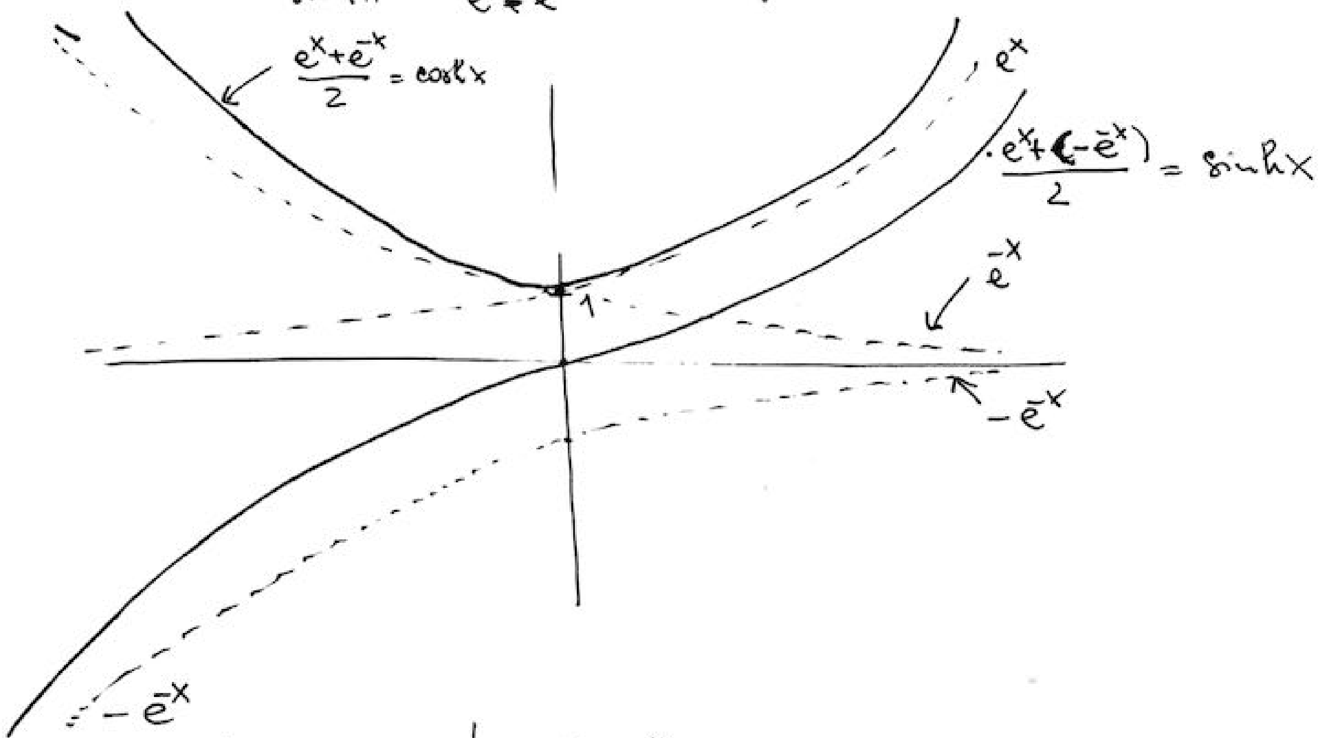
Inverzní funkce $\frac{1}{y}: \mathbb{R}\setminus\{0\}\xrightarrow{\text{na}}\mathbb{R}\setminus\{0\}$ klesající.

(24) $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad D_{\cosh} = \mathbb{R}$, sudá, $R(\cosh) = \langle 1, +\infty)$

$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad D_{\sinh x} = \mathbb{R}$ lichá, $R(\sinh x) = \mathbb{R}$

$\mathrm{tgh}\, x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad D_{\mathrm{tgh}\, x} = \mathbb{R}$ lichá

$\mathrm{cotgh}\, x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D_{\mathrm{cotg}\, x} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lichá



Platí: $(\cosh)'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$(\sinh x)'(x) = \cosh x$

Lze též spočíst explicitní tvar $\cosh x$. Označme $z = e^x$.
Hledáme inverzní zobrazení k $\cosh x$, tj. na $\langle 0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \langle 1, +\infty)$ resp.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff_{z = e^x > 0} z + \frac{1}{z} = 2y \iff z^2 - 2yz + 1 = 0$$

$$\Rightarrow z_{12} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$x_{12} = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$ a $x > 0$ jen pro $\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$

Tedy $(\cosh x)^{-1} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ Toto zobrazení se také značí $\underline{\mathrm{arc\,cosh}\, x}$.

Platí $(\mathrm{arccosh})'(x) = \frac{1}{\cosh' y\big|_{y = \mathrm{arccosh}\, x}} = \frac{1}{\sinh(\mathrm{arccosh}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

kde jsme využili vztah $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$ ■

2 PRIMITIVNÍ FUNKCE

Buď $I := (a,b)$ otevřený interval, tj. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $(a,b) := \{x;\ a<x<b\}$.

Definice (Primitivní fce) Buď $F, f : I \to \mathbb{C}$. Řekneme, že *F je primitivní funkce k f na I* $\overset{df.}{\iff}$ $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$

- Hledání primitivních funkcí je inverzní operace k derivování. Proto se stále častěji primitivní funkci říká antiderivace.
- Hledání primitivních funkcí znamená řešit úlohu:

  [Pro dané $f : I \to \mathbb{C}$ nalézt $y : I \to \mathbb{C}$ řešící diferenciální rovnici $y' = f$]

Příklad Z věty o exponenciále víme, že $\exp' z = \exp z$.

Tedy funkce e^x řeší rovnici $y' = y$. To je důležité pozorování z alespoň dvou důvodů:

(i) Rce $y' = ky$ má jasný a důležitý (fyzikální) význam: změna veličiny y je rovna k-násobku dané veličiny.

Protože $(e^{kx})' = ke^{kx}$ tak $y(x) = e^{kx}$ řeší $y' = ky$

(ii) Invarianci exponenciály vzhledem k derivování lze využít k řešení celé třídy diferenciálních rovnic

- Většinou budeme primitivní funkci k f označovat $\int f(x)\,dx$. Důvodem je elegantní manipulace se symbolem $\int f(x)\,dx$, kterému se říká neurčitý integrál f, což je další synonymum pro pojem primitivní fci.

Věta 18 (O (ne)jednoznačnosti primitivní funkce).

(1) Buď F, G primitivní fce k f na I. Pak $(\exists c \in \mathbb{C})(\forall x \in I)$ $\boxed{F(x) = G(x) + c}$

(2) Je-li F primitivní fce k f na I, pak $G = F + c$, kde $c \in \mathbb{C}$ je také primitivní fce k f na I.

Dk Ad (2) Máme dokázat, že $G'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$. Avšak $G' = (F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$, což jsme chtěli ukázat.

Ad (1) Jsou-li F, G primitivní fce k f na I, pak pro $H := F - G$ platí: $H' = (F-G)' = f - f = 0$. Ukážeme později z Rolleovy věty 4.8 že platí: pokud $H'(x) = 0\ \forall x \in I$, pak $H(x) = c$, kde $c \in \mathbb{C}$. (H musí být nutně konstantní).

$\boxed{\text{Věta 19}}$ (o spojitosti primitivní fce).

Je-li F primitivní fce k f na I, pak F je spojitá na I.

Dk plyne z Věty 12 a ze skutečnosti, že $F'(x)$ existuje pro $\forall x \in I$ (neboť $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$) ▨

Toto jednoduché tvrzení má významný důsledek*). Mějme I, J dva různé intervaly tak, že $I = (a,b)$ a $J = (b,c)$. Buď f definovaná na (a,c). ~~Nechť~~ F_I je primitivní fce k f na I a F_J je primitivní fce k f na J.

Protože primitivní fce je určena až na konstantu, tak

$$\boxed{\tilde{F} \stackrel{df}{=} \begin{cases} F_I & x \in I = (a,b) \\ F_J & x \in J = (b,c) \end{cases}}$$

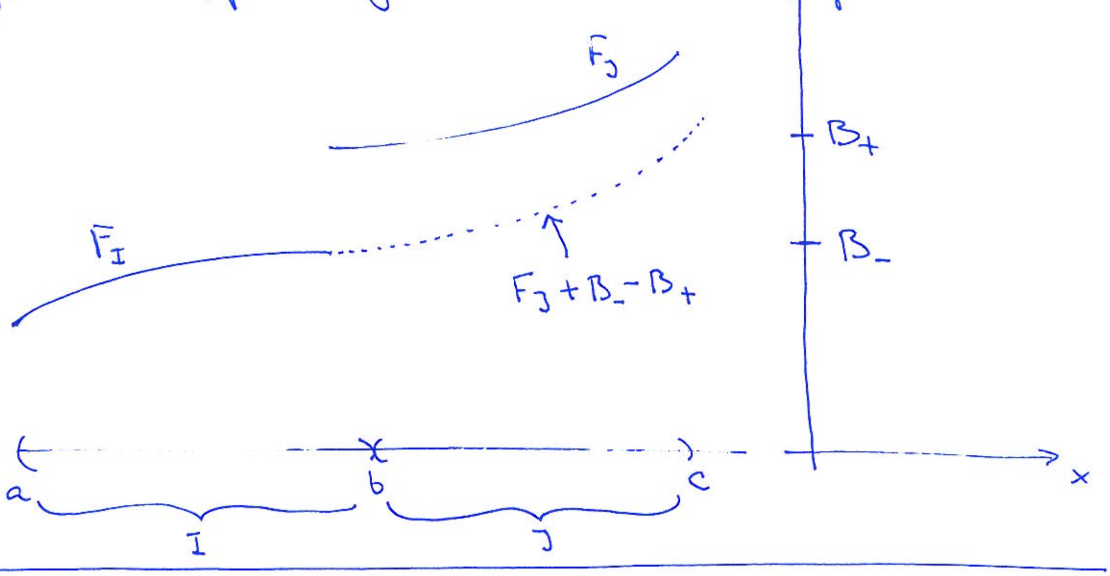
nemusí být primitivní fce k f na (a,c)

neboť $\tilde{F}$ může být nespojitá v bodě b. Lze však určit $\lim_{x \to b-} F_I(x)$ a $\lim_{x \to b+} F_J(x)$. Pokud existují a jsou vlastní označme je B_- a B_+. Definujme (viz obrázek)

$$F(x) = \begin{cases} F_I(x) & x \in (a,b) \\ F_J(x) + B_- - B_+ & x \in (b,c) \end{cases}$$

Pak F je spojitá na (a,c). Pokud ukážeme, že $F'(x) = f(x)$ pro $x = b$, pak F je primitivní fce k f na (a,c).

Popsali jsme si způsob jak <u>nalepovat primitivní fce</u>.



---

*) O NALEPOVÁNÍ PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ

$\boxed{\text{Věta 20}}$ Platí následující tabulka základních primitivních funkcí.

Dk) Dle definici derivováním funkcí v druhém sloupečku dostávám funkce v prvním sloupečku. ▨

Víme: $D_{\ln x} = \mathbb{R}^+$ a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Avšak $D_{\frac{1}{x}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a tedy $\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}$

OVĚŘ!

Tabulka základních primitivních funkcí

POZOR!

f	$F = \int f(x)\,dx$	Poznámka	Kde
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$\mathbb{R}$ pro $n > 0$; $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pro $n < 0$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$(0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$		$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
e^x	e^x		$\mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$		$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$		$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$		$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		$(-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$		$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\operatorname{arccotg} x$		$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$		$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{sign} x \operatorname{arccosh}\lvert x\rvert$		$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Obecněji: $(x+a)^n$	$\frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$, $\boxed{a \in \mathbb{C}}$	$x \in \mathbb{R}$ pro $n \geq 0$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$ $n < 0$ ← je-li $a \in \mathbb{R}$

Důsledky Platí

(α) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

(β) $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \forall x \in [-1, 1]$

Dk) Derivací $\operatorname{arctg} x$ a $-\operatorname{arccotg} x$ dostávám stejnou funkci tedy

$[\operatorname{arctg} - (-\operatorname{arccotg} x)]' = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \underset{\text{konstanta}}{C} \in \mathbb{R}$

Její hodnotu určíme např. v $x = 0$:

$\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Podobně postupujeme v případě (β). ▨

Věta 21 (O antiderivování součtu a skalárního násobku fcí).

Buď F, G prim. fce k f resp. g na I, buď $c \in \mathbb{C}$.

Pak
- $F \pm G$ je primitivní fce k $f \pm g$ na I
- cF je —||— cf na I

Dk) Přímým derivováním.

Věta 22 (Integrace per-partes) [duální věta k derivování součinu]

Buď $f, g : I \to \mathbb{C}$. Pak platí

$$(+) \quad \int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

pokud jedna z primitivních funkcí existuje.

Dk) Předpokládejme nejdříve, že $\int f'(x) g(x)\, dx$ existuje tzn. existuje $H : I \to \mathbb{C}$ taková, že $\boxed{H' = f'g \text{ v } I}$. Tvrdíme, že pak $fg - H$ je primitivní funkce k fg', což je (+).

Avšak

$$(fg - H)' \underset{\text{věta o derivování součin}}{=} f'g + fg' - H' \overset{= f'g}{=} fg',$$

což jsme chtěli ukázat.

Pokud existuje druhá z primitivních funkcí, tzn. $\exists\, G : I \to \mathbb{C}$ taková, že $\boxed{G' = fg'}$. Pak chceme ukázat, že $fg - G$ je prim. fce k $f'g$ v I.

Avšal: $(fg - G)' = f'g + fg' - G' = f'g$, a jsme hotovi. ■

Příklady

① $\boxed{\int x e^x\, dx} = x e^x - \int e^x = \underline{(x-1)e^x + C}$

② $\boxed{\int \ln x\, dx} = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \ln x - \int dx = \underline{x(\ln x - 1) + C}$

③ $\boxed{\int \sin^n x\, dx}$, $n > 1$

Řešení $I_n := \int \sin^n x = \int \sin^{n-1} x \sin x = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$

$\overset{\text{OPIS}}{=} - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$

$= - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \sin^n x \implies$

Tedy $I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x} \quad \text{kde} \quad \boxed{\begin{aligned} I_1 &= -\cos x \\ I_0 &= x \end{aligned}}$$

■

$\boxed{\text{Věty o substituci}}$ jsou věty duální k větám o derivování složené funkce a o derivování funkce inverzní.

Vycházíme ze vztahu

$$\boxed{\left(f(\varphi(t))\right)' = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)}$$

Uvedeme dvě schémata.

$\boxed{\text{SCHÉMA I}}$
- Umím nalézt $\int f(x)\,dx$ (tzn. znám F primitivní k f na I)
- Chci nalézt $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Postup

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt}}{=} \int f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

ZPĚTNÉ DOSAZENÍ

$\boxed{\text{Věta 23}}$ (1. věta o substituci)

Nechť
- F je primitivní fce k f na $I=(a,b)$,
- $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow[\text{do}]{} (a,b)$
- $\exists\, \varphi'(t) \in \mathbb{R}$ pro každé $t \in (\alpha,\beta)$

Pak $F\circ\varphi$ je primitivní fce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (α,β).

Dk: Protože $(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, jsme hned hotovi. ▨

$\boxed{\text{SCHÉMA II}}$
- UMÍM NAJÍT ϕ JAKO PRIM. FCI K $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (α,β)
  tj. $\phi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$
- HLEDÁM $\int f(x)\,dx$

Postup

$$\int f(x)\,dx \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt}}{=} \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \phi(t) = \phi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = (\phi\circ\varphi^{-1})(x)$$

potřebuji inverzní zobrazení k φ což vyžaduje $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ prosté

a protože chci derivovat φ^{-1}, musím mít splněny předpoklady věty o derivování inverzního zobrazení (měli jsme dvě varianty Věta 15 a Věta 15*)

$\boxed{\text{Věta 24}}$ (2. věta o substituci) nechť

(i) Φ je primitivní fce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na (α,β)

(ii) $\varphi: (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ rostoucí

(iii) $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t\in(\alpha,\beta)$

. Pak $\boxed{\Phi\circ\varphi^{-1} \text{ je primitivní fce k } f \text{ na } (a,b)}$

(Dk) Chceme ověřit: $(\Phi\circ\varphi^{-1})'(x) = f(x)$ $\forall x\in(a,b)$.

Avšak:

$$(\Phi\circ\varphi^{-1})'(x) = \Phi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \overset{(i)}{=} f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x)$$

Věta o derivaci složené funkce

$$= f(x)\,\varphi'(\varphi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}_{\neq 0}} = f(x). \quad \blacksquare$$

Věta o derivaci inverzní fce

$\boxed{\text{Příklady}}$ (4)–(7) na Schéma I, (8)–(9) na Schéma II.

(4) $$\int \sin x\cos x\,dx \underset{\substack{u=\sin x\\ du=\cos x\,dx}}{\overset{V23}{=}} \int u\,du = \frac{u^2}{2}+C \underset{\text{dosazení}}{=} \underline{\frac{\sin^2 x}{2}+C}$$

(5) $$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx \underset{\substack{u=g(x)\\ du=g'(x)\,dx}}{\overset{V23}{=}} \int\frac{du}{u} = \ln|u|+C = \underline{\ln|g(x)|+C}$$

(6) $\boxed{a>0}$ $$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} \underset{\substack{y=\frac{x}{a}\\ dy=\frac{dx}{a}}}{\overset{V23}{=}} \frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} y + C = \underline{\underline{\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C}}.$$

(7) (a) $$\int \operatorname{arctg} x \overset{\text{per partes}}{=} \int \underset{\substack{\downarrow\\ x}}{1}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{1+x^2}}}{\operatorname{arctg} x} = x\operatorname{arctg}x - \int\frac{x\,dx}{1+x^2} \underset{\substack{1+x^2=y\\ 2x\,dx=dy}}{\overset{V23}{=}}$$

$$= x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{y}\,dy$$

$$= \underline{\underline{x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C}}$$

(7) (b) $I_n = \int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$. Integrace per partes.

$$I_n = \int \underset{\substack{\downarrow\\ x}}{1}\ \underset{\substack{\downarrow\\ -n(1+x^2)^{-n-1}2x}}{\frac{dx}{(1+x^2)^n}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}$$

Tedy $\boxed{I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}}$

$\boxed{I_1 = \operatorname{arctg} x}$

(8) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ $\qquad D_{\sqrt{1-x^2}} = \{x \,;\, |x| \le 1\}$

$\cos t : [0,\pi] \xrightarrow{\text{na}} [-1,1]$ prostě

$\cos' t = -\sin t < 0$ na $(0,\pi)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx \underset{\substack{x=\cos t \\ dx = -\sin t\, dt \\ t = \arccos x}}{=} -\int \sqrt{\underbrace{1-\cos^2 t}_{\sin^2 t}}\, \sin t\, dt = -\int \sin^2 t$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t \Big|_{t=\arccos x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C}}$$

Příklad (3)

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \underset{\substack{x = \sinh t \,:\, \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R} \text{ prostě (rostoucí)} \\ dx = \underbrace{\cosh t}_{>0}\, dt}}{=} \int \frac{\cosh t}{\cosh t}\, dt = \int dt$

Protože platí
$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$= t + C \Big|_{t = \operatorname{arcsinh} x}$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{arcsinh} x + C}}$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C,$$

což jsem však mohl psát pomocí A tabulky primitivních funkcí a A tabulky derivací.

Integrace racionálních funkcí

[1] Buď $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ daná racionální funkce s $D_R = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) = 0\}$.

P, Q jsou polynomy stupně n resp. m, $n, m \in \mathbb{N}$.

Pokud $\boxed{n \geq m}$, pak $\boxed{R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}}$ kde stupeň $P_2 < m$

Protože P_1 umím integrovat, redukuje se problém integrace $R(x)$ na:

[2] $\boxed{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad n < m}$ Pak rozlož $Q(x)$ na kořenové činitele

tj.

$$(☆) \quad Q(x) = c(x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k} (x-\beta_1)^{s_1} (x-\overline{\beta}_1)^{s_1} \cdots\cdots (x-\beta_\ell)^{s_\ell} (x-\overline{\beta}_\ell)^{s_\ell}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ reálné kořeny, násobnosti $r_1, \dots, r_k$; $\beta_1, \overline{\beta}_1, \dots, \beta_\ell, \overline{\beta}_\ell$ komplexní kořeny, násobnosti $s_1, \dots, s_\ell$

což lze ekvivalentně psát ve tvaru

$$(*) \quad Q(x) = c(x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots\cdots (x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{s_\ell}$$

přičemž $p_i^2 - 4q_i < 0$ pro $i = 1, \dots, \ell$

[3] Proveďme rozklad na parciální zlomky

Platí Tvrzení: Je-li $R(x)$ jako v [2] výše, pak lze $R(x)$ přepsat do tvaru konečné sumy výrazů $\frac{A}{(x-\alpha)^N}$ a $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^M}$, přičemž jaké přesně členy budou v sumě se vidí dle těchto pravidel:

(a) Je-li v (*) $(x-\alpha_j)^{r_j}$, pak suma obsahuje

$$\frac{A_1}{x-\alpha_j} + \frac{A_2}{(x-\alpha_j)^2} + \dots + \frac{A_{r_j}}{(x-\alpha_j)^{r_j}}$$

(b) Je-li v (*) $(x^2+p_j x+q_j)^{s_j}$, pak suma obsahuje

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2+p_j x+q_j} + \dots + \frac{B_{s_j} x + C_{s_j}}{(x^2+p_j x+q_j)^{s_j}}$$

[4] Najdi primitivní funkce (tj. integruj) k výrazům

$$\frac{A}{(x-\alpha)^N} \quad \text{a} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^M} \qquad N, M \geq 1, \quad N, M \in \mathbb{N}.$$

(11) Buď $p, q \in \mathbb{R}$ takové, že $p^2 - 4q < 0$. Pak

$$\boxed{\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx} = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \int \frac{b-\frac{a}{2}p}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(b-\frac{a}{2}p\right)\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(b-\frac{a}{2}p\right)}{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}\int \frac{dx}{\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}+1}$$

$$y = \frac{x+\frac{p}{2}}{\underbrace{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}_{>0}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(b-\frac{a}{2}q\right)}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$\boxed{= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(b-\frac{a}{2}q\right)}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}} + C}$$

(12) $$\int \frac{x^2+x-1}{x^4+2x^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

neboť

$$\frac{x^2+x-1}{x^4+2x^2} = \frac{x^2+x-1}{x^2(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Převodem pravé strany na společného dělitele:

$$x^2+x-1 = Ax(x^2+2) + B(x^2+2) + Cx^3+Dx^2 \quad (*)$$
$$= Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3+Dx^2$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} x^0: & -1 = 2B & \Rightarrow & B = -\frac{1}{2} \\ x^1: & 1 = 2A & \Rightarrow & A = \frac{1}{2} \\ x^2: & 1 = B+D & \Rightarrow & D = \frac{3}{2} \\ x^3: & 0 = A+C & \Rightarrow & C = -\frac{1}{2} \end{array}}$$

NEBO

$x=0 \Rightarrow -1 = 2B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$

$x = i\sqrt{2} \Rightarrow \underbrace{-3+i\sqrt{2} = -2Ci\sqrt{2} - 2D}$

$\boxed{D = \frac{3}{2}}$ a $\boxed{C = -\frac{1}{2}}$

Derivuji (*) a $x=0$:

$2x+1\big|_{x=0} = A(x^2+2)\big|_{x=0} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$

Tedy

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^4+2x^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{x-3}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+2) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Alternativně mohu rozložit

$$\frac{x^2+x-1}{x^2(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+i\sqrt{2}} + \frac{\overline{C}}{x-i\sqrt{2}}$$

Najdu-li A, B, C, pak problém s integrací posledních dvou členů. Ty musím převézt na spol. jmenovatel

$\boxtimes$

Důležité substituce: převod na racionální funkce

Jsou-li P, Q polynomy $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce jedné reálné proměnné, platí $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Obecněji, jsou-li P, Q polynomy dvou reálných proměnných, tj. $P, Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kde $P(x,y) = \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij} x^i y^j$ a $Q(x,y) = \sum_{0 \le i+j \le m} b_{ij} x^i y^j$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce dvou reálných proměnných, platí $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

$$\boxed{\text{(I)} \quad \int \mathrm{R}(\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}}) \mathrm{dx}}$$

Substituce: $y = e^{\alpha x}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

Tvar derivace: $dx = \frac{1}{\alpha y} dy$

Výsledek: $\int R(y) \frac{1}{\alpha y} dy$

$$\boxed{\text{(II)} \quad \int \frac{\mathrm{R}(\ln \mathrm{x})}{\mathrm{x}} \mathrm{dx}}$$

Substituce: $y = \ln x$, $\quad x > 0$

Tvar derivace: $\frac{dx}{x} = dy$

Výsledek: $\int R(y) dy$

$$\boxed{\text{(III)} \quad \int \mathrm{R}\left(\mathrm{x}, \left(\frac{\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{\mathrm{cx}+\mathrm{d}}\right)^{\frac{1}{s}}\right) \mathrm{dx}}$$

Substituce: $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$

Podmínky: $ad - bc \neq 0$; $\quad s = 2k \implies \frac{ax+b}{cx+d} > 0$, $\quad s = 2k-1 \implies x \neq -\frac{d}{c}$

Inverze: $x = \frac{-dt^s + b}{ct^s - a}$

Tvar derivace: $dx = (ad - bc) s \frac{t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt$

Výsledek: $(ad - bc) s \int \frac{\hat{R}(t^s, t) t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt$

$$\boxed{\text{(IV)} \quad \int \mathrm{R}\left(\mathrm{x}, \sqrt{\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}}\right) \mathrm{dx}}$$

Eulerovy substituce

Čtyři netriviální případy (někdy i dva najednou).

1. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

   Substituce: $t = \left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ vede k **(III)**
2. $a > 0$

   Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} x + t \implies x = (t^2 - c)/(b - 2\sqrt{a} t)$
3. $c > 0$

   Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx \implies x = (2\sqrt{c} t - b)/(a - t^2)$
4. $a \le 0$ a $ax^2 + bx + c$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen ($\implies c \le 0$): odmocnina není v $\mathbb{R}$ pro žádné x definována.

2/10

$$\boxed{\text{(V)} \quad \int \mathbf{R}(\cos \mathbf{x}, \sin \mathbf{x})\mathbf{dx}}$$ Goniometrické substituce

Substituce: $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $\quad x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Inverze: $x = 2 \operatorname{arctg} y$ $\quad$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$

cosinus: $$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

sinus: $$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}$$

Zjednodušení:

(1) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \sin x$

(2) $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \cos x$

(3) $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1 + y^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y}{1 + y^2}$$

$$\boxed{\text{(VI)} \quad \int \mathbf{x^m (a + bx^n)^p dx}, \quad \mathbf{m, n, p} \in \mathbb{Q}}$$ Čebyševovy substituce

Umíme řešit pomocí elementárních funkcí pouze v následujících třech případech:

(1) $p \in \mathbb{Z}$. Pak položme $m = m'/\ell$, $n = n'/\ell$, kde m', n' a $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell > 0$.

Substituce: $t = x^{\frac{1}{\ell}}$

(2) $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$, $p = k/s$, $k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \frac{(t^s - a)^{1/n}}{b^{1/n}}$ $\quad$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{1}{nb^{1/n}} (t^s - a)^{\frac{1}{n} - 1} st^{s-1} dt$.

Výsledek: $$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} (t^s - a)^{\frac{m}{n}} t^k \frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}} (t^s - a)^{\frac{1}{n} - 1} st^{s-1} dt$$
$$= \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int t^{s+k-1} (t^s - a)^{\frac{m+1}{n} - 1} dt$$

(3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, $p = k/s$, $k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{1}{n}}$ $\quad$ *Tvar derivace:* $dx = -\frac{a^{1/n}}{n} (t^s - b)^{-\frac{1}{n} - 1} st^{s-1} dt$

Výsledek: $$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int x^m x^{np} (ax^{-n} + b)^{\frac{k}{s}} dx$$
$$= \int \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{m}{n}} t^k \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^p \frac{a^{\frac{1}{n}}}{-n} (t^s - b)^{-\frac{1}{n} - 1} st^{s-1} dt$$
$$= -\frac{a^{\frac{m+1}{n} + p} s}{n} \int t^{k+s-1} (t^s - b)^{-(\frac{m+1}{n} + p - 1)} dt$$

Několik příkladů na výše uvedené substituce

(13) $I(x) = \int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1}\, dx = (*)$

$D_f = \langle -1, 1) \setminus \{0\}$

Dle $\boxed{\text{III}}$

$$\boxed{\begin{aligned} & t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad x \in (-1,1) \\ & \frac{1+x}{1-x} = t^2 \iff (1+x) = (1-x)t^2 \\ & x = \frac{t^2-1}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2t(1+t^2) - 2t(t^2-1)}{(1+t^2)^2}\, dt \\ & \qquad\qquad\qquad\quad\;\; = \frac{4t}{(1+t^2)^2}\, dt \end{aligned}}$$

$$(*) = \int \frac{t+1}{t-1} \, \frac{4t}{(1+t^2)^2}\, dt =: I(t) \Big|_{t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

Postupuji dále dle metody integrace racionálních funkcí.

$$\frac{4t(t+1)}{(t-1)(t^2+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{Dt+E}{(t^2+1)^2}$$

což vede k rovnici

$$4t(t+1) = A(t^2+1)^2 + (Bt+C)(t^2+1)(t-1) + (Dt+E)(t-1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 4t^2+4t = {} & At^4 + 2t^2A + A + Bt^4 - Bt^3 + Bt^2 - Bt + Ct^3 - Ct^2 + Ct - C \\ & + Dt^2 + Et - Dt - E \end{aligned}}$$

$[t^4]$ $A + B = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$

$[t^3]$ $-B + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = B}$

$[t^2]$ $2A + B + D = 4$

$[t^1]$ $-B + C + E - D = 4$

$[t^0]$ $A - C - E = 0 \Rightarrow \boxed{E = -2B}$

$$\left.\begin{aligned} & -2B + B + D = 4 \\ & -B + \cancel{B} - 2B - D = 4 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{-3B = 8}$$

$D = 4 + B = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

Tedy $\boxed{A = \frac{8}{3}}$, $\boxed{B = -\frac{8}{3}}$, $\boxed{C = -\frac{8}{3}}$, $\boxed{D = \frac{4}{3}}$, $\boxed{E = \frac{16}{3}}$

Tak

$$I(t) = \frac{8}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{4}{3}\int \frac{2t}{t^2+1}\, dt - \frac{8}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{2}{3}\int \frac{2t\, dt}{(t^2+1)^2} + \frac{16}{3}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} + C.$$

odsud

$$\begin{aligned} I(x) = {} & \frac{8}{3} \ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right| - \frac{4}{3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x} + 1\right) - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} \\ & + \frac{16}{3}\left[\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1+x}{1-x} + 1}\right] + C, \end{aligned}$$

kde jsme pro výpočet primitivní fce posledního členu použili řešení příkladu (7.b).

Protože $\frac{1+x}{1-x}+1=\frac{2}{1-x}$ a $\ln\frac{2}{1-x} = \ln 2 - \ln(1-x)$ a $-\frac{4}{3}\ln 2$ lze zahrnout do obecné konstanty, dostáváme

$$(*)\quad \boxed{I(x) = \frac{8}{3}\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right| + \frac{4}{3}\ln(1-x) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{3}(1-x) + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + C}$$

Toto jsou primitivní fce k f na intervalu $(-1,0)$ a $(0,1)$.

Spočtěme $\lim\limits_{x\to 0\pm} I(x)$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0\pm} I(x) = \frac{8}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0\pm}\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right|}_{=-\infty} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} + C = -\infty$$

Tedy $I(x)$ nelze dodefinovat v 0 spojitě. Fce (respektive třída funkcí) daná vzorcem $(*)$ výše je primitivní funkce k f na $(-1,0)\cup(0,1)$, ale $I(x)$ není prim. fcí f na $(-1,1)$.

(14) Najděte $F(x) = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Toto je příklad na Eulerovu substituci typu $\boxed{(IV), 2.}$. $\left(D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}\right)$

Nejdříve totiž pozorujeme, že

$$F(x) = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \text{ kde } R(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

a $ax^2+bx+c = x^2+x+1$. Protože $a=1>0$ a x^2+x+1 nemá reálné kořeny, substituce má tvar

$$\boxed{\sqrt{x^2+x+1} = -x+t}$$

Odsud

$$x^2+x+1 = x^2-2xt+t^2 \Rightarrow x(1+2t) = t^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{t^2-1}{1+2t}} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}dt = \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt}$$

Po dosazení: $F(x) = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt$ $\quad \boxed{t = x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Protože

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} \Rightarrow t^2+t+1 = A+4At+4At^2+Bt+2Bt^2+Ct$$

$$\left.\begin{aligned} t^2&: \quad 1 = 4A+2B\\ t^1&: \quad 1 = 4A+B+C\\ t^0&: \quad 1 = A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A=1},\ \boxed{B=-3/2},\ \boxed{C=-3/2}$$

tak

$$\boxed{F(x) = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2}\frac{1}{1+2t} + C, \text{ kde } t = x+\sqrt{x^2+x+1}.}$$

15 a $\boxed{\text{Spočtěte } F(x) = \int \frac{dx}{\sin^m x} \text{ na } (0,\pi).}$

Metoda 1 Protože jde o případ $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, lze vždy použít substituci $\boxed{y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

Protože
$$\sin x = \frac{\sin 2(\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1}$$

a $\boxed{x = 2\operatorname{arctg} y} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy}$

dostáváme
$$F(x) = 2\int \frac{dy}{1+y^2}\left(\frac{y^2+1}{2y}\right)^m = \frac{1}{2^{m-1}}\int \frac{(y^2+1)^{m-1}}{y^m}\,dy$$
$$= \frac{1}{2^{m-1}}\int \frac{1}{y^m}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k} y^{2k}\,dy = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\int y^{2k-m}\,dy$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2^{m-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{y^{2k-m+1}}{2k-m+1} + C & \boxed{(m \text{ sudé})} \\ \dfrac{1}{2^{m-1}}\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\frac{m-1}{2}}}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{y^{2k-m+1}}{2k-m+1} + \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}}\ln|y| + C & \boxed{(m \text{ liché})} \end{cases}$$
a $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

Metoda 2 Všimneme si, že v našem případě platí pro m liché
$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$$
tak lze, pro m liché, postupovat pomocí substituce $\boxed{y = \cos x}$

Pak $\boxed{dy = -\sin x\,dx}$. Polož $m=2N-1$. Protože $\frac{1}{\sin^{2N-1}} = \frac{\sin x}{\sin^{2N} x} = \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^N}$,

tak $F(x) = -\int\frac{dy}{(1-y^2)^m}$ což umíme v principu integrovat rozkladem na parciální zlomky.

16 Určete $F(x) = \int\sqrt{1-\sin 2x}$ na $\mathbb{R}$.

Řešení: Protože $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ a $\sin 2x = -2\cos x\sin x$, tak
$$1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$$
Protože $\sqrt{y^2} = y \operatorname{sgn} y = |y|$

tak
$$F(x) = \int(\cos x - \sin x)\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)\,dx = \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) + C$$

Protože $\operatorname{sgn} y$ je nespojitá v 0 a primitivní funkce musí být spojitá na $\mathbb{R}$, není poslední rovnost správné/hledané řešení.

Protože $\cos x - \sin x \geq 0$ na $\left(\frac{\pi}{4}-\pi+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4}+(2k-1)\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$

a $\cos x - \sin x < 0$ na $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right)$

Máme pro $k=0$

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + C_0 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}-\pi, \frac{\pi}{4}\right) \\ -(\sin x + \cos x) + C_1 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\pi\right) \end{cases}$$

Protože

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} F(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} F(x) \iff \sqrt{2}+C_0 = -\sqrt{2}+C_1$$

tak $F(x)$ bude spojitá na $\left(\frac{\pi}{4}-\pi, \frac{\pi}{4}+\pi\right)$ pokud $C_1 = 2\sqrt{2}+C_0$

S takto zvoleným C_1 navíc platí

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4}+\pi)-} F(x) - \lim_{x\to(\frac{\pi}{4}-\pi)+} F(x) = \sqrt{2} + \underbrace{2\sqrt{2}+C_0}_{C_1} - \left(-\sqrt{2}+C_0\right) = 3\sqrt{2}$$

Tedy

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + (2k+1)\sqrt{2} + C_0 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}-\pi+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \\ -(\sin x + \cos x) + (2k+1)\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + C_0 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right) \end{cases}}$$

(17) Najděte $F(x) = \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ na $(0,2\pi)$ respektive na $\mathbb{R}$

Řešení: Protože $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$, lze použít jako substituci $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na $(-\pi,\pi)$ či $y = \operatorname{tg} x$ na $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
Ani jedna z těchto voleb nepokrývá celý interval $(0,2\pi)$.
[Mohli bychom však použít $y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ na $(0,2\pi)$.]

Použijeme $\boxed{y = \operatorname{tg} x}$. Pak $\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

a $\boxed{x = \operatorname{arctg} y}$. Tedy $dx = \frac{1}{1+y^2}dy$. Odtud

$$F(x) = \int \frac{dy}{1+y^2}\,\frac{1+y^2}{4+y^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + C \quad \text{na } \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Hledané primitivní funkce na $(0,\pi)$ je: $\begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} & \text{na } \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C & \text{na } \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$

kde C určím z podmínky $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} F(x) \Rightarrow \underline{\underline{C = \frac{\pi}{2}}}$

Tedy $\boxed{\text{na } \mathbb{R}}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} & \text{na } \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + k\frac{\pi}{2} & \text{na } \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \quad k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

3 LIMITY PODRUHÉ (nikoliv však naposled)

3.1 Limity nevlastní, limity v nevlastních bodech, limity posloupností

Definice Posloupnost (číselná) je jakékoliv zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Diskrétní hodnoty $\varphi(n)$ nazýváme n-tý člen posloupnosti. Často zobrazení φ zapisujeme ve tvaru $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ či ještě častěji $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

U posloupností nás bude zajímat chování φ_n pro rostoucí n; ptáme se, zda existuje $\lim_{n\to\infty} \varphi(n)$ a čemu se rovná.

Také se v této kapitole zaměříme na limity fcí $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{C}^*$ nebo $A \in \mathbb{R}^*$, v situacích, kterým jsme se dosud vyhýbali. Jedná se o tyto případy:

- $\boxed{x_0 = +\infty}$ nebo $\boxed{x_0 = -\infty}$ (tj. LIMITY V NEVLASTNÍCH BODECH)
- $\boxed{A = \infty}$ je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nebo $\boxed{A = +\infty} \vee \boxed{A = -\infty}$ je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tj. NEVLASTNÍ LIMITY)

Popis všech výše uvedených limit lze získat z obecné definice limity zavedené v kapitole 1. Připomeňme si ji.

Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$). Řekneme, že

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \overset{\text{df.}}{\equiv} \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0) \cap D_f)(f(x) \in U_\varepsilon(A))$$

Připomeňme si také okolí $\pm\infty$ resp. ∞:

$$P_\delta(+\infty) = \left(\tfrac{1}{\delta}, +\infty\right), \quad P_\delta(-\infty) = \left(-\infty, -\tfrac{1}{\delta}\right)$$

$$U_\delta(\pm\infty) = P_\delta(\pm\infty), \quad P_\delta(\infty) = \left\{z \in \mathbb{C};\ |z| > \tfrac{1}{\delta}\right\}.$$

Teď již není těžké si zapsat v různých konkrétních případech několik ekvivalentních formulací. Zde jsou tři případy:

(i) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = A \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{\delta}\right)\right) |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$

$$\underset{M := \delta^{-1}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)\left(x < -M \Rightarrow |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon\right)$$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(\forall x\in\left(\frac{1}{\delta},+\infty\right)\right)\left(f(x)\in\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right)\right)$

$\underset{\substack{L:=\varepsilon^{-1}\\ M:=\delta^{-1}}}{\iff} (\forall L>0)(\exists M>0)\ (x>M \Rightarrow f(x)>L)$

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(n>\frac{1}{\delta} \Rightarrow a_n\in\left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$

$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\left(n\geq n_0 \Rightarrow a_n\in\left(-\infty,-1/\varepsilon\right)\right)$

$\underset{L:=\varepsilon^{-1}}{\iff} (\forall L>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(n\geq n_0 \Rightarrow a_n<-L)$

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ (Jak limity v nevlastních bodech a nevlastní limity počítat?)

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(x_0\in\mathbb{R}^*)$ platí:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0+$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0-$

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ platí

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ platí:

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ pokud $\lim\limits_{y\to0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ existuje

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to0-} f\left(\frac{1}{y}\right)$ –"– $\lim\limits_{y\to0-} f\left(\frac{1}{y}\right)$ existuje.

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ z definice

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ (f(x)>L)$

$\iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{L}\right)$

$\underset{\varepsilon=L^{-1}}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{f(x)}<\varepsilon\right)$

$\underset{\text{definice}}{\iff} \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0+.$

$\boxed{\text{Podobně se dokáže (2).}}$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ |f(x)|_{\mathbb{C}}>L$

$\underset{\varepsilon=\frac{1}{L}}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{|f(x)|_{\mathbb{C}}}<\varepsilon\right)$

$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|_{\mathbb{C}}<\varepsilon\right)$

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ Předpokládáme, že existuje $\lim\limits_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A \in \mathbb{C}^*$. To znamená:

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(0<y<\delta \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\right)$, což je ekvivalentní s

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(\frac{1}{y}>\frac{1}{\delta} \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\right)$ $\quad \underset{x=\frac{1}{y}}{\Longleftrightarrow}$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(x>\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\right)$ $\quad \underset{M=\delta^{-1}}{\Longleftrightarrow}$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists M>0)\left(x>M \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\right)$ $\quad \Longleftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Důkaz (5) si proveďte podobně sami. ☒

V dalším budeme zkoumat, které věty platné pro vlastní limity ve vlastních bodech zůstávají v platnosti i pro nevlastní limity v nevlastních bodech a posloupnosti. Přímočará zobecnění jsou ponechána posluchačům, aby si je dokázali.

$\boxed{\text{Věta 3.2}}$ Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje $(x_0 \in \mathbb{R}^*)$, pak je jediná.

Dk. Sporem. Předpokládáme, že existují alespoň dvě limity $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$ resp. $\mathbb{C}^*$ a jsou různé.

- Kdyby existovaly dvě různé vlastní limity, pak dostáváme spor s Větou 1 (respektive jejím bezprostředním zobecněním zahrnujícím případy $x_0=+\infty$ nebo $x_0=-\infty$.)
- Když $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, pak zbývá vyloučit situaci, kdy $A_1 \in \mathbb{C}$ a $A_2=\infty$.

  Protože $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2 = \infty$, tak

  k $L := 2|A_1|+1$ $(\exists \delta_2>0)(\forall x \in P_{\delta_2}(x_0))$ $\boxed{|f(x)|_{\mathbb{C}} > 2|A_1|_{\mathbb{C}}+1}$.

  Protože $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1 \in \mathbb{C}$, tak

  k $\varepsilon := |A_1|+1$ $(\exists \delta_1>0)(\forall x \in P_{\delta_1}(x_0))$ $|f(x)-A_1|_{\mathbb{C}} < |A_1|+1$

  Protože $|f(x)|_{\mathbb{C}} - |A_1|_{\mathbb{C}} < |f(x)-A_1|_{\mathbb{C}}$, tak pro $x \in P_{\delta_1}(x_0) \cap P_{\delta_2}(x_0)$

  platí $|f(x)| < 2|A_1|+1$, což je protiklad s nerovností výše; ↯.
- Když $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tak si sami podobně zdůvodněte, že nemohou nastat situace:
  - $A_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 = +\infty$,
  - $A_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 = -\infty$,
  - $A_1 = -\infty$, $A_2 = +\infty$. ☒

$\boxed{\text{Věta 3.3}}$ Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$), pak $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.
$(x_0 \in \mathbb{R}^*)$

Dk přenechám laskavému čtenáři. ☑

Příklad (který ukazuje, že opačná implikace neplatí)
Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} := \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n| = +\infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ neexistuje.

$\boxed{\text{Věta 3.4}}$ Věta o limitě $\pm, \cdot, \div$ platí i v nevlastních bodech (HODNOTY JSOU VŠAK VLASTNÍ!).
Věta 9 a Věta 10 naopak platí nejen v nevlastních bodech, ale i pro nevlastní limity. ☑

Dk pouhým rozšířením. přímočaré

Příklad (který ukazuje, že Věta 3.4 o $\pm, \cdot, \div$ obecně neplatí, jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$)
Buď $f(x) = x^n$ a $g(x) = -x^m$ a $h(x) = x^m$, $x_0 = +\infty$, $n, m \in \mathbb{N}$.
Pozorujeme: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ a

dále:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)+g(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \boxed{n>m} \text{ neboť } x^n + (-x^m) = \underbrace{x^n}_{\downarrow +\infty}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^{n-m}}\right)}_{\downarrow 1} \\ 0 & \text{pro } \boxed{n=m} \\ -\infty & \text{pro } \boxed{n<m} \text{ neboť} \end{cases}$$

$$x^n + (-x^m) = -\underbrace{x^m}_{\downarrow -\infty}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^{m-n}}\right)}_{\downarrow 1}$$

a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} = +\infty & \text{pro } \boxed{n>m} \\ = 1 & \text{pro } \boxed{n=m} \\ \lim \frac{1}{x^{m-n}} = 0+ & \text{pro } \boxed{n<m} \end{cases}$$

Tyto příklady dokládají, že obecně nelze dát smysl výrazům typu $+\infty + (-\infty)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $0 \cdot (-\infty)$, $\frac{0}{0}$, atd.

Následující věty tak obsahují podmínky, které zaručují, aby věty o limitě součtu, součinu a podílu platily i pro práci s nekonečnem.

$\boxed{\text{Věta 3.5}}$ Pro $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ platí:

(+) Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{respektive } -\infty) \\ g \text{ je omezené zdola (respektive shora) na } P_\Delta(x_0) \end{array} \right\}$, pak $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = +\infty$ (resp. $-\infty$)

(*) Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty) \\ g \text{ je omezená zdola (resp. shora) čísla } \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{resp. } -\beta \\ (\beta > 0) \end{array} \right\} \text{ na } P_\Delta(x_0), \end{array} \right.$

pak $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

($\div$) • Pokud $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\left\{ \begin{array}{l} f(x)>0 \\ f(x)<0 \end{array} \right\}$ na $P_\Delta(x_0)$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array} \right.$.

• Pokud $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = 0$.

Dk $\boxed{\text{Ad}(+)}$ Víme: $(\forall \tilde{L}>0)(\exists P_\delta(x_0))(x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > \tilde{L})$ (1)

$(\exists M>0)(\exists P_\Delta(x_0))\ x \in P_\Delta(x_0) \Rightarrow g(x) > -M$ (2)

Pro $L>0$ libovolné pevné, definuj $\tilde{L} := L+M$ a pro toto $\tilde{L}$ najdi $\delta>0$ tak, že platí (1). Pak pro $x \in P_\delta(x_0) \cap P_\Delta(x)$ je $f(x)+g(x) > \tilde{L} - M = L+M-M = L$. Tedy dle definice $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = +\infty$.

$\boxed{\text{Ad}(*)}$ Předpokládáme, že platí (1) a navíc

$(\exists \alpha>0)(\exists \tilde{\delta}>0)(\forall x \in P_{\tilde{\delta}}(x_0))\ g(x) > \alpha > 0.$ (3).

Pro $L>0$ libovolné, polož $\tilde{L} := \frac{L}{\alpha}$ a k němu určeme δ tak, že (1) platí. Pak pro $x \in P_\delta(x_0) \cap P_{\tilde{\delta}}(x_0)$: $f(x)g(x) \geq \frac{L}{\alpha}\alpha = L > 0$.

$\boxed{\text{Ad}(\div)}$ Pokud $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $f(x)>0$. Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+$. Dle Věty 3.1, část (1): $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Zbylá tvrzení si ověřte sami. ▨

Cvičení Ukažte, že platí: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ omezené zdola na $P_\delta(x_0)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow$ — " — shora na $P_\delta(x_0)$.

Věta 3.6 (sendvičová) (i) Věta 8 platí i pro $x_0 = +\infty$ nebo $x_0 = -\infty$.

(ii) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pokud $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ a $f(x) \leq g(x)$ na $P_\Delta(x_0)$, pak $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Dk: Sami.

Věta 3.7 (l'Hospitalova) (případy $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{A}{\infty}$). Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Jestliže

(1) Existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x \in P_\delta(x_0)$ existují $f'(x)$ a $g'(x)$,

(2) Existuje $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$

(3) Buď $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ Nebo $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$,

Potom $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A}$. Totéž platí pro jednostranné limity.

Dk: později v sekci 4.

Příklady (1) Přímo z definice: $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty}$

(2) z definice resp. věty o exponenciále plyne $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$ a $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0+}$. Odtud $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$ a $\boxed{\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty}$

(3) $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$ neboť $x < x^n$ pro $x \geq 1$ a dle sendvičové věty dostáváme tvrzení (též z (1))

(4) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ sudé} \\ -\infty & n \text{ liché} \end{cases}}$ neboť $\lim_{x \to -\infty} x^n = \lim_{-x \to +\infty} (-x)^n = \lim_{x \to +\infty} (-1)^n x^n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

(5) $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \lim_{x \to +\infty} \exp(\alpha \ln x) = \begin{cases} +\infty & \text{je-li } \alpha > 0 \\ 1 & \text{je-li } \alpha = 0 \\ 0 & \text{je-li } \alpha < 0 \end{cases}$

(6) $\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} x^n \lim \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^{n-1}}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{je-li } a_n > 0. \\ -\infty & \text{je-li } a_n < 0. \end{cases}$

POROVNÁNÍ RYCHLOSTI KONVERGENCE

Víme: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$ (je-li $\alpha>0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Zajímá nás otázka, která z těchto funkcí jde k $+\infty$ nejrychleji, která nejpomaleji. Protože $e^{x}\cdot e^{-x} = 1$ implikuje $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$, lze se ptát, která z funkcí e^{-x}, $\frac{1}{x^{\alpha}}$, $\frac{1}{x^{\beta}}$ $(\beta>\alpha>0)$, $\frac{1}{\ln x}$ konvergují k 0 pro $x\to+\infty$ nejrychleji a nejpomaleji.

Platí:

(i) Buď $\alpha>0$ libovolné. Pak existuje $k\in\mathbb{N}$ takové, že $k-1\le\alpha\le k$. Tedy

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\alpha}} \overset{\text{l'H}}{\underset{k\text{-krát}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{\underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}_{>0}\,x^{\alpha-k}} = \lim_{x\to+\infty} x^{k-\alpha}e^{x} = +\infty}$$

(ii) Buď $\alpha>0$ libovolné.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \alpha\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$$

(iii)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{x}}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} \overset{\text{dle (i)}}{=} 0.$$

Tedy: libovolně malá mocnina jde do $+\infty$ rychleji než $\ln x$, ale naopak e^{x} jde do $+\infty$ rychleji než libovolně velká mocnina.

$\boxed{x\to+\infty}$

konvergence k $+\infty$	konvergence k 0
e^{x}	$e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$
x^{α}	$\frac{1}{x^{\alpha}}$
$\beta<\alpha$	$\beta<\alpha$
x^{β}	$\frac{1}{x^{\beta}}$
$\ln x$	$\frac{1}{\ln x}$

V tabulce jsou srovnány konvergence dle rychlosti od nejrychlejší (nahoře) k nejpomalejší (dole).

$\boxed{3.2.}$ Klasifikace nekonečně malých a nekonečně velkých veličin, Symboly o, O.

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, pak se někdy říká, že f je v x_0 nekonečně malá

Naopak, je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, pak f je v x_0 nekonečně velká

Jsou-li f a g dvě různé funkce, které jsou v x_0 nekonečně malé (nebo nekonečně velké) je užitečné umět porovnat jejich rychlost s jakou malosti (velikosti) v x_0 nabydou (viz Tabulka na str. 3/7). Je také užitečné umět porovnávat funkce s komplikovaným zápisem s funkcemi elementárními.

Definice Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

[1] Píšeme $\boxed{f=o(g) \text{ pro } x=a}$ (a říkáme, že f je malé o funkce g pro $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv}\ \boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0}$$

[2] Píšeme $\boxed{f=O(g) \text{ pro } x=a}$ (a říkáme, že f je velké O fce g pro $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv}\ (\exists K\in\mathbb{R})(\exists P(a))\ \ |f(x)|\le K|g(x)|$$

[3] Píšeme $\boxed{f\sim g \text{ pro } x=a}$ (a říkáme, že f je slabě ekvivalentní s g pro $x=a$; nebo: f je řádově stejná jako g v $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

[4] Píšeme $\boxed{f\simeq g \text{ pro } x=a}$ (a říkáme: f je silně ekvivalentní s g pro $x=a$; nebo: f se chová jako g v $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Cvičení (1) Ukažte, že relace $\boxed{f\sim g \text{ pro } x=a}$ je skutečně ekvivalence (tj. platí $f\sim f$ (reflexivita), $f\sim g\Rightarrow g\sim f$ (symetrie), $(f\sim g)\wedge(g\sim h)\Rightarrow f\sim h$ (tranzitivita))

(2) Ukažte, že platí: (vše pro $x=a$)

(i) $f\sim g \Rightarrow f=O(g)\wedge g=O(f)$

(ii) $f\simeq g \Rightarrow f\sim g$

(iii) $f=o(g)\Rightarrow f=O(g)$

(iv) $f_1=O(g)\wedge f_2=O(g)\Rightarrow f_1+f_2=O(g)$

(v) $f=O(g)\wedge g=O(h)\Rightarrow f=O(h)$

(vi) $f_i\sim g_i$ $(i=1,2)$ $\Rightarrow f_1f_2\sim g_1g_2$, $\frac{f_1}{f_2}\sim\frac{g_1}{g_2}$ (ALE NIKOLIV $f_1+f_2\sim g_1+g_2$. Např. $f_1=\sin x$, $f_2=-\sin x$, $g_1=x$, $g_2=x$, v $a=0$.)

③ Ukažte, že zápis $f = O(1)$ znamená, že f je na nějakém prstencovém okolí omezená, tj. $\boxed{f = O(1)} \Leftrightarrow \boxed{(\exists K>0)\,(\exists P_\delta(a))\ |f(x)| < K}$

$\boxed{\text{Příklady}}$ ① Z Tabulky, str. 3/7, plyne $x^\alpha = o(e^x)$ pro $x=+\infty$ a také $\ln x = o(x^\alpha)$ pro $x=+\infty$ } pro $\alpha>0$ libovolné.

② Pro $x=0$ platí: $\sin x \simeq x$, $\operatorname{tg} x \simeq x$, $\cos x \simeq 1$, $\operatorname{cotg} x \simeq \frac{1}{x}$, $\arcsin x \simeq x$, ...
$1-\cos x \sim x^2$

③ Pro libovolné $x\in\mathbb{R}$ platí: $x\sin x = O(x)$ neboť $|x\sin x| \le |x|$.

④ Najděte všechna $\alpha\in\mathbb{R}$ tak, že $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x^\alpha)$ pro $x=0$.

Řešení: $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^\alpha} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-3}}$, tak

Protože

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\alpha-3}} = 0 \Leftrightarrow \alpha-3<0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha<3}$$

Protože pro $\alpha=3$
$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$ tak $\boxed{\operatorname{tg} x - \sin x \sim x^3}$ a $\boxed{\operatorname{tg} x - \sin x \simeq \frac{x^3}{2}}$

---

⑤ Nechť $\boxed{f = o(g) \text{ pro } x=a}$, f je "ošklivá"/komplikovaná fce a g je elementární fce ("pěkná").

Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array} \right\}$ pak vyvozujeme: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ a } f \text{ jde k } 0 \text{ rychleji než } g. \\ \text{buď } f \text{ je omezená v } P_\delta(a) \text{ nebo } f \text{ jde k } +\infty \text{ pomaleji než } g. \end{array} \right.$

3.3 LIMITY A MONOTÓNIE

V této sekci se zaměříme na funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a budeme zkoumat vlastnosti limit založené na možnosti uspořádat (funkční) hodnoty f a g nebo jinou funkce f samotné. (NELZE tedy předpokládat, že $f,g:\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.) K této sekci tématicky patří již dříve zformulované věty o strážnících (sendvičové věty).

Věta 3.8 (Limitní přechod v nerovnostech) Buď f,g definované na okolí $x_0\in\mathbb{R}^*$ ($f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ale i $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ pak $x_0=+\infty$)

Jestliže:
- existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (a rovná se A)
- existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (a rovná se B)
- $(\exists P_\delta(x_0))(\forall x\in P_\delta(x_0))\quad f(x)\leq g(x)$

Pak:
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Přechodem k limitě se uspořádání neztratí.

Příklad (který ukazuje, že nelze očekávat, že zesílením třetího předpokladu $\boxed{(\exists P_\delta(x_0))(\forall x\in P_\delta(x_0))\quad f(x)<g(x)}$ by mohlo platit silnější tvrzení
$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Uvažme např. (1) $f(x)=x^2$ a $g(x)=|x|$, pak pro $0<\delta<1$ platí: $f(x)<g(x)$ $\forall x\in P_\delta(0)$.

Ale $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

(2) $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ a $g(x)=\frac{1}{x}$. Pak $f(x)<g(x)$ v $U_\delta(+\infty)$ pro $\forall\delta>0$,

ale $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Dk věty 3.8 Nechť pro jednoduchost $A,B\in\mathbb{R}$. Chceme ukázat, že $A\leq B$. Sporem předpokládejme, že $A>B$. Pak k $\varepsilon=\frac{1}{2}(A-B)$ najdu z existencí limit $P_\delta(x_0)$ tak, že pro všechna $x\in P_\delta(x_0)$:
$$\underline{\tfrac{1}{2}(A+B) = A-\tfrac{1}{2}(A-B) < f(x)} < A+\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$B-\tfrac{1}{2}(A-B) < \underline{g(x) < B+\tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(A+B)}$$

Z podtržených vztahů plyne: $g(x) < \frac{1}{2}(A+B) < f(x)$ $\forall x\in P_\delta(x_0)$, což je spor s třetím předpokladem věty 3.8. ∎

Věta 3.9. Buď $a<b$ a $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Označme $J:=(a,b)$.

Je-li f neklesající na (a,b) $\{x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)\}$, pak $\begin{cases}\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f(J)\\ \lim_{x\to a+} f(x) = \inf f(J).\end{cases}$

Je-li f nerostoucí na (a,b) $\{x<y \Rightarrow f(x)\ge f(y)\}$, pak $\begin{cases}\lim_{x\to b-} f(x) = \inf f(J)\\ \lim_{x\to a+} f(x) = \sup f(J),\end{cases}$

kde $\sup f(J)$ a $\inf f(J)$ chápeme v $\mathbb{R}^*$.

(Dk) Věta 3.9 obsahuje mnoho variant, důkaz provedeme pro dvě z nich.

(i) Buď f neklesající v J a $\sup f(J)=+\infty$. Chceme ukázat:

$$\lim_{x\to b-} f(x) = +\infty \iff (\forall L>0)(\exists \delta>0)\left(\forall x\in \begin{cases}(b-\delta,b) & \text{je-li } b\in\mathbb{R}\\ (\frac{1}{\delta},+\infty) & \text{-"- } b=+\infty\end{cases}\right) f(x)>L$$

Vzhledem k monotonii f stačí ukázat:

$(\Delta)\quad (\forall L>0)(\exists x_0<b)(f(x_0)>L)$

Nechť (Δ) neplatí. Pak $(\exists L>0)(\forall x_0<b)(f(x_0)\le L)$, což je však spor se skutečností, že $\sup f(J)=+\infty$.

(ii) Buď f nerostoucí v J a $\sup f(J)=A\in\mathbb{R}$. Chceme ukázat, že

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall x\in \begin{matrix}(a,a+\delta) & \text{je-li } a\in\mathbb{R}\\ (-\infty,-\frac{1}{\delta}) & \text{je-li } a=-\infty\end{matrix}\right) \text{ platí}$$

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon, \text{ což se redukuje na}$$
$$A-\varepsilon < f(x)$$

Opět díky monotonii stačí ukázat, že

$(\tilde\Delta)\quad (\forall\varepsilon>0)(\exists x_0>a)(f(x_0)>A-\varepsilon)$

Kdyby však $(\tilde\Delta)$ neplatilo, pak $(\exists\varepsilon_0>0)(\forall x>a)(f(x)\le A-\varepsilon_0)$ což je $\lightning$ ◩.

$\boxed{\text{VÝZNAMNÝ DŮSLEDEK VĚTY 3.9. PRO POSLOUPNOSTI}}$

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nerostoucí (nebo neklesající), pak $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje (vlastní či nevlastní). Neboli: $\boxed{\text{MONOTÓNNÍ POSLOUPNOST MÁ VŽDY LIMITU}}$

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nerostoucí (nebo neklesající) a omezená zdola (nebo omezená shora), pak $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje a je vlastní.

neboli:

$\boxed{\text{OMEZENÁ MONOTÓNNÍ POSLOUPNOST MÁ VŽDY VLASTNÍ LIMITU.}}$

3.4 Limity posloupností

(*) Existuje-li $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ a rovná se $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$), pak také existuje
$$\lim_{n\to+\infty} f(n)$$

Tak lze spočítat mnoho limit posloupností.

<u>Příklad</u> Spočtěte $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

<u>Řešení</u>: Uvaž $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ a počítejme $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Platí:
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$\overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to0+} \exp\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right) = \exp\left(\lim_{y\to0+} \frac{\ln(1+y)}{y}\right)$$
$$= \underline{\underline{e}}.$$

! POZOR ! NAPROSTO **CHYBNÁ** JE TATO ÚVAHA (jak ukazuje správné řešení výše):
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-krát}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-krát}}$$
$$= 1 \quad \text{neboť} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

URČETE, KDE PŘESNĚ JE ZAKOPANÝ PES !

Následující příklad ukazuje, že opačná implikace k (*) neplatí.

<u>Příklad</u> (NEPLATÍ: $\lim_{n\to+\infty} f(n)$ existuje $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existuje)

<u>Řešení</u>

Definuj
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4}\right) \quad k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, ale $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2}+n\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Tedy $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje.

Platí však následující charakterizace $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pomocí limit posloupností.

$\boxed{\text{Věta 3.10}}$ (Heine - základní věta) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*(\mathbb{C}^*)$.
Platí:

(*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \left(\forall \{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right)\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Víme z předpokladu: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in P_\delta(x_0))(f(x) \in U_\varepsilon(A))$.
Nechť $\{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}$ je libovolná (pevná) posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$: $x_n \in P_\delta(x_0)$. Pak
dle předpokladu $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$, což jsme chtěli ukázat.

$\boxed{\Leftarrow}$ (Hlubší / těžší / netriviální implikace)
Důkaz povedeme sporem, tzn. předpokládáme platnost (PS)(*) a zároveň
$\neg\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right)$, což je ekvivalentní $(\exists \varepsilon_0>0)(\forall \delta$, speciálně pro $\delta = \frac{1}{n})$
existuje $x_n \in P_{\frac{1}{n}}(x_0)$ tak, že $\boxed{f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(A)}$. Takto nalezená
posloupnost $\{x_n\}$ však konverguje k x_0 a dle (PS)(*) platí
$\boxed{f(x_n) \in U_\varepsilon(A)}$ od jistého indexu n_0, což dává spor ↯. ☒

$\boxed{\text{Věta 3.10*}}$ (zesílená Heineho věta) Za předpokladů stejných jako ve Větě 3.10
platí

(**) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff \left(\forall \{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}, \lim x_n = x_0\right)\left(\lim f(x_n) \text{ existuje}\right)$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ stejný jako u Věty 3.10.
$\boxed{\Leftarrow}$ Na první pohled není zřejmé, že pro každou posloupnost je
$\lim f(x_n)$ stejná. Avšak posloupnosti stejnou limitu mít musí.
Kdyby ne, tak existují:

- $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$
- $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ a $\lim f(y_n) = B$
- $A \neq B$.

Pak však sestrojíme posloupnost $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$: $\xi_n = \begin{cases} x_n & n \text{ liché} \\ y_n & n \text{ sudé}. \end{cases}$

Pak určitě $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$, ale $\lim \xi_n$ neexistuje,
což je spor ↯, neboť všechny posloupnosti splňující $\xi_n \to x_0$
musí splňovat, dle předpokladu, $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n)$ existuje. ☒

Heineho větu lze s výhodou využít, chceme-li dokázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje: stačí nalézt dvě posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jdoucí k x_0 tak, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Příklad: Ukažte, že $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

Řešení: Definujme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem $\frac{1}{x_n} = 2\pi n$ tj. $\boxed{x_n = \frac{1}{2\pi n}}$

a Definujme $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — // — $\frac{1}{y_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(1+4\pi n)$ tj. $\boxed{y_n = \frac{2}{\pi(1+4\pi n)}}$

Pak $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n}$

$\boxed{\text{Věta 3.10**}}$ (Heineho "definice" spojitosti) Platí:

$$\boxed{f \text{ je v } x_0 \text{ spojitá} \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)}$$

Dk: Plyne z definice spojitosti a Věty 3.10. ▨

Heineho věta, ale i samotná definice limity vede k otázce, zda lze o existenci limity (fce či posloupnosti) rozhodnout jen z funkčních hodnot f na okolí $P_\delta(x_0)$, aniž bychom tedy pracovali se samotnou hodnotou limity.

Positivní odpověď dává tzv. Bolzano-Cauchyho podmínka. Ještě dříve si však zformulujeme a ukážeme důležitou větu Weierstrassovu. Tato věta říká, že

z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která je konvergentní.

Tuto větu oceníme nejen při důkazu Bolzano-Cauchyho podmínky, ale i dalších hlubokých vět reálné analýzy.

Definice (podposloupnost) Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná posloupnost. Nechť n_k je rostoucí posloupnost přirozených čísel (např. $n_1 = 2, n_2 = 7, n_3 = 1007, n_4 = 1008, n_5 = 2\,356\,421, \dots$) Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazveme podposloupností vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 3.11 (Weierstrass) Z každé omezené posloupnosti (reálných) čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Idea důkazu je následující: z dané omezené posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme vybírat podposloupnost kontrolovanou shora i zdola dvě monotónními posloupnostmi (strážníky), mající dle důsledku Věty 3.9. limity, které se navíc budou shodovat. Tu samou limitu tak bude mít i vybraná podposloupnost.

Dk) Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, tak existují $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$A_0 < a_n < B_0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Definujeme monotónní posloupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto:

- Označ $C_n := \frac{1}{2}(A_{n-1} + B_{n-1})$

- Pak alespoň v jednom z intervalů (A_{n-1}, C_n) a $\langle C_n, B_{n-1})$ leží nekonečně mnoho prvků z $\{a_n\}$.
  - ▶ Je-li ∞-prvků v (A_{n-1}, C_n), polož $\boxed{A_n := A_{n-1}}$ a $\boxed{B_n := C_n}$
  - ▶ Není-li ∞-prvků v (A_{n-1}, C_n), polož $\boxed{A_n = C_n}$ a $\boxed{B_n = B_{n-1}}$
- Protože $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, tak dle Věty 3.9. $\lim_{n\to\infty} A_n$ a $\lim_{n\to\infty} B_n$ existují (vlastní).

Navíc
- $|A_n - B_n| = \frac{1}{2^n}|A_0 - B_0| \longrightarrow 0$ pro $n \to \infty$. Tedy

(•)
- $\lim_{n\to\infty} A_n =: L := \lim_{n\to\infty} B_n$

Nyní vybereme podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ takto:

- $a_{n_0} \in (A_0, B_0)$ zvolme libovolně z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n_1} \in \langle A_1, B_1 \rangle$ zvolme tak, aby $a_{n_1} \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $n_1 > n_0$

⋮

- $a_{n_k} \in \langle A_k, B_k \rangle$ zvolme tak, aby $\{a_{n_k}\} \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $n_k > n_{k-1}$.

Pak z konstrukce plyne

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$$

a dle věty o dvou strážnících (a (*)): $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$; tedy

$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní.

$\boxed{\text{Věta 3.11*}}$ Není-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená shora, pak $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \infty$.

Není-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená zdola, pak $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

Dk: Označ $M_k = \{a_n;\ a_n \geq k\}$. Pak M_k má ∞ prvků a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konstruujeme takto:

- $a_{n_1} \in M_1$ libovolné
- $k > 1$ $\quad a_{n_k} \in M_k$, $\quad n_k > n_{k-1}$.

$\boxed{\text{Věta 3.12}}$ (Bolzano-Cauchyho podmínka; B-C)

Pro funkce

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C}) \iff \boxed{(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x', x'' \in P_\delta(x_0))\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon} \text{ (B-C)}$$

Pro posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C}) \iff \boxed{(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon} \text{ (B-C)}$$

! $\boxed{\text{Definice}}$ Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **CAUCHYOVSKÁ** pokud $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$.
(tedy pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje B-C podmínku).

Dk věty 3.12 $\boxed{\Rightarrow}$ Plyne z nerovnosti

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A|.$$

Sami rozmyslete proč.

$\boxed{\Leftarrow}$ K $\varepsilon = 1$ existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že pro $\hat{x} \in P_\delta(x_0)$ a pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ platí: $\quad f(\hat{x}) - 1 < f(x) < f(\hat{x}) + 1$. Tedy f je na $P_\delta(x_0)$ omezená.

Iterativně:

K $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existuje $P_{\delta_n}(x_0)$ takové, že pro $x_n \in P_{\delta_n}(x_0)$ a pro
(•) všechna $x'' \in P_{\delta_n}(x_0)$ $|f(x'') - f(x_n)| < \frac{1}{n}$. $(0<\delta_n<\delta_{n-1}\ \forall n)$

Tak $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$ a $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezené.

Dle Weierstrassovy věty 3.11 existuje $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že

(••) $f(x_{n_k}) \to A$ pro $k \to +\infty$.

Pak víme

$$|f(x) - A| = |f(x) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - A|$$

a druhý člen lze udělat libovolně malý díky (••)

a ~~druhý~~ první člen je malý jak potřeba dle (•). ☒

Existuje ještě další možnost jak přiřadit dané posloupnosti posloupnost konvergentní.

Def. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme $b_n := \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$
$c_n := \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$

Pak
- $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$

a
- $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_n \leq \dots$

Navíc

(☆) $$c_n \leq a_n \leq b_n$$

Existují (díky monotonii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Označme

je $\boxed{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}$ a $\boxed{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n}$

$\boxed{\overline{\lim}\, a_n}$ a $\boxed{\underline{\lim}\, a_n}$

Z (☆) plyne: • $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a také

(△) • $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje.

Vidíme: Pokud $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje.

Naopak, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, pak se $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ jak dokážeme níže. Platí tedy:

Věta 3.13 (Jiná charakterizace existence limity posloupnosti)

$\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^*$ existuje $\iff$ $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$

$\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) \quad \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)$

Dk $\boxed{\Leftarrow}$ již dokázáno: plyne z ($\triangle$).

$\boxed{\Rightarrow}$ Buď $\varepsilon>0$ dáno libovolné, ale pevné. Ukážeme, že

$$0 \le \left(\limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n\right) < \varepsilon.$$

K danému $\varepsilon>0$ najdeme n_0 tak, že $|a_i - a_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $i,j \ge n_0$. Pak však

$$b_n := \sup\{a_k;\ k \ge n \ge n_0\} \quad \text{a} \quad c_n := \inf\{a_k;\ k \ge n \ge n_0\}$$

splňují $0 \le (b_n - c_n) \le |a_i - a_j| < \frac{\varepsilon}{2}$

Tedy $\quad 0 \le \underbrace{\lim b_n}_{=\overline{\lim}\, a_n} - \underbrace{\lim c_n}_{=\underline{\lim}\, a_n} < \varepsilon$, což jsme chtěli ukázat.

4. HLUBŠÍ VLASTNOSTI SPOJITÝCH A DIFERENCOVATELNÝCH FUNKCÍ

4.1 LOKÁLNÍ EXTRÉMY, GLOBÁLNÍ EXTRÉMY. VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCÍ NA UZAVŘENÉM INTERVALU.

Def • Buď $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$. Řekneme, že

(*) f má v $x_0 \in D_f$ $\begin{Bmatrix} \text{lokální MINIMUM} \\ \text{lokální MAXIMUM} \end{Bmatrix}$ $\overset{df}{\equiv}$ Existuje-li $P_\delta(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$: $\begin{Bmatrix} f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{Bmatrix}$

• Lokální extrémy = body, ve kterých f nabývá lokálního minima či maxima

• Ostrý lokální extrém = buď ostré lokální minimum nebo ostré lokální maximum
$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{nerovnosti v (*) jsou ostré, tj. } \forall x \in P_\delta(x_0):\ \begin{Bmatrix} f(x) > f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \end{Bmatrix}}$

Věta 4.1 NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE LOKÁLNÍHO EXTRÉMU

Je-li x_0 lokální extrém fce f a $f'(x_0)$ existuje, pak nutně $f'(x_0) = 0$.

Dk Víme, že $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$. Musíme tedy vyloučit zbylé dva případy. Když $f'(x_0) > 0$, pak z vlastnosti nenulové limity (Věta 6) dostáváme $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$.

To však znamená: pro $x \in P^+_\delta(x_0)$: $f(x) > f(x_0)$
pro $x \in P^-_\delta(x_0)$: $f(x) < f(x_0)$

což znamená, že f nemá v x_0 lokální extrém. Spor. ↯
Pokud by $f'(x_0) < 0$, postupujeme podobně. ∎

! Pozor! Podmínka $f'(x_0) = 0$ nestačí (tj. není postačující) k tomu, aby f měla v x_0 lokální extrém, jak ukazuje následující příklad:

Př. Pro $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 3x^2$ a $f'(x) = 0$ pro $x = 0$.
Ale f nemá v $x_0 = 0$ lokální extrém: v $P^+_\delta(0)$: $x^3 > 0$,
v $P^-_\delta(0)$: $x^3 < 0$. ∎

Tedy opačná (obrácená) implikace k Větě 4.1. neplatí. Věta 4.1 nám však indikuje, kde může mít fce lokální extrémy: podezřelými body jsou body, kde $f'(x_0)$ neexistuje nebo $\boxed{f'(x_0) \text{ existuje a } f'(x_0) = 0}$.

(Def) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\emptyset \neq M \subset D_f$. Řekneme, že

<u>f nabývá na M globální extrém</u> $\overset{df}{\equiv}$ $\exists x_0 \in M$ tak, že $\forall x \in M$ je

BUĎ	$f(x) \le f(x_0)$	globální maximum
NEBO	$f(x) \ge f(x_0)$	globální minimum

Ukážeme si (postupně) několik významných vlastností funkcí, které jsou <u>spojité</u> na <u>uzavřeném intervalu</u>:

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ spojitá na } \langle a,b\rangle \\ \| \text{ označení} \\ f \in C(\langle a,b\rangle) \end{array}} \Rightarrow$$

angl. <u>continuous</u>

(1) f nabývá na $\langle a,b\rangle$ globální minimum a globální maximum, speciálně

(2) f je omezená na $\langle a,b\rangle$

(3) f nabývá všech mezihodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$

(4) f je stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$

První a druhá vlastnost plynou z následující věty.

Věta 4.2 Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak f nabývá na $\langle a,b\rangle$ maxima i minima. Speciálně: f je omezená na $\langle a,b\rangle$.

(Dk) Označme $S := \sup_{x \in \langle a,b\rangle} \{f(x)\} = \sup f(\langle a,b\rangle)$ (v $\mathbb{R}^*$ vždy existuje).

Ukážeme, že existuje $x_0 \in \langle a,b\rangle$ tak, že $f(x_0) = S$.

[V tuto chvíli však ani nevíme, že $S < +\infty$.].

Z definice suprema však plyne:

- je-li $S \in \mathbb{R}$, pak pro $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in \langle a,b\rangle$ tak, že $S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S$
- kdyby $S = +\infty$, pak pro $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in \langle a,b\rangle$ tak, že $f(x_n) > n$

V obou případech $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{a \le x_n \le b}$ a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená.

Z Weierstrassovy věty plyne existence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Z věty o zachování nerovností a proto, že $a \le x_{n_k} \le b$ plyne $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Pak však $x_{n_k} \to x_0$ a dle Heineho věty a spojitosti f: $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in \mathbb{R}$. Protože $f(x_n) \to S$ tak $\boxed{f(x_0) = S}$ ∎

$\boxed{\text{Věta 4.3}}$ (Jak nalézt extrémy?) Buď $f \in C((a,b))$ a $A = \lim_{x \to a+} f(x) \in \mathbb{R}$ a $B = \lim_{x \to b-} f(x) \in \mathbb{R}$. Označme

$$P := \{ x \in (a,b) ;\ f'(x) = 0 \text{ nebo } f'(x) \text{ neexistuje} \} \quad \text{a} \quad H := \max_{x \in P} f(x)$$

Pak platí

$$H = \max_{x \in (a,b)} f(x) \iff H \geq \max\{A, B\}$$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Je-li H maximální hodnota, pak $f(x) \leq H$ pro všechna $x \in (a,b)$. Tedy, dle věty o limitním přechodu v nerovnostech

$$\underline{A := \lim_{x \to a+} f(x) \leq H} \quad \text{a} \quad \underline{B := \lim_{x \to b-} f(x) \leq H}.$$, což implikuje $\max\{A,B\} \leq H$

$\boxed{\Leftarrow}$ Je-li $H \geq \max\{A,B\}$ a kdyby H nebyl maximem $f(x)$ přes $x \in (a,b)$, pak existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) > H$. Pak také $f(x_0) > A$ a $f(x_0) > B$. Z vlastností $\lim_{x \to a+} f(x)$ a $\lim_{x \to b-} f(x)$ plyne existence $\delta > 0$ tak, že

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (a, a+\delta) \cup (b, b-\delta).$$

Tedy $x_0 \in \langle a+\delta, b-\delta \rangle$, kde je f spojitá. Dle Věty 4.2 f nabývá v $\langle a+\delta, b-\delta \rangle$ globální maximum v nějakém bodě $z \in \langle a+\delta, b-\delta \rangle$. Pak však $f(z) \geq f(x_0) > H$ a protože z je extrém, tak z pohledu derivace mohou nastat jen dva případy: buď $f'(z) = 0$ nebo $f'(z)$ neexistuje. V každém případě $z \in P$ a dostáváme spor s definicí H, coby $\sup_{x \in P} f(x)$.

Q.E.D.

Věta 4.3 poskytuje návod k hledání extrémů f na množině $\langle a,b \rangle$. Nejdříve identifikujeme množinu podezřelých bodů

$$P := \{ x \in (a,b) ;\ f'(x) = 0 \text{ nebo } f'(x) \text{ neexistuje} \} \cup \{a\} \cup \{b\}.$$

Pak hledáme $\max_{x \in P} f(x)$ a $\min_{x \in P} f(x)$. Protože P je často konečné, je proces snadno zvládnutelný.

Příklad Najděte extrémy funkce $f(x) = 9|x| - x^3$ na $\langle -2,2 \rangle$.

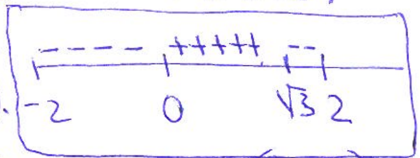
Řešení Maximum i minimum určitě existují neboť f je spojitá na $\langle -2,2\rangle$, tj. $f \in C(\langle -2,2\rangle)$. Protože $f'(x)$ existuje v $(-2,0)\cup(0,2)$ a zde navíc platí
$$f'(x) = 9\,\mathrm{sgn}\,x - 3x^2 = 3\left(3\,\mathrm{sgn}\,x - x^2\right) = \begin{cases} 3(3-x^2) & \text{na } (0,2), \\ -3(3+x^2) & \text{na } (-2,0). \end{cases}$$

a tak $f'(x)=0$ v $(-2,0)\cup(0,2) \iff x=\sqrt{3}$, tak množinu podezřelých bodů P tvoří: $P = \{-2, 0, \sqrt{3}, 2\}$. Máme

x	-2	0	$\sqrt{3}$	2
$f(x)$	26	0	$6\sqrt{3}$	10

a odsud plyne, že $x=-2$ je bod globálního maxima,
$x = 0$ — " — minima.

Z vypočtené $f'(x)$ také plyne, že $f'(x)$ je kladná na $(-2,0)$ a $(\sqrt{3},2)$ a záporná na $(0,\sqrt{3})$.



Tedy f klesá na $(-2,0)$, roste na $(0,\sqrt{3})$ a klesá na $(\sqrt{3},2)$.
Tedy v -2 a $\sqrt{3}$ jsou lokální maxima a v 0 a 2 lokální minima. ∎

Věta 4.4 (Darbouxova věta o nabývání mezihodnot). Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $c \in (f(a); f(b))$ $(\exists x_0 \in \langle a,b\rangle)$ $f(x_0) = c$.

Dk Když $f(a) = f(b)$, jsme hotovi. Je-li $f(a) \neq f(b)$, lze předpokládat, že např. $f(a) < f(b)$ [jinak postupujeme podobně.].
Označme $M := \{x \in \langle a,b\rangle ;\ f(x) < c\}$. Pak platí:

- $M \neq \emptyset$ neboť $a \in M$
- M obsahuje $(a, a+\delta)$ neboť $f(a) < c$ a $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ ze spojitosti.
- M je omezená
- $M \neq \langle a,b\rangle$ neboť $b \notin M$
- M neobsahuje $(b-\delta, b)$ pro nějaké $\delta > 0$ (opět proto, že $f(b) > c$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$ ze spojitosti)

Existuje tedy $x_0 \in (a,b)$ tak, že $x_0 = \sup M$. Pak však

$x_n := x_0 - \frac{1}{n} \in M$ a $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ ale $f(x_n) < c \Rightarrow f(x_0) \leq c$,

$y_n := x_0 + \frac{1}{n} \notin M$ a $y_n \to x_0 \Rightarrow f(y_n) \to f(x_0)$, ale $f(y_n) \geq c \Rightarrow f(x_0) \geq c$,

což je možné splnit jen pokud $\underline{f(x_0) = c}$. To je však tvrzení, které jsme chtěli ukázat. ∎

$\boxed{\text{Věta 4.5}}$ Buď f $\left\{\begin{matrix}\text{neklesající} \\ \text{nerostoucí}\end{matrix}\right\}$ na (a,b) a nechť $\underbrace{f((a,b))}_{=\text{obor hodnot } R_f}$ je interval.

Pak f je spojitá na (a,b).

Dk Sporem. Kdyby f nebyla spojitá na (a,b), tak existuje $x_0 \in (a,b)$, ve kterém f není spojitá. přitom však, díky monotónii, existují v bodě x_0 jednostranné limity:

$$\alpha = \lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{a} \quad \beta = \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

($\alpha \neq \beta$ neboť f není v x_0 spojité)

Opět z monotónie f však plyne, že interval mezi α a β není částí oboru hodnot R_f, což je spor s předpokladem, že $R_f = f((a,b))$ je interval. ▨

$\boxed{\text{Věta 4.6}}$ (O existenci spojité inverzní funkce)

Buď $f \in C((a,b))$ rostoucí (nebo klesající) na (a,b); $A := \lim_{x\to a+} f(x)$, $B := \lim_{x \to b-} f(x)$

Pak k f existuje f^{-1} a platí:
- $D_{f^{-1}} = (A;B)$
- $R_{f^{-1}} = (a,b)$
- f^{-1} je spojitá a rostoucí (nebo klesající) na $(A;B)$.

Dk Připomeňme, že $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$ existují dle Věty 3.9, ale A, B nemusí být vlastní.

$\boxed{\text{Kdyby } A, B \in \mathbb{R}}$, pak lze dodefinovat/předefinovat f v a a b těmito limitami a $f \in C(\langle a,b \rangle)$. Pak dle Darbouxovy věty 4.4 a díky ryzí monotónii:

$$\forall C \in (A;B) \text{ existuje } \underline{\text{právě jedno}}\ x_C \in (a,b) : f(x_C) = C$$

Definuj $\boxed{f^{-1} : C \mapsto x_C}$ a dle výše uvedeného je to funkce

Nanic a) $\underline{f^{-1} : (A;B) \overset{\text{na}}{\to} (a,b) \text{ je rostoucí}}$ (resp. klesající)

Vskutku: chceme $\boxed{C < D \Rightarrow x_C < x_D}$

ale to je ekvivalentní $\neg(x_C < x_D) \Rightarrow \neg(C < D) \Leftrightarrow x_C \geq x_D \Rightarrow \underset{f(x_C)}{C} \geq \underset{f(x_D)}{D}$

což plyne z toho, že f je rostoucí (rovnost nastane jen pro $x_C = x_D$)

b) $\underline{f^{-1} \text{ je spojitá na } (A;B)}$, což plyne z předchozí věty neboť $f^{-1}((A;B)) = (a,b)$ je interval.

$\boxed{\text{Kdyby } A \in \mathbb{R}, B = +\infty}$ a f rostoucí a $C \in (A,+\infty)$. Pak existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) > C$. Uvažme $f|_{\langle a, x_0 \rangle}$. Pak $f \in C(\langle a, x_0 \rangle)$ a postupujme jako výše. ▨

Když $\boxed{A = -\infty, B \in \mathbb{R}}$ nebo $\boxed{A = -\infty, B = +\infty}$ postupujeme podobně.

$\boxed{\text{Def}}$ (stejnoměrné spojitosti) Buď f definována na (otevřeném, uzavřeném či polouzavřeném) intervalu J. Pak

f je stejnoměrně spojitá na J $\equiv (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x', x'' \in J)$:
$$|x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Cvičení: Je-li f stejnoměrně spojitá v $J \Rightarrow f \in C(J)$.

$\boxed{\text{Příklad}}$ $f(x) = \frac{1}{x} \in C((0,1))$, ale $f(x)$ není stejnoměrně spojitá na $(0,1)$, neboť
$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| \underset{x'<x''}{=} \frac{x''-x'}{x'x''} \underset{x'=\frac{x''}{2}}{=} \frac{\frac{x''}{2}}{\frac{(x'')^2}{2}} = \frac{1}{x''} > 1 \quad \text{pro } 0<x''<1$$

Proto je zajímavé, že platí:

$\boxed{\text{Věta 4.7}}$ (Cantorova) Je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak f stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$.

Dk Předpokládejme $f \in C(\langle a,b\rangle) \wedge f$ není stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$.
Pak $(\exists \varepsilon_0>0)(\forall \delta, \text{spec. } \delta=\frac{1}{n})\ \exists x_n', x_n'' \in \langle a,b\rangle$ tak, že
$$|x_n'-x_n''| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0. \qquad (\circledcirc)$$
Protože $\{x_n'\}$ je omezená, dle Weierstrassovy věty existuje
$$\{x_{n_k}'\} \subset \{x_n'\} \text{ tak, že } x_{n_k}' \to x_0 \text{ kde } x_0 \in \langle a,b\rangle.$$
Ale pak $x_{n_k}'' \to x_0$ také neboť $|x_n'-x_n''| < \frac{1}{n}$.

Tak
$$f(x_{n_k}') \to f(x_0)$$
$$f(x_{n_k}'') \to f(x_0)$$
dle Heineho věty,

což ihned dává $\lightning$ s $(\circledcirc)$.

4.2 Věty o střední hodnotě a jejich důsledky

Věta 4.8 (ROLLEOVA) Pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí:

Je-li $\left\{\begin{array}{l} \cdot\ f \in C(\langle a,b\rangle) \\ \cdot\ f'(x) \text{ existuje pro } \forall x \in (a,b) \\ \cdot\ f(a) = f(b) \end{array}\right\}$, pak $\exists\, \xi \in (a,b):\ f'(\xi) = 0$

Dk Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$ taková, že $f(a) = f(b)$. Pak musí nutně nastat jedna z následujících možností:

(i) $f(x) = C \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$ (tedy f je konstantní fce)

(ii) $\exists\, x_1 \in (a,b)$ $\quad f(x_1) > f(a) = f(b)$

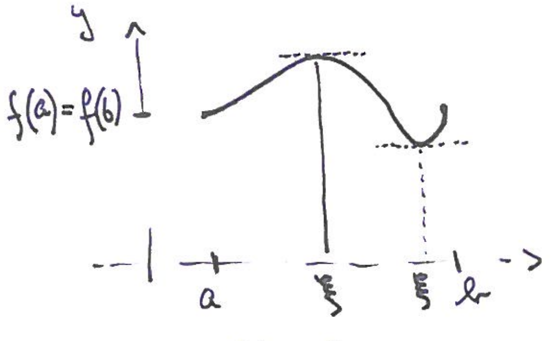
(iii) $\exists\, x_2 \in (a,b)$ $\quad f(x_2) < f(a) = f(b)$.

Pokud nastane (i), pak za ξ lze vzít jakýkoliv bod z (a,b).
Pokud nastane (ii), pak dle Věty 4.2 víme, že existuje $\xi_{MAX} \in (a,b)$
$f(x) \leq f(\xi_{MAX})$ $\forall x \in (a,b)$. Protože $f'(\xi_{MAX})$ existuje,
tak (nutně) dle Věty 4.1 $f'(\xi_{MAX}) = 0$.
Pokud nastane (iii), argumentujeme stejně: $\exists\, \xi_{MIN} \in (a,b)$ tak, že
$f(x) \geq f(\xi_{MIN})$ $\forall x \in (a,b)$. Opět $f'(\xi_{MIN}) = 0$. ▨

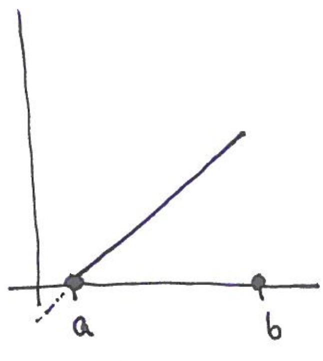
- Věta Rolleova je schématicky znázorněna na Obr. 1.
- Předpoklady věty 4.8 nelze oslabit, jak ukazují tyto příklady:

Př. 1 Buď $f(a) = 0 = f(b)$, $f(x) = x - a$ pro $x \in (a,b)$, viz Obr. 2.
Pak $f(a) = f(b)$, $f \in C((a,b))$, $\exists\, f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$ ale neexistuje $\xi \in (a,b)$
$f'(\xi) = 0$.

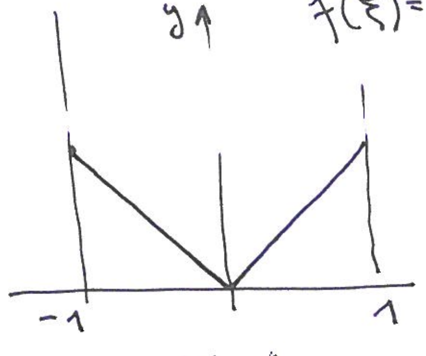
Př. 2 $f(x) = |x|$ na $\langle -1,1\rangle$ splňuje $f(-1) = f(1)$, $f \in C(\langle -1,1\rangle)$,
$f'(x)$ existuje $\forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, viz Obr. 3, ale opět neex. $\xi \in (-1,1)$
$f'(\xi) = 0$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

$\boxed{\text{Př. 3}}$ Věta 4.8 neplatí pro $f: (a,b) \to \mathbb{C}$. Stačí uvažovat $f(x) = \cos x + i \sin x$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$.

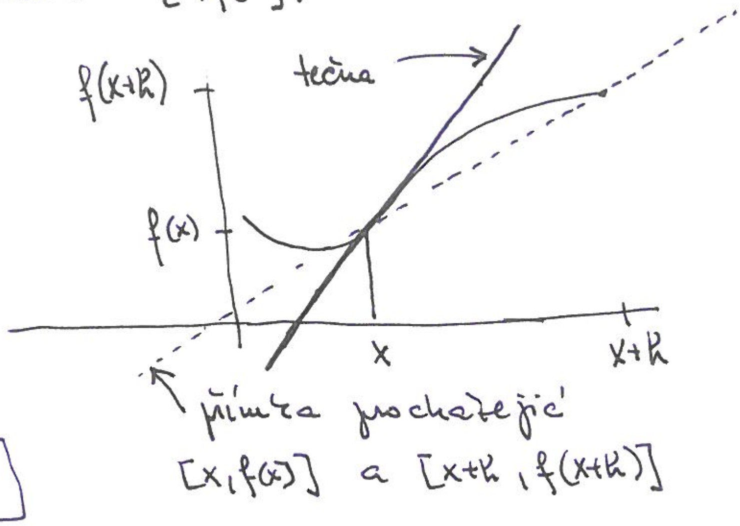
Připomeňme si situaci na začátku kapitoly o limitě a derivaci. Mám dánu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hledám tečnu ke grafu fce f ($f'(x)$ existuje) v bodě $[x, f(x)]$.

Protože rovnice přímky procházející body $[x, f(x)]$ a $[x+h, f(x+h)]$ má tvar:

$$y(h) = f(x) + \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}(x+h-x),$$

hledaná rovnice tečny má tvar

$$\boxed{t(h) = f(x) + f'(x)\,h \quad \forall h \in \mathbb{R}}$$



Body $\xi \in (a,b)$ z Rolleovy věty 4.8 jsou body, kde tečna je rovnoběžná s osou x: $t(h) = f(\xi)$ $\forall h \in \mathbb{R}$.

DŮLEŽITÝMI ZOBECNĚNÍMI ROLLEOVY VĚTY 4.8 JSOU LAGRANGEOVA A CAUCHYHO VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ.

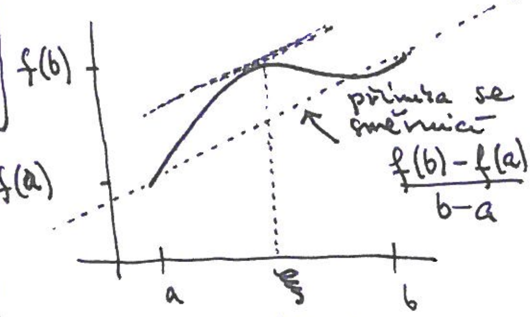
$\boxed{\text{Věta 4.9}}$ (LAGRANGEOVA věta o střední hodnotě = LVOSH)

Pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí:

Je-li $\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ f \in C(\langle a,b \rangle) \\ \cdot\ \exists f'(x) \text{ pro } \forall x \in (a,b) \end{array} \right\}$, pak $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

viz Obr. 4

Dk Definuj $\boxed{F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$



Obr. 4

Potom $\left. \begin{array}{l} F(a) = f(a) \\ F(b) = f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$.

Navíc $F \in C(\langle a,b \rangle)$ a $F'(x)$ existuje pro všechna $x \in (a,b)$. Tedy F splňuje předpoklady Rolleovy věty 4.8 a existuje tedy $\xi \in (a,b)$ tak, že $F'(\xi) = 0$. Pak víme $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ▨

[z derivováním F v rámečku]

$\boxed{\text{Věta } 4.10}$ (CAUCHYHO věta o střední hodnotě)

Pro $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí:

Pokud $\begin{cases} \bullet\ f, g \in C(\langle a, b\rangle) \\ \bullet\ f'(x) \text{ a } g'(x) \quad \text{existují } \forall x \in (a, b) \end{cases}$, pak $\exists \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big) = g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$, pokud mohu dělit.

viz obr. 5

(Dk) Nyní definujme

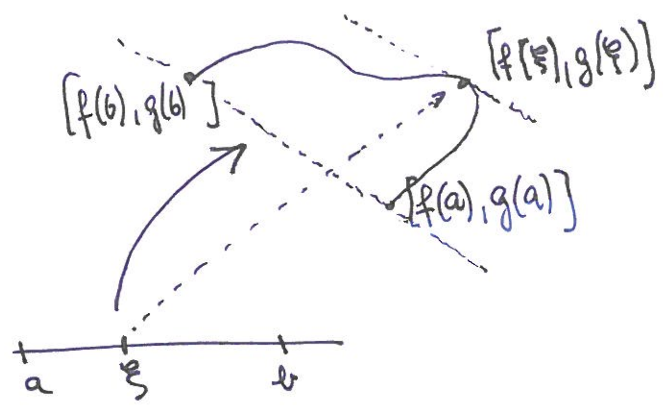
$$F(x) := \big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(g(x)-g(a)\big)\big(f(b)-f(a)\big)$$

Pak:

- $F(a) = 0 = F(b)$
- $F \in C(\langle a, b\rangle)$
- $F'(x) = f'(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(x)\big(f(b)-f(a)\big)$ existují pro $\forall x \in (a, b)$

Křivka: zobrazení A $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$

$x \longmapsto (f(x), g(x))$



obr. 5

Dle Rolleovy věty 4.8: $\exists \xi \in (a, b)$

$F'(\xi) = 0$, což implikuje,

spolu se vzorcem pro $F'(x)$, tvrzení věty.

$\boxtimes$

$\boxed{\text{DŮSLEDKY Lagrangeovy VOSH}}$

$\boxed{1}$ Dokončení důkazu o (ne)jednoznačnosti primitivní funkce, viz $\boxed{\text{Věta 18}}$

Chceme ukázat: Pokud $H'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, pak $H(x) = C \in \mathbb{R}$.

Víme, že H je spojitá v každém $x \in (a,b)$ (neb $H'(x)$ existuje). Buď $x_0 \in (a,b)$ pevné. Ukážeme, že pro $\forall x \in (a,b)$: $H(x) = H(x_0)$.

Buď $x \in (a,b)$ pevné. Pak $H \in C(\langle x; x_0\rangle)$ a dle LVOSH: $\exists \xi \in (x; x_0)$

$$H'(\xi) = \frac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0}$$ ale $H'(\xi) = 0$. Tedy $H(x) = H(x_0)$. $\boxtimes$

$\boxed{2}$ Pomocí LVOSH lze dokázat první nerovnosti. Například platí:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

(Dk) $$\frac{\sin x - \sin y}{x-y} \underset{\text{LVOSH}}{=} \cos \xi,$$ kde ξ je nějaký bod mezi x a y

Protože $|\cos \xi| \leq 1$, tvrzení snadno plyne.

$\boxtimes$

[3] Platí důležitá věta o jednostranných derivacích:

Máme-li $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ takovou, že $f'(x)$ existuje pro všechna $x\in(a,b)$.

Pak má smysl zkoumat $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ a $\lim\limits_{x\to b-} f'(x)$.

Zajímá nás jednak zda tyto limity existují a také, zda se rovnají $f'(a+)$ a $f'(b-)$ definované jako

$$f'(a+) = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{resp.} \quad f'(b-) = \lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

Odpověď je zformulována v následujícím tvrzení.

$\boxed{\text{Věta 4.11}}$ (O jednostranných derivacích). Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taková, že

(i) f je spojitá v a zprava

(ii) existuje $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ a rovná se $A\in\mathbb{R}^*$

Potom $f'(a+)$ existuje a rovná se A.

Dk: Z (ii) plyne, že $f'(x)$ musí existovat na jistém pravém okolí bodu a. V těchto bodech je f spojitá. Víme tedy, že existuje $\delta>0$ tak, že
- f je spojitá na $\langle a, a+\delta)$
- $f'(x)$ existuje na $\langle a, a+\delta)$

Dle LVOSH (Věta 4.9) však pro $\forall x\in(a,a+\delta)$ $\exists \xi_x\in(a,x)$ tak, že

$$\boxed{f'(\xi_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Přechodem k $\lim\limits_{x\to a+}$ dostáváme tvrzení. ∎

Příklad Buď $f(x)=\arcsin x : \langle -1,1\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$ rostoucí.

Určete $f'(-1+)$ a $f'(1-)$.

Řešení: Protože f je spojitá v -1 zprava a v 1 zleva, a protože $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x\in(-1,1)$, tak dle Věty 4.11

$$f'(-1+) = \lim_{x\to -1+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \quad \text{a} \quad f'(1-) = \lim_{x\to 1-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

∎

[4] $\boxed{\text{Platí následující charakterizace monotónie pro diferencovatelné funkce}}$

tj. funkce, které mají derivaci všude v intervalu

$\boxed{\text{Věta 4.12}}$ Buď $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a,b)$. Platí:

(1) $f'(x) \begin{Bmatrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{Bmatrix}$ pro všechna $x \in (a,b)$ $\boxed{\Leftrightarrow}$ f je $\begin{Bmatrix} \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \end{Bmatrix}$ v (a,b)

(2) Je-li $f'(x) \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$ —"— $\boxed{\Rightarrow}$ f je $\begin{Bmatrix} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{Bmatrix}$ v (a,b).

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $x, y \in (a,b)$, pak $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \underset{\uparrow \text{LVOSH}}{=} f'(\xi_{x,y}) \geq 0$

což implikuje f je neklesající.

$\boxed{\Leftarrow}$ Je-li f neklesající v (a,b), pak pro $\forall x, y \in (a,b)$

$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ tedy také $\lim_{x \to y} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y) \geq 0$, což dává tvrzení.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Podobně jako v důkazu $\boxed{\Rightarrow}$ v (1); jen nerovnosti jsou ostré. ▨

$\boxed{\text{POZOR!}}$ Funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí v $\mathbb{R}$, ale $f'(x)$ není kladná ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$. Tedy opačné implikace v (2) NEPLATÍ.

Důsledkem Cauchyho věty o střední hodnotě jsou
(i) důkaz l'Hospitalova pravidla
(ii) tvar zbytku při rozvoji funkcí do Taylorových polynomů.
Viz konec semestru

Tuto sekci zakončíme formulací postačujících podmínek pro lokální extrémy.

Věta 4.13 (Lokální extrémy – postačující podmínky). Nechť f je spojitá v x_0.

Platí:

(1) Je-li $f \left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\\ \text{nerostoucí}\\ \text{neklesající}\end{array}\right\}$ v $P_\delta^-(x_0)$ a $\left\{\begin{array}{l}\text{klesající}\\ \text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\\ \text{nerostoucí}\end{array}\right\}$ v $P_\delta^+(x_0)$, pak má f v x_0 $\left\{\begin{array}{l}\text{ostré maximum}\\ \text{ostré minimum}\\ \text{minimum}\\ \text{maximum}\end{array}\right.$

(2) Je-li $f' \left\{\begin{array}{l}>0\\ <0\\ \le 0\\ \ge 0\end{array}\right\}$ v $P_\delta^-(x_0)$ a $f' \left\{\begin{array}{l}<0\\ >0\\ \ge 0\\ \le 0\end{array}\right\}$ v $P_\delta^+(x_0)$, —||— .

Dk (2) plyne z (1) a Věty 4.12.

Ad (1) plyne z definice.

Věta 4.14 Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Pak platí:

(1a) Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak f má v x_0 ostré minimum

(1b) Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, —||— maximum.

(2a) Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in P_\delta^+(x_0)$ a $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in P_\delta^-(x_0)$.

(2b) Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že $\left\{\begin{array}{l} f(x) < f(x_0) \text{ v } P_\delta^+(x_0)\\ f(x) > f(x_0) \text{ v } P_\delta^-(x_0)\end{array}\right.$

Dk Provedeme indukcí.

KROK 1 Je-li $n = 1$ a $f'(x_0) > 0$, pak $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ a (2a) platí (Situace pro $f'(x_0) < 0$ je podobná).

Je-li $n = 2$ a $f''(x_0) > 0$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že $\left\{\begin{array}{l} f'(x) > f'(x_0) = 0 \text{ pro } x \in P_\delta^+(x_0)\\ f'(x) < f'(x_0) = 0 \text{ pro } x \in P_\delta^-(x_0)\end{array}\right.$

tedy f je $\left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí v } P_\delta^+(x_0)\\ \text{klesající v } P_\delta^-(x_0)\end{array}\right\} \Rightarrow f$ má v x_0 minimum.

KROK 2 Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Dokažme jej pro $n+1$.

Je-li $(n+1)$ liché, pak $0 < f^{(n+1)}(x_0) = (f')^{(n)}(x_0)$ a dle indukčního předpokladu (n sudé) má f' v x_0 ostré minimum, tzn. $\exists \delta > 0$ tak, že $f'(x) > f'(x_0) \underset{\uparrow \text{ předpoklad věty}}{=} 0$ pro $\forall x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f$ rostoucí v $P_\delta(x_0)$.

Speciálně $\left\{\begin{array}{l} f(x) > f(x_0) \text{ pro } x \in P_\delta^+(x_0)\\ f(x) < f(x_0) \quad \text{—||— } P_\delta^-(x_0)\end{array}\right\}$.

Je-li $(n+1)$ sudé, postupujeme podobně. Zkuste sami. ∎

4.3 Konvexita (konvexnost), KONKÁVITA (konkávnost) FCE, KŘIVOST Grafu funkce

Definice Buď $J \subset \mathbb{R}$ interval a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že

f je na J $\left\{\begin{matrix} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{matrix}\right\}$ jestliže $\forall x, y, z \in J$ splňující $x < y < z$ platí:

$$\boxed{f(y) \left\{\begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix}\right\} f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)}$$

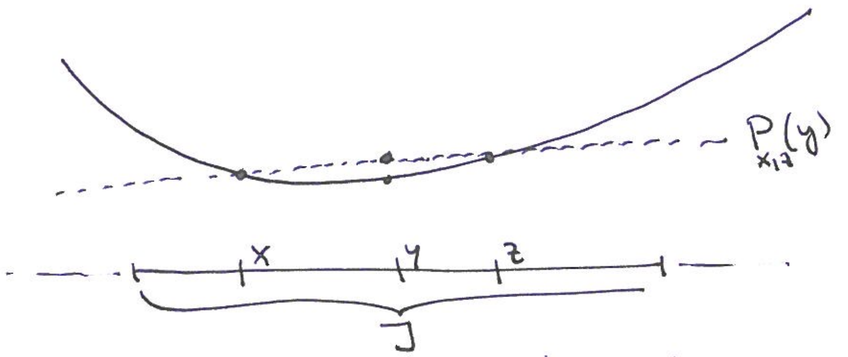
Jsou-li nerovnosti ostré, mluvíme o ryzí konvexitě či ryzí konkávitě

- Podobně jako monotónie, ani konvexita/konkávita nevyžadují existenci derivací. Podobně jako u monotónie budeme zkoumat jak z existence derivací rozpoznat, kdy a kde je f konvexní či konkávní.

- Geometrické znázornění konvexity/konkávity funkce:

  Funkce $P_{x,z}(y) := f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ popisuje přímku procházející body $(x, f(x))$ a $(z, f(z))$

  Funkce f je konvexní: $P_{x,z}(y) \geq f(y)$ pro všechna y ležící mezi x a z; a pro všechna $x, z \in J$.



- Jinou formulaci konvexity dostaneme tak, že y zapíšeme jako konvexní kombinaci x a z, tj. $y = \lambda x + (1-\lambda) z$ $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$.

  Pak f je konvexní v J $\stackrel{\text{df.}}{\equiv}$ $f(\lambda x + (1-\lambda) z) \leq \underbrace{f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\left[(\lambda-1)x + (1-\lambda) z\right]}_{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)}$

neboli

pro $x_1 = x$, $x_2 = z$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = (1-\lambda)$

$$\boxed{\begin{matrix} \forall x_1, x_2 \in J \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \langle 0,1 \rangle \\ \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 1 \end{matrix}} : \boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}$$

$\boxed{\text{Věta 4.15}}$ (Jensenova nerovnost) Buď $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Je-li f $\left\{ \begin{matrix} \text{konvexní} \\ \\ \text{konkávní} \end{matrix} \right\}$ v J, pak pro všechna $x_1, \dots, x_n \in J$ platí

$$(J) \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \\ \geq \end{matrix} \right\} \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Dk matematickou indukcí

$\boxed{\text{Krok 1}}$ Pro $n = 2$ je Jensenova $\leq$ (J) přímý důsledek definice konvexity, jak ukázáno výše.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ Nechť (J) platí pro $n \in \mathbb{N}$. Ukažme, že platí pro $n+1$.

Platí:

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})}_{\text{konvexita pro } n=2} \right\}$$

$$\geq (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n-1}) + f\left(\frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \right) \right\}$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \right)$$

$$\underset{\text{předpoklad}}{\overset{\text{Indukční}}{\geq}} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Jedním z bezprostředních důsledků Jensenovy nerovnosti je tzv. AG-nerovnost

$\boxed{\text{Věta 4.16}}$ (AG $\leq$) Buď $n \in \mathbb{N}$, $a_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$.

Pak platí:

$$(AG) \qquad \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}_{\text{geometrický průměr}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\text{aritmetický průměr}}$$

(BÚNO: $a_k > 0 \ \forall k$)

Dk Protože je $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_0$ rostoucí, stačí ukázat, že

$$\frac{1}{n} \log a_1 + \frac{1}{n} \log a_2 + \dots + \frac{1}{n} \log a_n \leq \ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)$$

což je však Jensenova nerovnost pro logaritmus pokud je logaritmus konkávní, což si ukážeme níže. ▨

$\boxed{\text{Věta 4.17}}$ (Další charakterizace konvexity) NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ JSOU EKVIVALENTNÍ

(i) f je konvexní na intervalu J

(ii) $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ pro $(\forall x,y,z \in J)$: $x<y<z$

(iii) $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ pro —— || ——

(iv) $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ pro —— || ——

viz Obr 6 dole. Pro charakterizaci ryzí konvexity platí ostré nerovnosti.

Dk Definice konvexity říká, že pro $x<y<z$ je $\boxed{f(y) \le P(y)}$

kde přímka $P(y)$ je dána vztahem

$$P(y) = f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{x-y}(y-x) \quad \text{ale také} \quad P(y) = f(z) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-z),$$

což implikuje ihned (ii) a (iv). Tvrzení (iii) plyne přímo z (ii) a (iv).

[je ekvivalentní s]

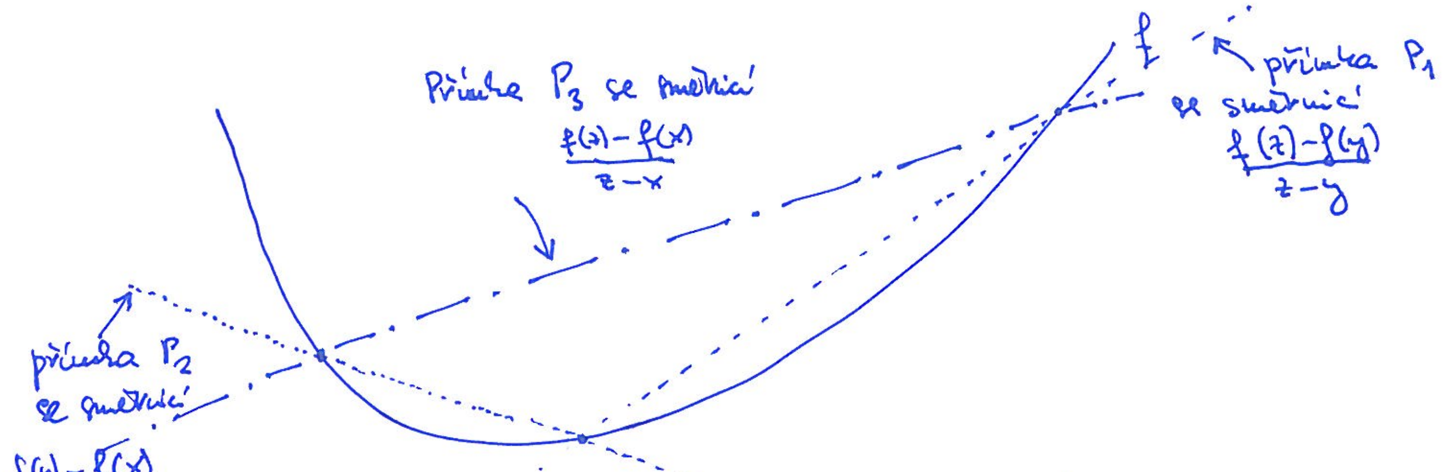
Zbývá ukázat, že (iii) $\Rightarrow$ konvexita (např. (ii)). Avšak

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\cdot\big(z-x-(y-x)\big) \le f(z)-f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) - \big(f(y)-f(x)\big) \le f(z)-f(y) \Rightarrow f(z) \ge f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)$$

což je konvexita či (ii).

(i) ▨



Obr. 6 Charakterizace konvexity určují nerovnosti mezi směrnicemi přímek P_1, P_2, P_3. Naopak z geometrické představy konvexity vztahy mezi směrnicemi přímek P_1, P_2, P_3 snadno plynou.

Nyní můžeme popsat (charakterizovat) konvexitu pomocí druhých derivací fce f (pokud tyto samozřejmě existují).

$\boxed{\text{Věta 4.18}}$ Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a $f''(x)$ existují pro $\forall x \in (a,b)$. Pak

(i) f je na $\langle a,b\rangle$ $\left\{\begin{matrix}\text{konvexní}\\ \text{konkávní}\end{matrix}\right\} \iff f''(x)\left\{\begin{matrix}\geq 0\\ \leq 0\end{matrix}\right.$ pro všechna $x \in (a,b)$.

(ii) Je-li $f''(x)\left\{\begin{matrix}>0\\ <0\end{matrix}\right\}$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak f je $\left\{\begin{matrix}\text{ryze konvexní}\\ \text{ryze konkávní}\end{matrix}\right\}$ v $\langle a,b\rangle$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)} \Rightarrow}$ Protože f je konvexní na $\langle a,b\rangle$, tak pro libovolné $a \leq \alpha < x < y < \beta \leq b$ dle předchozí Věty 4.17 platí:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(\beta)}{y-\beta}.$$

Limitní přechody $x \to \alpha+$ a $y \to \beta-$ dostaneme

$$f'(\alpha) = f'(\alpha+) \leq f'(\beta-) = f'(\beta)$$

což znamená, že

$\forall \alpha,\beta \in (a,b)$: $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ neboli f' je rostoucí v (a,b),

to je však dle Věty 4.12 ekvivalentní $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$; Q.E.D.

Je-li f konkávní, pak buď postupujeme podobně (ale s opačnými nerovnostmi) nebo přejdeme k fci $-f$, která je konvexní.

$\boxed{\text{Ad (i)} \Leftarrow \text{ a (ii)}}$ Je-li $f''(x)\left\{\begin{matrix}>0\\ \geq 0\end{matrix}\right\}$ v (a,b), pak dle Věty 4.12, je f' v (a,b) $\left\{\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\end{matrix}\right\}$. Tedy pro $\forall \xi_1,\xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1<\xi_2$, platí

$\left\{\begin{matrix}f'(\xi_1) < f'(\xi_2)\\ f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)\end{matrix}\right\}$. Náš cíl je ukázat, že pro $(\forall x,y,z)$ $x<y<z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\left\{\begin{matrix}<\\ \leq\end{matrix}\right\}\frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

což však plyne z předchozího a z Lagrangeovy VOSH.

▨

Definice inflexního bodu (viz další strana dole)

Nyní máme k dispozici již všechny nástroje určené k vyšetřování průběhu funkcí. Vyšetřování průběhu fce $\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ si můžeme rozdělit do čtyř částí:

(1) Zkoumání f samotné zahrnuje D_f, (obor hodnot R_f), speciální vlastnosti: sudá/lichá/periodická (což zužuje množinu, kde musím f zkoumat), limity v krajních bodech D_f, body spojitosti, význačné body (např. nulové body, singularity) náčrtek situace.

(2) Zkoumání intervalů monotónie f, lokální extrémů, pomocí f', což zahrnuje $D_{f'}$, výpočet f', $\lim f'$ v krajních bodech $D_{f'}$ (kde je f spojitá, určení lokálních, globálních extrémů.

Je-li okolí $+\infty$ nebo okolí $-\infty$ podmnožinou D_f, je třeba rozhodnout, zda f se neblíží v $+\infty$ nebo $-\infty$ k asymptotě, což jsou lineární funkce $ax+b$ resp. $\alpha x+\beta$ splňující

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(\alpha x+\beta)\big)=0$$

Pokud f' existuje v okolí $+\infty$ či $-\infty$, platí

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=a \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty} f'(x)=\alpha .$$

Doplním náčrtek.

(3) Zkoumání intervalů, kdy je f konvexní/konkávní, také inflexních bodů, pomocí f'', což zahrnuje $D_{f''}$, výpočet f'', určení intervalů, kdy f'' nemění znaménko

(4) Nakreslení příslušného grafu zahrnující tabulku význačných bodů a odpovídajících funkčních hodnot.

$\boxed{\text{Def.}}$ Řekneme, že bod $\boxed{x_0\in D_f}$ je inflexní bod, jestliže fce f v tomto bodě přechází z konkávní na konvexní či naopak, tzn. $\exists\,\delta>0$ tak, že

- buď f je konkávní v $P^-_\delta(x_0)$ a f je konvexní v $P^+_\delta(x_0)$
- nebo f je konvexní v $P^+_\delta(x_0)$ a f je konkávní v $P^+_\delta(x_0)$.

Platí: Je-li x_0 inflexní bod a $f''(x_0)$ existuje $\Rightarrow f''(x_0)=0$

! Neplatí: Je-li $f''(x_0)=0$, pak x_0 je inflexní (viz. např. $f(x)=x^4$ v $x_0=0$).

Příklady (1) Vyšetřete průběh fce $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Řešení

[1] $D_{\arcsin} = \langle -1,1\rangle$ a $H_{\arcsin} = \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$, $\arcsin \in C(\langle -1,1\rangle)$, lichá fce.

Protože

$$\frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \iff (x+1)^2 \geq 0$$

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff (x-1)^2 \geq 0$$

což platí vždy a rovnost nastane pro $x = \pm 1$.

tak $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$ navíc:

x	-1	0	1
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

• Dále:

$$f(-x) = \arcsin \frac{-2x}{(1+(-x)^2)} = -\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = f(x)$$

, kde jsme využili lichosti fce arcsin.

Tedy f je lichá a stačí vyšetřovat f na $\boxed{\langle 0,+\infty)}$.

• Také

$\frac{2x}{1+x^2} \to 0+$ pro $x \to +\infty$ a tak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0+$

• Protože $\frac{2x}{1+x^2} \in C(\mathbb{R})$ a $\arcsin \in C(\langle -1,1\rangle)$ tak $\underline{f \in C(\mathbb{R})}$.

Náčrtek:

[2] Monotónie, lok. extrém

• $D_{f'} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ a kde

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2x)^2}{(1+x^2)^2}}}\,\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\,(1+x^2)} = \frac{2(1-x^2)}{|(1-x^2)|}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} \quad \begin{matrix} >0 & x\in(0,1) \\ <0 & x\in(1,+\infty) \end{matrix}$$

Tedy $\underset{0}{\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow}\ \underset{1}{|}\ \searrow\searrow\searrow \quad \searrow\searrow$

• Protože je f spojitá v $\{0\}$ a v $\{1\}$,

tak $f'(0+) = \lim\limits_{x\to0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to0+} \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} = \underline{2}$

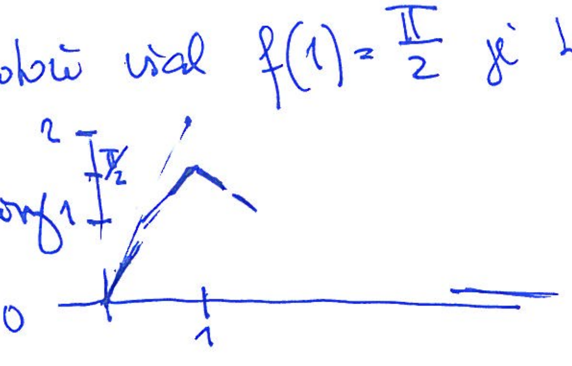
a $f'(1\pm) = \lim\limits_{x\to1\pm} f'(x) = \lim\limits_{x\to1\pm} \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)} = \underline{\mp 1}$

a $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

• v $\{1\}$ je lokální extrém, protože však $f(1) = \frac{\pi}{2}$ je to i

maximum globální.

Náčrtek doplněný



• Asymptota:

$\boxed{y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

[3] Intervaly konvexity/konkávity

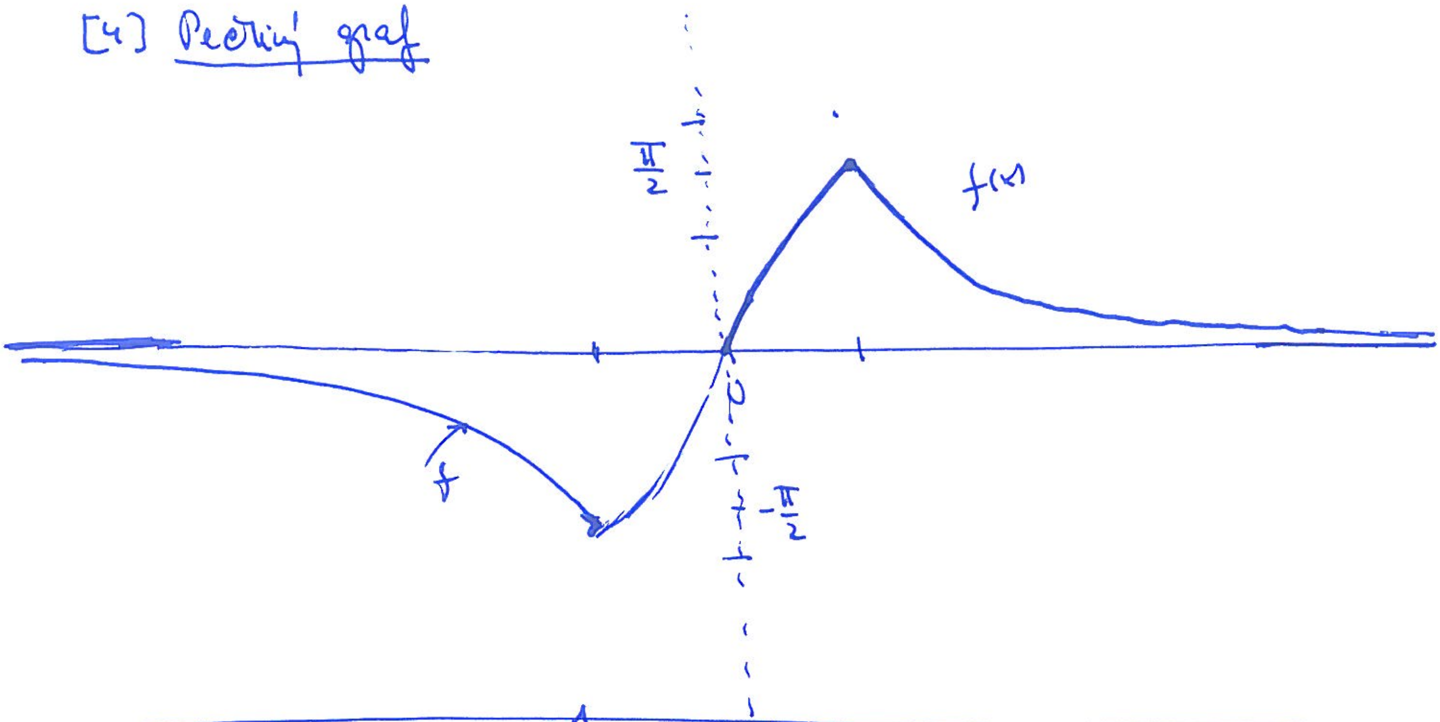
- $D_{f''} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ a $f''(x) = -2\,\dfrac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,(2x)$

$$= -4x\,\frac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \begin{cases} < 0 & v\ (0,1) \\ > 0 & v\ (1,+\infty) \end{cases}$$

Tedy f je konkávní v $(0,1)$ a konvexní v $(1,+\infty)$

body 1 i 0 jsou inflexní.

[4] Pečlivý graf



② Uvažujte fci $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$. Tedy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_0$.

Načrtněte graf fce. Zkoumejte spojitost a spojitost všech derivací f v $\mathbb{R}$.

Řešení • f je definována pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1-x^2} \in C(\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$,

ale $\lim\limits_{\substack{x\to 1- \\ x\to -1+}} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \underset{\text{spoj. exp.}}{=} \exp \lim\limits_{\substack{x\to 1- \\ x\to -1+}} \frac{-1}{1-x^2} = 0+ \underset{f(\pm 1)}{=} \Rightarrow f \in C(\mathbb{R})$

- $f(0) = \frac{1}{e} > 0$, f je sudá

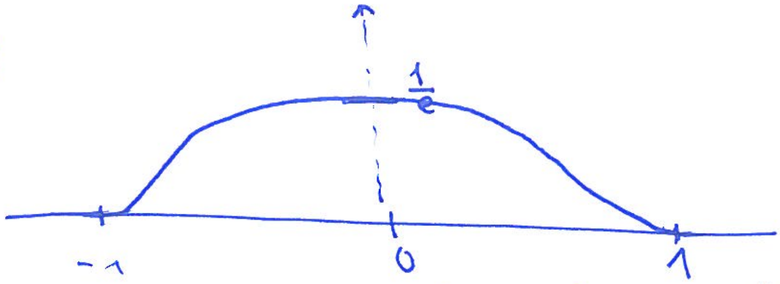
- $f'(x)$ v $(0,1)$ má tvar $f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}\{-2x\} = \dfrac{-2x\,e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2} < 0.$

Tedy f je v $(0,1)$ klesající.

Navíc $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = -2 \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2} \underset{z = \frac{1}{1-x^2}}{=} -2 \lim\limits_{z\to+\infty} z^2 e^{-z} = -2 \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{z^2}{e^z}$

$= 0$ tedy $f' \in C(\mathbb{R})$

Náčrtek



Dá se ukázat, že na libovolnou derivaci (tj. pro derivaci k-tého řádu, kde $k \in \mathbb{N}$ je libovolné) platí: $f^{(k)}(x) \in C(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Definice}}$ (prostory spojitých, spojitě diferencovatelných a ∞-spojitě diferencovatelných funkcí).

Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. Označujeme

$$C(M) \overset{df.}{=} \{ f : M \to \mathbb{R} \ (\text{nebo } \mathbb{C}) ; \ f \text{ je spojitá v } M \}$$

$$(k \in \mathbb{N}) \quad C^k(M) \overset{df}{=} \{ f : M \to \mathbb{R} \ (\text{nebo } \mathbb{C}) ; \ f^{(i)} \in C(M) \text{ pro } i = 0, 1, \dots, k \}$$

$$C^\infty(M) \overset{df.}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^k(M)$$

Úmluva: $C(M) = C^0(M)$
značí totéž | ztotožnění IDENTIFICATION

Cvičení Ukažte, že prostory $C^k(M)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, jsou vektorové (či lineární) prostory, kde operace "sčítání" je definována

$$(f+g)(x) \overset{df}{=} f(x) + g(x)$$

a operace "násobení skalárem" je definována

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}.$$

Návod: Ověřte, že $f+g, \alpha f \in C^k(M)$ jsou-li $f, g \in C^k(M)$.

Příklady
- Fce exp, sin, cos, arctg $\in C^\infty(\mathbb{R})$, fce $\ln \in C^\infty((0,+\infty))$.
- Fce $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } |x|<1 \\ 0 & \text{pro } |x| \geq 1 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$ přitom je tato funkce nenulová jen na $(-1,1)$. Tato funkce bude mít v budoucnu významnou roli.

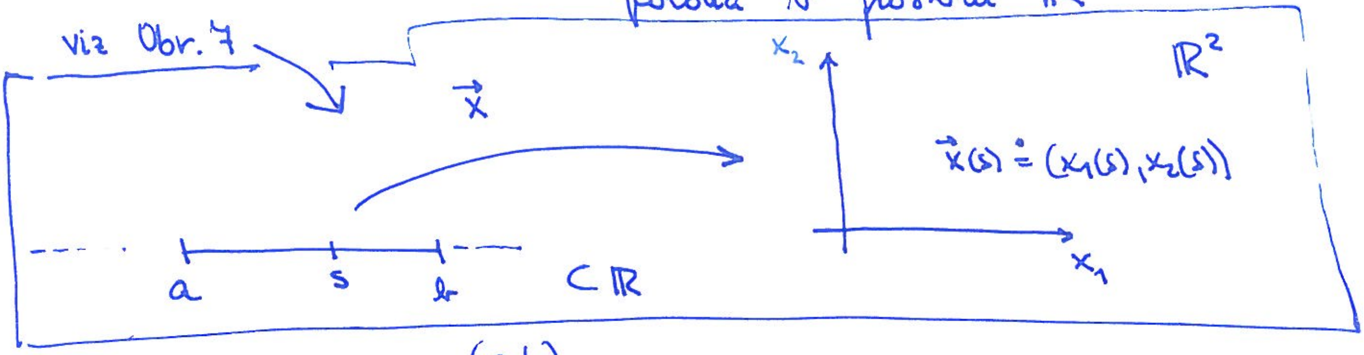
• $\boxed{\text{Křivka, tečný vektor (rychlost), křivost, rovnice tečny a normály}}$

• Křivka je zobrazení intervalu (a,b) do $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tzn.

$$\vec{x} : (a,b) \longmapsto \vec{x} : (x_1, \dots, x_k)$$

$$s \longmapsto \underbrace{(x_1(s), \dots, x_k(s))}_{\text{poloha v prostoru } \mathbb{R}^k}$$

viz Obr. 7

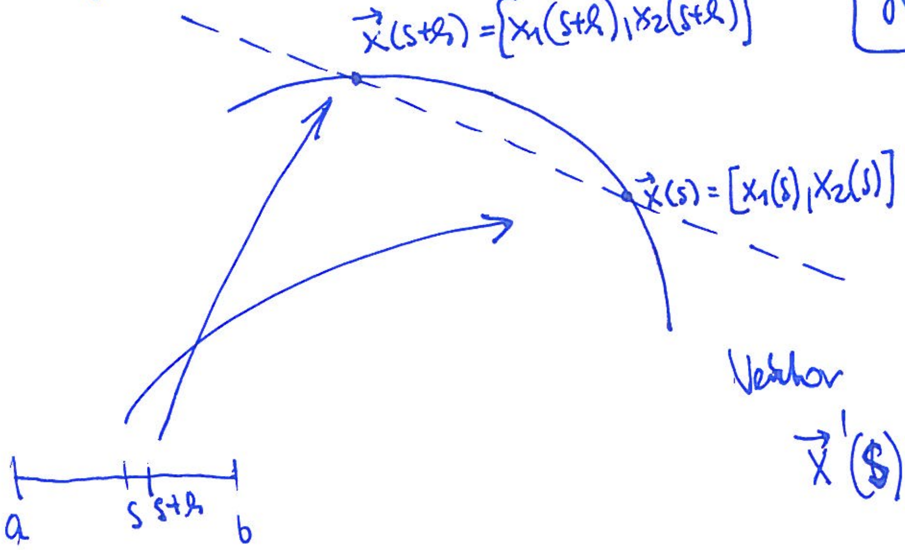


Funkce
$$s \in (a,b) \longmapsto x_1(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\vdots$$
$$s \longmapsto x_k(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

• Je-li (a,b) časový interval, pak $\vec{x}(s)$ udává polohu částice (hmotného bodu) v čase s. Obvykle se "a" ztotožní s počátkem měření a (a,b) se značí $(0,T)$, $T>0$ je konečný čas měření. V tomto případě se $\vec{x}$ nazývá trajektorie nebo pohyb (motion)

• Buď $\vec{x} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dáno. Přímka, procházející body $\vec{x}(s)$ a body $\vec{x}(s+h)$, viz obrázek, má tvar

$$\boxed{\vec{y}(t) = \vec{x}(s) + \frac{\vec{x}(s+h) - \vec{x}(s)}{h}(t)}$$



Se zmenšujícím se h dostáváme tečnu

$$\boxed{\vec{y}(t) \doteq \vec{x}(s) + \vec{x}'(s)\, t}$$

Vektor
$$\vec{x}'(s) \doteq \begin{pmatrix} x_1'(s) \\ \vdots \\ x_k'(s) \end{pmatrix}$$
se nazývá tečný vektor

[• Je-li s čas a $\vec{x}(s)$ poloha, pak $\vec{x}'(s)$ se nazývá vektor okamžité rychlosti částice v čase s. Často se píše (používá se nejednotné značení)

$$\vec{v}(s) = \vec{x}'(s) = \dot{\vec{x}}(s) = \frac{d\vec{x}}{ds}(s).$$
]

$\boxed{\text{Je-li } k=2}$, lze z parametrické rovnice $\vec{y}(t) = \vec{x}(s) + \vec{x}'(s)\,t$, sestavit rovnici tečny v obecném implicitním tvaru $Ay_1 + By_2 + C = 0$.

Vskutku:

$$\underbrace{\frac{y_1(t) - x_1(s)}{x_1'(s)}} = t = \underbrace{\frac{y_2(t) - x_2(s)}{x_2'(s)}}$$

implikuje

$$\boxed{\big(y_1(t) - x_1(s)\big)x_2'(s) - \big(y_2(t) - x_2(s)\big)x_1'(s) = 0}$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\big(\vec{y}(t) - \vec{x}(s)\big)\cdot\vec{n}(s) = 0 \quad \text{nebo} \quad \boxed{(\vec{y} - \vec{x})\cdot\vec{n} = 0},$$

kde $\vec{y} - \vec{x} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_2' \\ -x_1' \end{pmatrix}$ je normálový vektor ke křivce $\vec{x}$ v bodě $\vec{x}(s)$.

Rovnice $(\vec{y} - \vec{x})\cdot\vec{n} = 0$ je obecná rovnice tečny: množina všech bodů takových, že polohový vektor $\vec{y} - \vec{x}$ je kolmý na vektor $\vec{n}$ (který je pak normálový k tečně.).

Ověřme, že $\vec{n}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2'(s) \\ -x_1'(s) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1'(s) \\ x_2'(s) \end{pmatrix} = 0$

Speciálním případem křivky v rovině je graf funkce $y = f(x)$.

Pak $\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} s \\ f(s) \end{pmatrix}$ a $\vec{x}'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(s) \end{pmatrix}$ a $\vec{n} = \begin{pmatrix} f'(s) \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} s \\ f(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ f'(s) \end{pmatrix}t \iff \boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= s + t \\ y_2(t) &= f(s) + f'(s)\,t \end{aligned}}$$

neboli $\boxed{y_2(t) = f(s) + f'(s)(y_1(t) - s)}$

$$\boxed{y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Semestrální kurs NOFY151 zakončíme důkazem l'Hospitalovy věty, viz Věta 3.7. Pro úplnost znění zopakujeme.

$\boxed{\text{Věta 3.7 (l'Hospitalova)}}$ (případy $\frac{\infty}{\infty}, \frac{A}{\infty}, \frac{0}{0}$). Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť

(1) $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že pro $\forall x \in P_\delta(x_0)$ existují $f'(x), g'(x)$ a $g'(x) \neq 0$,

(2) Existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a rovná se $A \in \mathbb{R}^*$

(3) Platí jedna z podmínek:

(i) Buď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

(ii) Nebo $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje a rovná se A.

Dk $\boxed{\text{KROK 1}}$ Nejdříve ukážeme, že stačí tvrzení dokázat $x_0 \in \mathbb{R}$ a pro případ $\boxed{x \to x_0+}$.

1 Platí-li věta pro jednostranné limity (se stejným A), pak platí i pro oboustranné limity

2 (i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} f(-y)$ a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} g(-y)$

a také

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{(f(-y))'}{(g(-y))'} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-f'(-y)}{-g'(-y)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{f'(-y)}{g'(-y)}$$

Odsud plyne, že případ $x \to -\infty$ lze převést na případ $y \to +\infty$

(ii) Podobně pro $x_0 \in \mathbb{R}$, lze $\lim\limits_{x \to x_0-}$ převést na $\lim\limits_{y \to x_0+} f(y)$.

3 Protože $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ a také pro g

a také

$$\lim_{y \to 0+} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{y \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Odsud plyne, že případ $x \to +\infty$ se převede na $y \to 0+$.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ Nechť platí $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} g(x) = 0}$

Položme/předefinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Pak $f, g \in C(\langle x_0, x_0+\delta))$ a $f'(x), g'(x) \neq 0$ existují v $(x_0, x_0+\delta)$. Dle Cauchyho věty o střední hodnotě Věta 4.10 existuje $\xi \in (x_0, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ a navíc pro $x \to x_0+$ platí $\xi \to x_0+$

Odsud
$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A .$$

$\boxed{\text{KROK 3}}$ Nechť platí $\boxed{(\bullet) \quad \lim_{x\to x_0+} |g(x)| = +\infty}$

Opět potvrzujeme, že existují $\delta>0$ tak, že $f'(x)$ a $g'(x) \neq 0$ existují na $(x_0, x_0+\delta)$ a navíc plyne z $(\bullet)$ že také $g(x)\neq 0$ na $(x_0, x_0+\delta)$. Pro libovolné body $x, y \in (x_0, x_0+\delta)$ $\boxed{x<y}$ lze opět použít Cauchy VOSH Věta 4.10:

$$\exists\, \xi = \xi_{x,y} \in (x,y) : \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \left(\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right)$$

což implikuje

$$f(x) = f(y) + (g(x)-g(y))\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \underset{\frac{1}{g(x)}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\bullet\bullet)}$$

Z identity $(\bullet\bullet)$ dokážeme tvrzení. Musíme však rozlišit případy $\boxed{A=0}$, $\boxed{A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, $\boxed{A=+\infty}$ a $\boxed{A=-\infty}$.

$\boxed{\text{Podkrok } A=0}$ Protože $\lim_{x\to x_0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$, tak $K\ \varepsilon>0\ (\exists P(x_0))(\forall x\in P(x_0)) \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Protože $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$, tak pro y zafixované najdeme x blízko x_0 tak, že $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ a $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}$. Pak $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\boxed{\text{Podkrok } A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ Definujme $F(x) = f(x) - Ag(x)$. Pak $\lim_{x\to x_0+}\frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} - A = 0$, a dle předchozího Podkroku plyne $\lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)}{g(x)} = 0$, což implikuje $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

$\boxed{\text{Podkrok } A=+\infty}$ K $L>0$ libovolnému najdeme $P^+_\delta(x_0)$ tak, že $\frac{f'(x)}{g'(x)} > L$ pro všechna $x\in P^+_\delta(x_0)$. Vezmi $y\in P^+_\delta(x_0)$ a uvaž stejné podmínky na $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$ a $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|$ jak jsou uvedeny v $\boxed{\text{Podkroku } A=0}$.

Pak z $(\bullet\bullet)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > -\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2}L =: M \quad , \text{ což dává tvrzení.}$$

$\boxed{\text{Podkrok } A=-\infty}$ se dokáže podobně. Q.E.D.

$\boxed{4.4.}$ Taylorovy polynomy

Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že v bodě $x_0 \in D_f$ existuje $f'(x_0)$.

Pak
$$\boxed{P_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$
je nejen tečna k funkci f v bodě x, ale P_1 je polynom stupně 1, který (lineárně) aproximuje f v bodě x_0. Označme rozdíl (zbytek, zůstatek) mezi f a P_1 symbolem R_2, tzn.
$$\boxed{R_2(x) := f(x) - P_1(x)}$$
Ukážeme, že z existence $f'(x_0)$ plyne $R_2(x) = o(x-x_0)$.

Vskutku:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$
$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$
Platí dokonce silnější tvrzení:

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.18 $\quad f'(x_0)$ existuje $\iff R_2(x) = o(x-x_0)$

Dk Implikaci $\boxed{\Rightarrow}$ jsme již dokázali. Opačná implikace $\boxed{\Leftarrow}$ se dokáže takto:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{Dle Věty o limitě součtu}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_1(x)}{x-x_0} + \lim \frac{P_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{R_2(x)}{x-x_0} + f'(x_0) \overset{\text{dle předpokladu}}{=} \underline{\underline{f'(x_0)}} \qquad \blacksquare$$

Vidíme tedy, že P_1 mi aproximuje f v (okolí) bodu x_0. Můžeme se ptát obecněji, zda lze funkci f aproximovat polynomem
$$\boxed{P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n}$$
tak, že

(1) $\quad P_n(x_0) = f(x_0), \; P_n'(x_0) = f'(x_0), \dots, P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$

Z podmínek (1) a obecného tvaru polynomu P_n plyne

(1') $\quad a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = f'(x_0) \qquad k!\,a_k = f^{(k)}(x_0) \qquad n!\,a_n = f^{(n)}(x_0).$

neboli
$$\left[\; a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n \;\right]$$

To nás přivádí k definici:

Def <u>n-tý Taylorův polynom fce f v bodě x_0</u>

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

a také ke zobecnění Věty 4.18:

Věta 4.19 Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ existuje. Pak existuje právě jeden polynom Q_n stupně (nejvýše) n takový, že

$$(*) \qquad f(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n)$$

Navíc, $\qquad Q_n = P_n.$

Dk **Existence** Kandidátem na Q_n je polynom P_n definovaný výše. Z Věty 4.18 víme, že $f(x) - P_1(x) = o(x-x_0)$, což je tvrzení pro $n=1$. Je-li $n \geq 2$, pak chceme ukázat, že

$$L := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

což však ověříme použijeme-li $(n-1)$ krát l'Hospitalovo pravidlo:

$$L \overset{l'H}{:=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \underset{(n-2)\text{krát}}{=} \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)$$
$$= 0.$$

Jednoznačnost Požadavek $(*)$ implikuje podmínky $(1')$. Ale takový polynom je jen jeden. Kdyby byly dva, tak jejich rozdíl mohu zapsat ve tvaru $\quad A_0 + A_1(x-x_0) + \dots + A_n(x-x_0)^n$ a koeficienty musí splňovat $\quad A_0 = A_1 = \dots = A_n = 0$, což implikuje tvrzení.

Příklady Funkce e^x, $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cos x$, $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$; Funkce $\log(1+x) \in C^\infty((-1,+\infty))$, $\log(1-x) \in C^\infty((-\infty,1))$ a

$$(1+x)^\alpha := \exp(\alpha \log(1+x)) \in C^\infty((-1,+\infty)), \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pro tyto funkce je jednoduché (viz přednáška resp. proveďte sami) nalézt Taylorovy polynomy v bodě 0. Platí: $\boxed{n \in \mathbb{N}}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + o(x^m)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2m+1}\right)$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2m+2}\right)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2m+1}\right)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2m+2}\right)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m)$$

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k} + o(x^m)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{m} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^m)$$

připomeň $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

kde $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

Ačkoliv rozvoje vznikly aproximací funkcí v bodě (či okolí bodu) $x_0 = 0$, tak je až pozoruhodné, že platí:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

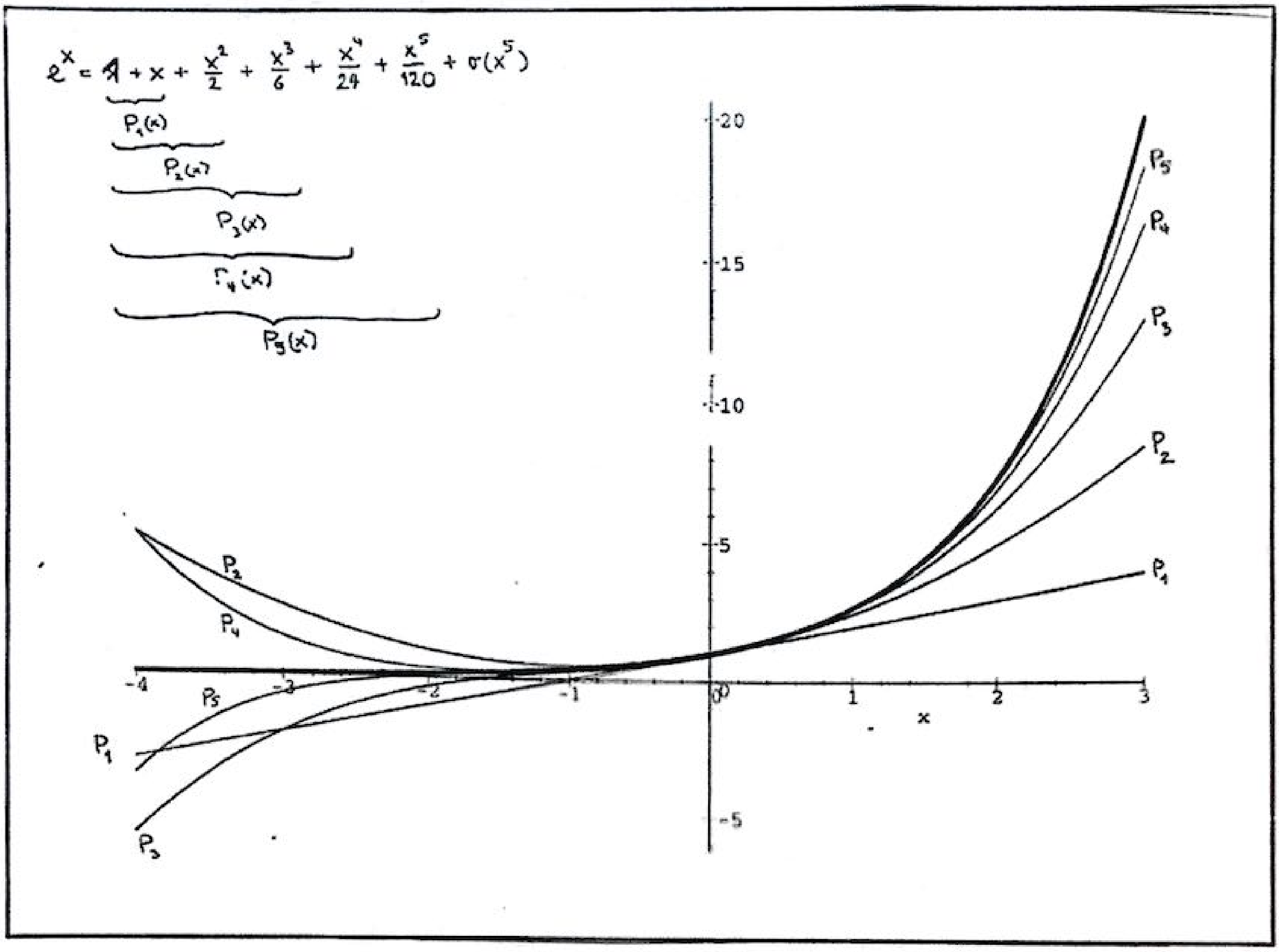
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \text{pro všechna } x \in (-1, 1] \equiv (-1, 1\rangle$$

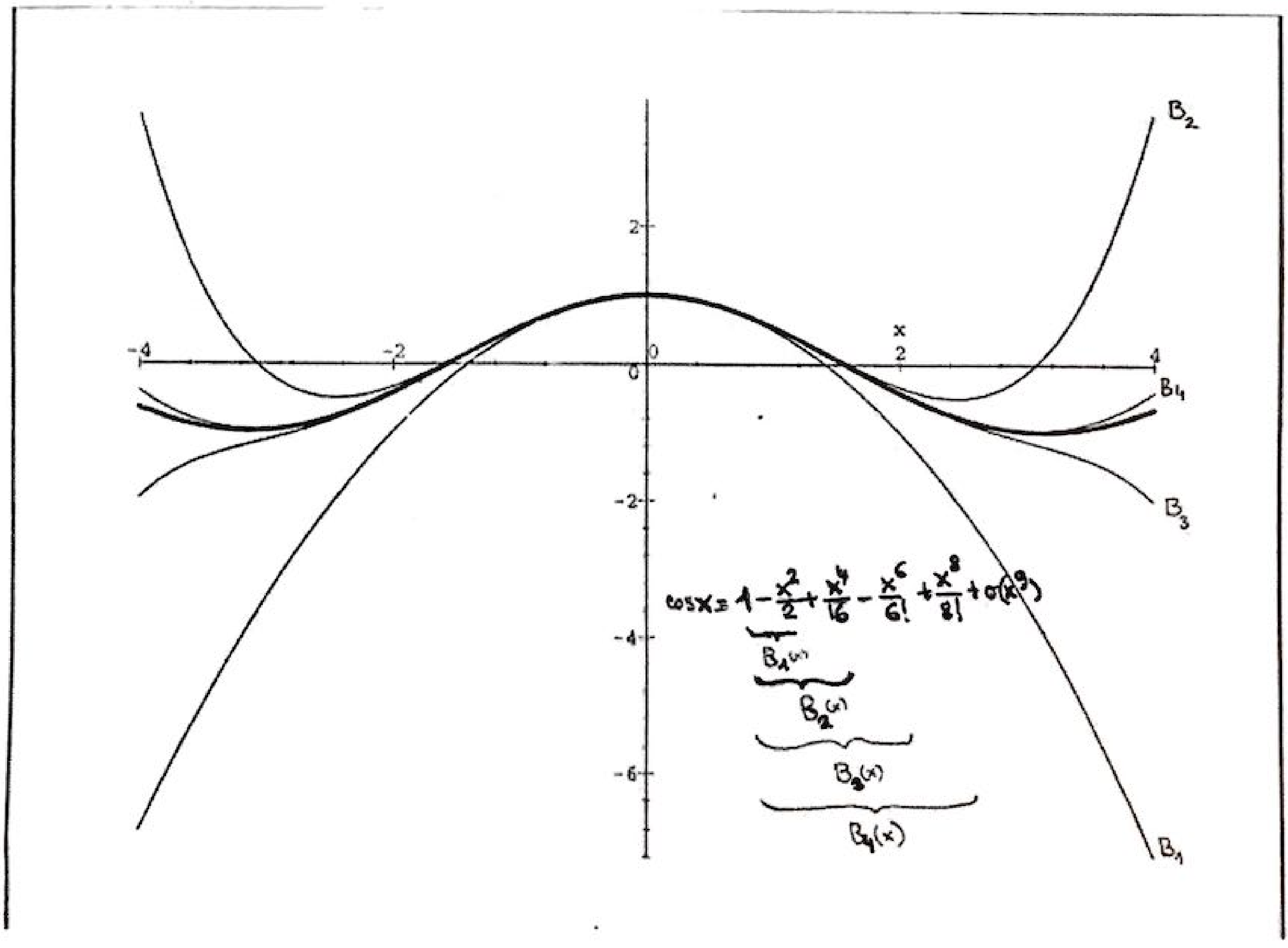
$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \text{pro všechna } x \in [-1, 1) \equiv \langle -1, 1).$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{pro všechna } x \in (-1, 1).$$

Viz též grafy na následující straně.



$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
$P_1(x)$
$P_2(x)$
$P_3(x)$
$P_4(x)$
$P_5(x)$
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
x



$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^9)$
$B_1(x)$
$B_2(x)$
$B_3(x)$
$B_4(x)$
B_1
B_2
B_3
B_4
x

Definujme rozdíl (rest, reminder) mezi f a P_n:

$$R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$$

Z Věty 4.19 plyne, že $\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ (neb $R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n)$)

neboli

(2) $$R_{n+1}(x) = A(x)(x-x_0)^n \quad \text{kde } A(x) \to 0 \text{ pro } x \to x_0.$$

Otázka: Lze o zbytku R_n získat lepší informaci (pokud bych věděl více informací o hladkosti f)?

Odpověď je kladná a z pohledu použití nesmírně důležitá. Začneme nejdříve přímočarým postupem a jen pro R_2.

$\boxed{\text{Hrubý odhad}}$ $R_2(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$.

K odhadu využijeme předpoklad, že na nějakém okolí x_0 existují $f''(t)$ a jsou omezené. Pak pomocí dvojího použití LVOSH (Lagrangeova věta o střední hodnotě) dostáváme

$$\begin{aligned} R_2(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \\ \xrightarrow{\text{LVOSH}, \ \xi \in (x_0;x)} &= f'(\xi)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \\ &= (f'(\xi) - f'(x_0))(x-x_0) \\ \text{LVOSH}, \ z \in (x_0;x) \quad &= f''(z)(x-x_0)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{|R_2(x)| \le \max_{z \in U_\Delta(x_0)} |f''(z)|\,(x-x_0)^2 \quad (3)}$$

což je lepší informace než (2), neb (2) implikuje

$$|R_2(x)| \le |A(x)|\,(x-x_0) \le \max_{x \in U_\Delta(x_0)} |A(x)|\,(x-x_0)$$

$\boxed{\text{Přesnější odhad}}$ Odhad (3) lze vylepšit.

Zavedeme pomocnou fci F:

(4) $$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Pozorujeme: $\boxed{F(x) = 0}$ a $\boxed{F(x_0) = R_{n+1}(x)}$ (5)

Dále zavedeme fci h takto:

(6) $$h(t) = F(t) - K\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

kde $K \in \mathbb{R}$ zvolíme tak, aby $\boxed{h(x_0) = 0}$. Protože $\boxed{h(x) = 0}$, a $h'(t)$ existují na $(x_0;x)$ lze na fci h aplikovat Rolleovu větu a dostáváme: $\exists \xi \in (x_0; x)$ takové, že

(7) $\quad h'(\xi) = 0$

Avšak: $\quad h'(t) = F'(t) + K\frac{(x-t)^m}{m!} = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^m}{m!} + K\frac{(x-t)^m}{m!}$

a tedy (7) implikuje
$$K = f^{(n+1)}(\xi)$$

Z (5) a (6) pak plyne (neboť $h(x_0) = 0$)

(8) $$\underbrace{R_{n+1}(x)} \overset{(5)}{=} F(x_0) \overset{(6)}{=} h(x_0) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

což je tzv. Lagrangeův tvar zbytku.

Pro $n=1$, speciálně, dostáváme
$$R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \Rightarrow |R_2(x)| \leq \max_{z \in U_\Delta(x_0)} |f''(z)| \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

což vylepšuje hrubý odhad o $\frac{1}{2}$.

Výsledek (8) je speciální případ následující věty.

$\boxed{\text{Věta}}\ \boxed{4.20}$ (O odhadu chyby Taylorova polynomu)

Nechť $f \in C^n(\langle x_0; x\rangle)$ a $f^{(n+1)}(t)$ existuje na $(x_0; x)$.

Nechť $\phi \in C(\langle x_0; x\rangle)$ a $\phi'(t)$ existuje na $(x_0; x)$.

Pak $\exists \xi \in (x_0; x)$ takové, že

(9) $$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\,\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(\xi)}\, f^{(n+1)}(\xi)$$

Speciálně, pro $\boxed{\phi(t) = (x-t)^{n+1}}$, $\quad \underbrace{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Lagrangeův tvar zbytku}}$

pro $\boxed{\phi(t) = t}$

$$\underbrace{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Cauchyův tvar zbytku}}, \text{ kde } \theta := \frac{\xi - x_0}{x-x_0} \in (0;1)$$

Důkaz Věty 4.20 Uvažujme F definovanou ve vzorci (4) výše.

Víme: $F(x)=0$, $F(x_0) = R_{n+1}(x)$ a $F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$

Dle Cauchyho věty o střední hodnotě:

$$\exists \xi \in (x_0;x): \quad \underbrace{F(x_0) - F(x)} = \frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)}(\phi(x_0)-\phi(x))$$

což implikuje

$$\overbrace{R_{n+1}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(\xi)}, \text{ což je (9).}$$

Zbytek plyne z volby speciálních ϕ a úpravami. Proveďte.

[U Cauchyho tvaru zbytku zvolte θ tak, že $\xi = x_0+\theta(x-x_0)$.] ▨

Jedním z významných důsledků předchozích úvah a vět je **postačující podmínka** pro **globální extrém**.

$\boxed{\text{Věta}}$ 4.21 (Postačující podmínka pro globální extrém).

Buď $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in (a,b)$.

Jestliže $\left\{ \begin{array}{ll} 0 \le f''(x) < +\infty & \text{pro všechna } x\in(a,b) \\ 0 \ge f''(x) > -\infty & \text{—||—} \end{array} \right\}$ a $f'(x_0)=0$

pak f má v x_0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{globální minimum} \\ \text{globální maximum} \end{array} \right\}$.

(Dk) Protože dle Věty 4.20

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 \quad \text{pro } x\in(a,b)$$

a $f'(x_0)=0$, tak

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 \left\{ \begin{array}{l} \ge f(x_0) \\ \le f(x_0) \end{array} \right. \text{ dle předpokladu,}$$

Tedy buď $f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x\in(a,b)$ (glob. minimum)

nebo $f(x) \le f(x_0)$ —||— maximum. ▨

Příklad Funkce $f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$ s $a_1>0$
má v bodě $x_0 = -\frac{a_2}{2a_1}$ globální minimum, neboť $f'(x_0)=0$
a $f''(x) = 2a_1 > 0$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$.

Příklady ① Určete $L := \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} \frac{(\sin x - x)^3}{(e^x - 1 - x)^2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

Řešení Máme:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$\Rightarrow (\sin x - x)^3 = -\frac{x^9}{6^3} + o(x^{10})$$

- $(e^x - 1 - x)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$
- $\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$$= 2x + 2\frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Tedy $(\sin x - x)^3 \ln \frac{1+x}{1-x} = -\frac{2x^{10}}{6^3} + o(x^{11})$ a $L = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x^{10}}{6^3} + o(x^{11})}{\frac{x^{10}}{4} + o(x^{11})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3\cdot 36} + o(x)}{\frac{1}{4} + o(x)} = -\frac{4}{3\cdot 36} = -\frac{1}{27}$$

$$\boxed{L = -\frac{1}{27}}$$

② Určete Taylorův polynom fce $\operatorname{tg} x$ pro $x_0 = 0$.

$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ $\quad \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\operatorname{tg}'' x = \frac{+2\sin x}{\cos^3 x}$, $\operatorname{tg}''' x = \frac{2\cos^4 x + 6\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}$

$$= \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

a) přímo z definice

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2x^3}{3!} + o(x^4) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

b) z Taylorových rozvojů pro sin a cos

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) : 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\underline{-x \mp \frac{x^3}{2} \pm \frac{x^5}{4!} + o(x^6)}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5!}x^5 + o(x^6)$$

$$\underline{-\frac{1}{3}x^3 \mp \frac{1}{6}x^5 + o(x^6)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{6}\left(1 - \frac{4}{5}\right)}_{\frac{4}{30} = \frac{2}{15}} x^5 + o(x^6)$$

c) Pomocí vzorce pro součet geometrické řady

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n + o(x^n)} = \frac{f(x)}{\beta_0} \frac{1}{1 - \underbrace{\left(-\frac{\beta_1}{\beta_0}x - \frac{\beta_2}{\beta_0}x^2 + o(x^n)\dots\right)}_{G}}$$

$$= \frac{f(x)}{\beta_0}\left\{1 + G + \dots + G^n + \dots\right\}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}_{G}}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}_{G} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) + o(x^5)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24}\right)x^5 + o(x^6)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1 - 10 + 25}{120}x^5 + o(x^6) = \underline{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)}$$

d) Metodou neurčitých koeficientů

Vím $\frac{\sin x}{\cos x} = \beta_1 x + \beta_3 x^3 + \beta_5 x^5 + o(x^6)$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = \left(\beta_1 x + \beta_3 x^3 + \beta_5 x^5 + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)$$

$$-\text{"}- \quad = \beta_1 x + \left(\beta_3 - \frac{\beta_1}{2}\right)x^3 + \left(\beta_5 - \frac{\beta_3}{2} + \frac{\beta_1}{4!}\right)x^5 + o(x^6)$$

$$\boxed{\beta_1 = 1} \qquad \beta_3 - \frac{\beta_1}{2} = -\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{120} = \beta_5 - \frac{\beta_3}{2} + \frac{\beta_1}{24}$$

$$\boxed{\beta_3 = \frac{1}{3}} \qquad \beta_5 = \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{5}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

$$\boxed{\beta_5 = \frac{2}{15}}$$

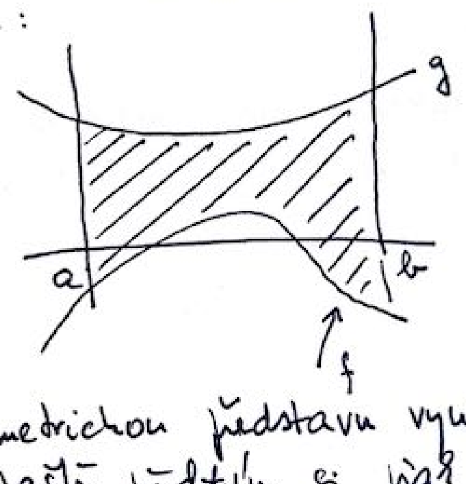
§5 RIEMANNŮV A NEWTONŮV INTEGRÁL

Riemannův a Newtonův integrál jsou dva různé typy tzv. určitých integrálů, což jsou příklady funkcionálů, tzn. zobrazení, které funkcím přiřadí číslo, přesněji zobrazení z prostoru funkcí (např. $C((a,b))$) do množiny čísel např. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Tedy

$$\left.\begin{array}{c}\text{Riemannův}\\ \text{nebo}\\ \text{Newtonův}\end{array}\right\}\text{integrál}: \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{funkce}\\ \text{definovaná na } (a,b)}}{f} \longmapsto \text{číslo} \quad \text{značené}\begin{cases}(R)\int_a^b f(x)\,dx\\ (N)\int_a^b f(x)\,dx\end{cases}$$

Každý z těchto integrálů (a rovně těchto dvou uslyšíme brzy o dolním Riemannově integrálu, horním Riemannově integrálu, a v příštím školním roce o Lebesgueově integrálu). je definován odlišně – pro rozumné třídy funkcí dávají stejné výsledky. Existují však funkce, které lze Riemannovsky integrovat, ale Newtonův integrál tyto funkce nemají a naopak.

Základní úloha, která vedla/vede k vývoji/rozvoji integrálního počtu je úloha určit obsah obrazce mezi dvěma funkcemi, viz obrázek:



Tuto geometrickou představu využijeme ke konstrukci Riemannova integrálu. Ještě předtím si však zavedeme integrál Newtonův, jehož konstrukce je (zdánlivě) zcela jiná.

5.1 Newtonův integrál

Definice (zobecněná primitivní funkce - ZPF). Řekneme, že F je zobecněná primitivní funkce k f na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ jestliže platí:

- $F \in C((a,b))$
- $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b) \setminus K$ (kde K je konečná)

Definice ($(N)\int_a^b f(x)\,dx$) Buď

(1) F zobecněná primitivní funkce k f na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ← může být neomezený

(2) takový přírůstek $[F]_a^b := \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) = F(b-) - F(a+) \in \mathbb{R}^*$ (neboli $[F]_a^b$ má smysl)

Pak definujeme Newtonův integrál f na (a,b), značený $(N)\int_a^b f(x)\,dx$, předpisem

$$\boxed{(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b}$$

Pozorování (i) Definice $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ nezávisí na volbě reprezentanta.

Přesněji: jsou-li F a G dvě ZPF k f na (a,b), pak F a G se liší o konstantu, tzn. $\exists C \in \mathbb{R}$ $F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in (a,b)$.

Pak však $[F]_a^b = F(b-) - F(a+) = G(b-) + C - G(a+) - C =$

$$= G(b-) - G(a+) = [G]_a^b.$$

(ii) Z minulého semestru umím nalézt PF ke spoustě funkcí; k těmto funkcím tak mohu přiřadit $(N)\int_a^b f(x)\,dx$.

Příklady ① $(N)\int_0^1 \ln x\,dx \overset{\text{per partes}}{=} [x\ln x - x]_0^1 = \lim_{x\to 1-}(x\ln x - x) - \lim_{x\to 0+}(x\ln x - x)$

$$= -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}$$

! $\ln x$ je neomezená funkce na $(0,1)$. Přesto má Newtonův integrál.

② $(N)\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx \underset{\text{per-partes}}{=} \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{1} e^{-x}\,dx = -\left[(x-1)e^{-x}\right]_0^{\infty} = \underline{\underline{1}}$

! Newtonův integrál mají i funkce definované/integrované na neomezeném intervalu.

③ $(N)\int_0^K \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ neb $(N)\int_0^K \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_0^K = \ln K + (+\infty) = +\infty$

a také

$$(N)\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_\varepsilon^{+\infty} = +\infty - \ln\varepsilon = +\infty$$

$\boxed{\varepsilon > 0}$

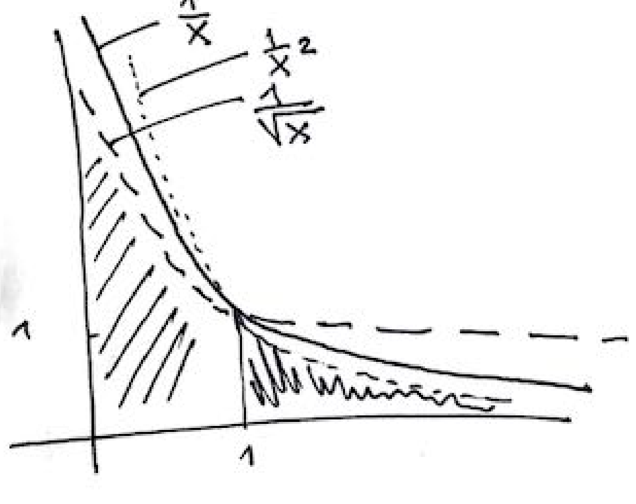
④ Ukážeme, že $(N)\int_0^K \frac{1}{x^\beta}\,dx < +\infty$ pro $\boxed{\beta < 1}$ (srovnej s příkladem ③).

Vskutku:
$$(N)\int_0^K \frac{1}{x^\beta}\,dx = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_0^K = \frac{K^{1-\beta}}{1-\beta}$$
pokud $1-\beta > 0$, což dává nám $\boxed{\beta < 1}$

⑤ Také podobně ukážeme, že
$$(N)\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx < +\infty$$
pro $\boxed{\beta > 1}$ (opět srovnej s ③ i ④)

Vskutku:
$$(N)\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_\varepsilon^{+\infty} = \lim_{K\to+\infty} -\frac{1}{(\beta-1)K^{\beta-1}} + \frac{1}{(\beta-1)\varepsilon^{\beta-1}} =$$
$$= \frac{1}{(\beta-1)\varepsilon^{\beta-1}}$$
pokud $\beta - 1 > 0$ tj. $\boxed{\beta > 1}$

⑥ Zkuste zjistit, zda
$$(N)\int_K^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} < \infty$$
respektive pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ bude
$$(N)\int_K^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} < \infty.$$



Obrázek 1

ZÁVĚR: Funkce $\frac{1}{x}$ je "limitní" jak v okolí 0 tak v okolí $+\infty$, a nikde nemá Newtonův integrál konečný. Vezmeme-li však funkce o malinko "menší" a to funkce $\frac{1}{x^\beta}$ s $\beta > 1$ pro x v okolí $+\infty$ a $\frac{1}{x^\beta}$ s $\beta < 1$ pro x v okolí 0, tak tyto funkce již Newtonův integrál konečný mají!

5.2 Definice Riemannova integrálu

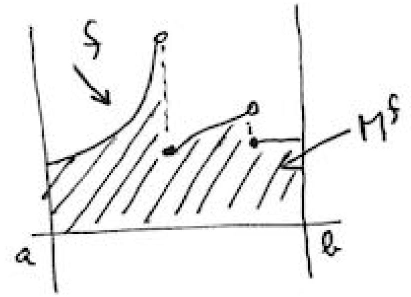
Základní motivační úloha pro zavedení Riemannova integrálu je určení obsahu obrazce

$$M^f := \{(x,y)\,;\ x \in (a,b) \text{ a } y \in (0, f(x))\}$$

kde

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ je daná nezáporná omezená fce definovaná na intervalu konečné délky, tj. $-\infty < a < b < +\infty$.

[M^f se nazývá podgraf funkce f.]



$$\left[\ (R)\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{"obsah } M^f\text{"}\ \right]$$

Je-li $f(x) = C \in \mathbb{R}^+$ pro $\forall x \in (a,b)$, pak

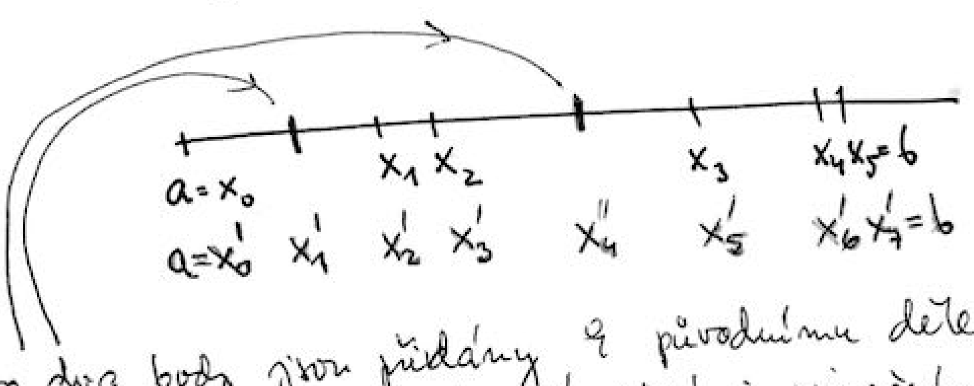
$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = C(b-a)$$

Definice • Dělením D intervalu $\langle a,b \rangle$, $-\infty < a < b < +\infty$, nazveme $(m+1)$-reálných čísel x_i, $i = 0,1,\dots,m$, jejichž platí:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_m = b.$$

• Číslo $|D| := \max_{i=1,\dots,m} |x_i - x_{i-1}|$ nazveme normou dělení

• Řekneme, že dělení D' je zjemněním dělení D pokud každý bod dělení D je bodem dělení D'.



• Tyto dva body jsou přidány k původnímu dělení D. Po přidání dostáváme nové dělení D', které je zjemněním D.

Předpokládejme, že $\boxed{f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} \text{ je daná omezená funkce, } -\infty < a < b < +\infty.}$

Buď D dělení $\langle a,b\rangle$.

Označme:

$$m := \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \qquad M := \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

$$m_i := \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad M_i := \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad i=1,\dots,m.$$

Z omezenosti f plyne (pro každé $i\in\{1,\dots,m\}$):

$$(2) \qquad -\infty < m \le m_i \le M_i \le M < +\infty$$

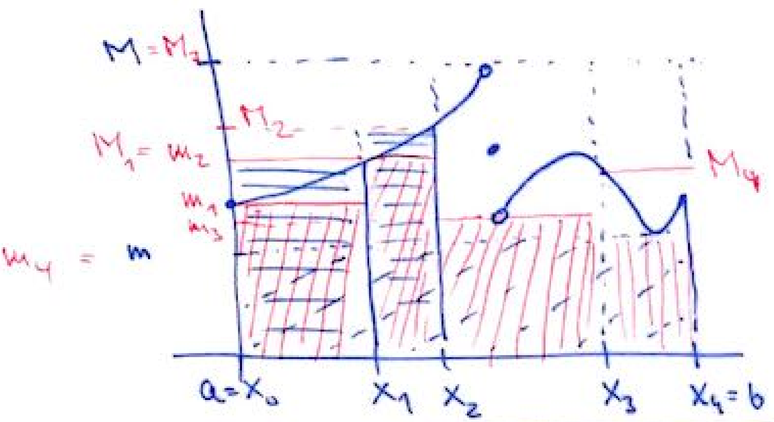
Dále definujme dolní/horní Riemannův součet $s(D)/S(D)$ předpisem:

$$s(D) = s(D,f) := \sum_{i=1}^{m} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(D) = S(D,f) := \sum_{i=1}^{m} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Z (2) plyne (NAKRESLETE SI OBRÁZEK)

$$(3) \qquad -\infty < m(b-a) \le \boxed{s(D) \le S(D)} \le M(b-a) < +\infty.$$



Toto tvrzení se dá zesílit. Platí totiž:

Tvrzení 5.1. Buď D_1, D_2 dvě libovolná dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak

$$(4) \qquad s(D_1) \le S(D_2)$$

Dk KROK 1 Buď D^* zjemnění dělení D. Pak platí:

$$(5) \qquad s(D) \le s(D^*) \quad \text{a} \quad S(D) \ge S(D^*)$$

Čtenář si může výroky (5) potvrdit nejdříve pro D^*, které vznikne z D přidáním jednoho bodu.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ Uvažujme dvě libovolná, ale pevná dělení $\langle a,b\rangle$. Označme D^* dělení, které vznikne sjednocením bodů dělení D_1 a D_2. Pak D^* je zjemnění jak dělení D_1 tak dělení D_2. Odsud, respektive z (3) a (5) plyne

$$s(D_1) \leq s(D^*) \leq S(D^*) \leq S(D_2),$$

což dává (4). ■

Definice: Dolní Riemannův integrál f na $\langle a,b\rangle$, značený $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, definujeme jako supremum dolních Riemannových součtů $s(D)$, kde supremum bereme přes všechna dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$, tzn.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_D s(D)$$

Podobně, horní Riemannův integrál f na $\langle a,b\rangle$, značený $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, definujeme:

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_D S(D)}$$

Důležitá pozorování
- Horní a dolní Riemannův integrál pro omezenou fci f na $\langle a,b\rangle$ vždy existují.
- Navíc, z (4) plyne (přechodem k $\sup_{D_1}$ a přechodem k $\inf_{D_2}$), že

$$(6) \qquad -\infty < \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < +\infty.$$

Příklady ① Buď $f(x) \equiv C \in \mathbb{R}^+$. Pak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_D C(b-a) = C(b-a)$ a $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = C(b-a)$ také. Tedy pro f konstantní platí v (6) rovnost.

② Buď $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{v } \langle 0,1\rangle \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Pak $\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0$, kdežto $\overline{\int_0^1} D(x)\,dx = \inf_D 1 = 1$.

Tak $\underline{\int_0^1} D(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} D(x)\,dx$. Vidíme tedy, že omezenost f na $\langle a,b\rangle$ nestačí k tomu, aby v (6) platila rovnost.

Definice Řekneme, že $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ omezená má Riemannův integrál, značený $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, jestliže $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

- Jak plyne z příkladu ② výše, Riemannův integrál nemusí existovat.
- Z definice $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ a z (6) plyne tato charakterizace existence $(R)\int_a^b f(x)\,dx$:

$$(7)\quad (R)\int_a^b f(x)\,dx \text{ existuje} \iff (\forall \varepsilon>0)\left[\ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon \right]$$

Tuto podmínku ještě zesílíme:

Tvrzení 5.2 Buď $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ omezená. Platí:

$$(8)\quad (R)\int_a^b f(x)\,dx \text{ existuje} \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists \underset{\text{dělení intervalu } \langle a,b\rangle}{D})\left(S(D) - s(D) < \varepsilon\right)$$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Z existence $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ plyne rovnost:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx$$

Z definic $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ plyne: K libovolnému, pevnému $\varepsilon>0$ existují dělení D_1 a D_2 tak, že

$$S(D_1) < \overline{\int_a^b} f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(D_2) > \underline{\int_a^b} f(x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Je-li D dělení vzniklé sjednocením D_1 a D_2, pak D je zjemněním D_1 i D_2 a platí

$$S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2},$$

což implikuje $S(D) - s(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, což jsme chtěli ukázat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ze vztahu $S(D) - s(D) < \varepsilon$ plyne nejdříve, že $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - s(D) < \varepsilon$, ale také $\int_a^b f(x)\,dx - \sup_D s(D) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$, což dle (7) dává tvrzení. ∎

Nyní si uvedeme tři věty, ve kterých jsou zformulovány postačující podmínky na existenci Riemannova integrálu.

<u>Věta 5.1</u> Je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak (R) $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Dk Protože $f \in C(\langle a,b\rangle)$, dle Cantorovy věty je f stejnoměrně spojitá, tzn.

(9) $$(\forall \eta>0)(\exists \delta>0)(\forall x',x''\in\langle a,b\rangle;\ |x'-x''|<\delta)\,(|f(x')-f(x'')|<\eta)$$

K důkazu existence (R) $\int_a^b f(x)\,dx$ využijeme podmínku (8). Buď tedy $\varepsilon>0$ dáno (pevně, ale libovolně). K $\eta := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ najdeme z (9) $\delta>0$ tak, že $|f(x')-f(x'')|<\eta$ kdykoliv $|x'-x''|<\delta$.

Buď D dělení $\langle a,b\rangle$ tak, že $|D|<\delta$ (tj. pro všechna $i\in\{1,\dots,n\}$ $x_i-x_{i-1}<\delta$.
↑ norma dělení

Ze spojitosti f na $\langle a,b\rangle$ také plyne:

$$M_i = \max_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(x^i_{max}) \quad \text{a} \quad m_i = \min_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = f(x^i_{min}) \qquad i=1,\dots,n.$$

Tedy
$$S(D)-s(D) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) < \eta\sum(x_i-x_{i-1}) = \eta(b-a) < \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} < \varepsilon,$$
což dává tvrzení. ▨

<u>Věta 5.2</u> Je-li K konečná množina bodů v $\langle a,b\rangle$ a f je omezená v $\langle a,b\rangle$ a spojitá v $\langle a,b\rangle\setminus K$, pak (R) $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Dk Pro jednoduchost předpokládejme, že $f\in C(\langle a,b))$ (tzn., že $K=\{b\}$) a f je omezená v $\langle a,b\rangle$ konstantou L. K danému $\varepsilon>0$, uvažujme $\alpha\in(a,b)$ tak, že $(b-\alpha)<\frac{\varepsilon}{4L}$. Protože $f\in C(\langle a,\alpha\rangle)$, tak dle Věty 5.1 existuje (R) $\int_a^\alpha f(x)\,dx$. Tedy dle Tvrzení 5.2 existuje dělení $\tilde D$ intervalu $\langle a,\alpha\rangle$ tak, že

$$S(\tilde D)-s(\tilde D)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Přidáme-li k dělení $\tilde D$ bod $\{b\}$, dostaneme dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$, pro které platí:

$$S(D)-s(D) = \underbrace{S(\tilde D)-s(\tilde D)} + \Big(\sup_{x\in\langle\alpha,b\rangle} f(x) - \inf_{x\in\langle\alpha,\beta\rangle} f(x)\Big)(b-\alpha)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{2L(b-\alpha)}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

což jsme chtěli ukázat. ▨

Věta 5.3 Je-li f monotónní na $\langle a,b\rangle$. Pak existuje $(R)\int_a^b f(x)dx$.

(Dk) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je neklesající. Pak $f(x)\in\langle f(a),f(b)\rangle$ $\forall x\in\langle a,b\rangle$. Buď D ekvidistantní dělení, tzn. $x_i = a + i\frac{b-a}{m} \iff x_{i+1}-x_i = \frac{b-a}{m}$ $\forall i=1,\dots,m$

Pak také
$$M_i = f(x_i) \quad a \quad m_i = f(x_{i-1}).$$
Tedy
$$S(D)-s(D) = \frac{b-a}{m}\underbrace{\sum_{i=1}^{m}[f(x_i)-f(x_{i-1})]}_{f(x_n)-f(x_0)} = \frac{(b-a)}{m}(f(b)-f(a)) < \varepsilon,$$
pokud m je dostatečně velké. Důkaz je dokončen odkazem na Tvrzení 5.2. ▨

5.3 Vlastnosti Riemannova integrálu

Nejdříve si ukažeme, že $(R)\int_a^b f(x)$ je lineární funkcionál. Ověřte sami, že $(N)\int_a^b f(x)dx$ je lineární funkcionál také.

Věta 5.4 (LINEARITA $(R)\int_a^b f(x)dx$) Nechť existují $(R)\int_a^b f(x)dx$ a $(R)\int_a^b g(x)dx$. Pak pro $\alpha\in\mathbb{R}$ existují $(R)\int_a^b \alpha f(x)dx$ a $(R)\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ a platí:

(9) $(R)\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha (R)\int_a^b f(x)dx$

(10) $(R)\int_a^b (f(x)+g(x))dx = (R)\int_a^b f(x)dx + (R)\int_a^b g(x)dx$

(Dk) Ad (9) Protože $\inf\{\alpha y, y\in A\} = \alpha \inf\{y, y\in A\}$ pro $\alpha\in\mathbb{R}_+$ ($\alpha>0$)
$\sup\{\alpha y; y\in A\} = \alpha \sup\{y; y\in A\}$ pro $\alpha>0$,

tak, pro $\alpha>0$ $s(D;\alpha f) = \alpha s(D;f)$ a $S(D;\alpha f) = \alpha S(D,f)$

což dává (9) pro $\alpha>0$. Je-li $\alpha\in\mathbb{R}$, pak $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$, kde $\alpha_+,\alpha_-\geq 0$ a
$$\alpha(R)\int_a^b f(x)dx = \alpha_+(R)\int_a^b f(x)dx - \alpha_-(R)\int_a^b f(x)dx =$$
$$= (R)\int_a^b \alpha_+ f(x)dx - (R)\int_a^b (\alpha_-) f(x)dx$$
$$\overset{(10)}{=} (R)\int_a^b (\alpha_+-\alpha_-)f(x)dx = (R)\int_a^b \alpha f(x)dx,$$
pokud (10) platí.

Ad (10) Protože $f(x)+g(x) \geq \inf_M f(x) + \inf_M g(x)$ pro $\forall x\in M$
tak $\inf_M (f(x)+g(x)) \geq$ — ‖ — $\qquad (*)$

Podobně $\sup_M (f(x)+g(x)) \leq \sup_M f(x) + \sup_M g(x) \qquad (**)$

Z nerovností (*) a (**) plyne

$$s(D;f)+s(D;g) \le s(D;f+g) \le S(D;f+g) \le S(D;f)+S(D;g)$$

což implikuje

$$0 \le S(D;f+g)-s(D;f+g) \le S(D;f)-s(D;f)+S(D;g)-s(D;g)$$

což implikuje tvrzení (10). ROZMYSLETE PODROBNĚ. ▨

Věta 5.5 (Riemannův integrál a uspořádání)

- Nechť existují Riemannovy integrály f, g a h na intervalu $\langle a,b\rangle$.
- Pak platí

(1) Je-li $h \ge 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak $(R)\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$

(2) Je-li $f \le g$ na $\langle a,b\rangle$, pak $(R)\int_a^b f(x)\,dx \le (R)\int_a^b g(x)\,dx$,

(3) $(R)\int_a^b |f(x)|\,dx$ existuje a platí

$$\left|(R)\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (R)\int_a^b |f(x)|\,dx$$

[tzn., že Riemannův integrál je příkladem „absolutně konvergentního integrálu"]

Poznámka Newtonův integrál je naopak neabsolutně konvergentní integrál. Platí:

$$(N)\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty \quad \text{ale} \quad (N)\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty.$$

Dk Věty 5.5 **Ad (1)** Je-li $h \ge 0$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$, pak $s(D;h) \ge 0$ pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$. Přechodem k supremu přes všechna dělení dostáváme

$$\underline{\int_a^b} h(x)\,dx \ge 0 \quad \text{ale} \quad \underline{\int_a^b} h(x)\,dx = (R)\int_a^b h(x)\,dx \text{ dle předpokladu.}$$

Ad (2) Tvrzení je důsledkem linearity (R) integrálu a (1) použitou na $h := g - f$

Ad (3) Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Z existence $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ plyne existence dělení D tak, že $S(D;f) - s(D;f) < \varepsilon$.

Buď $\underline{x,y \in \langle x_{i-1},x_i\rangle}$ libovolné. Pak platí (klíčová nerovnost pro tuto úvahu)

$$|f(x)|-|f(y)| \le \big||f(x)|-|f(y)|\big| \le |f(x)-f(y)| \le \sup_{t\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(t) - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

Odsud

$$\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}|f(x)| - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}|f(y)| \leq \sup_{z\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(z) - \inf_{z\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(z)$$

což implikuje

$$0 \leq S(D;|f|) - s(D;|f|) \leq S(D;f) - s(D;f) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{viz výše}}}{<} \varepsilon$$

Tedy dle charakterizace existence (R) integrálu, viz Tvrzení 5.2, $(R)\int_a^b |f(x)|\,dx$ existuje $(<+\infty)$.

Nerovnost $\left|(R)\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (R)\int_a^b |f(x)|\,dx$ plyne z nerovnosti:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

a z části (1):

$$\left.\begin{aligned} |f(x)| - f(x) \geq 0 &\Rightarrow (R)\int_a^b |f(x)|\,dx \geq (R)\int_a^b f(x)\,dx \\ |f(x)| + f(x) \geq 0 &\Rightarrow (R)\int_a^b |f(x)|\,dx \geq -(R)\int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Věta 5.6}}$ (Riemannův integrál a změna intervalu)

Buď f omezená na $\langle a,b\rangle$ a $a<c<b$. Pak

(i) $\left[\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right]$ a $\left[\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx\right]$

a identita

(ii) $$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$$

platí kdykoliv má jedna ze stran smysl.

Navíc, je-li $a \leq c \leq d \leq b$ a $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, pak $(R)\int_c^d f(x)\,dx$ existuje.

ÚMLUVA: Dohodneme se, že

- $\forall a\in\mathbb{R}: \ (R)\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b: \ (R)\int_a^b f(x)\,dx = -(R)\int_b^a f(x)\,dx$

$\boxed{\text{Dk věty 5.6}}$ Dokážeme "jen" první identitu v (i).

- Je-li D dělení $\langle a,b\rangle$, pak $D^* = D \cup \{c\}$ a z bodů v D^* vytvoříme dělení D_1 intervalu $\langle a,c\rangle$ a dělení D_2 intervalu $\langle c,b\rangle$.

Platí tedy:

$$s(D) \le s(D^*) = s(D_1) + s(D_2) \le \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx,$$

což implikuje

$$\text{(p1)} \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

Abychom ukázali opačnou nerovnost, uvažujme libovolné dělení D_1, D_2 intervalů $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ a označme $D = D_1 \cup D_2$.

Pak

$$s(D_1) + s(D_2) = s(D) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

což implikuje (přechodem k sup nejdříve přes D_1, pak přes D_2)

$$\text{(p2)} \qquad \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

Tedy (i) plyne z (p1) a (p2).

- Ověříme nyní identitu (ii).

Z (i) však plyne

$$\text{(p3)} \quad \left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \right) = \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx \right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx \right)$$

kde všechny výrazy v závorkách jsou nezáporné.

Existuje-li $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, pak LS (= levá strana) (p3) je nulová a tedy každý člen na PS (= pravá strana) (p3) musí být nulový.

A naopak. $\square$

Diferenciální počet pracuje s pojmem derivace a vznikl z otázek spojených s pojmy tečna, rychlost, extrém, ...

Integrální počet pracuje s pojmem integrálu a vznikl z otázky určení obsahu plochy pod grafem funkce.

Tyto dvě zdánlivě nesouvisející disciplíny spojuje následující tvrzení.

$\boxed{\text{Věta}}$ 5.7 (Hlavní věta diferenciálního a integrálního počtu)

Buď f omezená na $\langle a,b\rangle$. Definujme

$$F(x) = F_a(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x=a \\ (R)\int_a^x f(x)\,dx & \text{pro } x \in (a,b\rangle. \end{cases}$$

Pak platí:

(i) F je spojitá v $\langle a,b\rangle$.

(ii) Je-li f spojitá v $x_0 \in (a,b)$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.
(Totéž pro jednostrannou spojitost a derivace.)
Speciálně, je-li $f \in C((a,b))$, pak $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$ a tedy $F \in C^1((a,b))$.

Dk. Pro $x_0 \in \langle a,b)$, $x > x_0$ platí:

$$F(x) - F(x_0) = (R)\int_a^x f(x)\,dx - (R)\int_a^{x_0} f(x)\,dx = (R)\int_{x_0}^x f(x)\,dx$$

Odsud

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \left|(R)\int_{x_0}^x f(x)\,dx\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{věta 5.5} \\ (3)}}{\leq} (R)\int_{x_0}^x |f(x)|\,dx \leq L\int_{x_0}^x dx = L(x - x_0),$$

f omezená

což dává spojitost zprava.

Tak (i) je dokázáno.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Platí: $(x > x_0)$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left[(R)\int_a^x f(z)\,dz - (R)\int_a^{x_0} f(z)\,dz\right] = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(z)\,dz$$

Tak

$$(*) \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(z) - f(x_0)]\,dz$$

Ze spojitosti f v x_0 plyne: K danému $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tak, že pro všechna $z \in (x_0, x_0+\delta)$ $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pro $x \in (x_0, x_0+\delta)$

plyne z (*):

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| < \varepsilon\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x} 1\,dz = \varepsilon,$$

tzn. $F'(x_0+)$ existuje a platí $F'(x_0+) = f(x_0+)$. ▨

$\boxed{\text{Věta 5.8}}$ (O existenci primitivní funkce) Je-li $-\infty \le a < b \le +\infty$, a je-li $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ spojitá, pak existuje primitivní funkce k f na (a,b).

Dk. Volme nejdříve $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\{a_n\}$ je klesající a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle a_n, b_n\rangle$. Dle předchozí věty

$$F_n(x) = \int_{a_n}^{x} f(\xi)\,d\xi \qquad x \in (a_n, b_n)$$

primitivní k f na (a_n, b_n). Volme $x_0 \in (a_1, b_1)$ a položme

$$\hat{F}_n(x) = F_n(x) - F_n(x_0)$$

Pak $\hat{F}_n$ jsou PF k f na (a_n, b_n) a navíc $\hat{F}_n(x_0) = 0$. Pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, jsou $\hat{F}_n$ a $\hat{F}_m$ prim. fce na (a_m, b_m), a liší se nejvýš o konstantu, ale podle se shodují v x_0 tak

$$\hat{F}_n = \hat{F}_m \text{ na } (a_m, b_m).$$

Definujme tedy

$$F(x) := \hat{F}_n(x) \text{ v } (a_n, b_n) \text{ pro } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tedy F je P.F. k f na (a,b). ▤

$\boxed{\text{DŮLEŽITÁ POZOROVÁNÍ}}$ (1) Věta 5.7 nám spojuje Riemanna s Newtonem, neboť nám říká, jak spočítat Riemannův integrál pro $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Jednak víme, viz Věta 5.1, že pak Riemannův integrál f existuje a navíc, dle Věty 5.7, F_a je primitivní fce k f, která se od jakékoliv jiné primitivní funkce F liší o konstantu, tedy $F = F_a - c$ a máme

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{Věta 5.7}}{=} F_a(b) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{F_a(a)} = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$$

$$= (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

② Buď $f \in C((a,+\infty))$ a g, h mají derivaci všude v (a,b).

Definujme
$$\varphi(x) := \int_a^{g(x)} f(z)\,dz \quad \text{a} \quad \psi(x) := \int_{h(x)}^{g(x)} f(z)\,dz.$$

Pak umíme spočítat φ' a ψ'. Ze spojitosti f totiž plyne z Věty 5.8 existence primitivní funkce F k f na $(a,+\infty)$ tak, že
$$\underset{\sim\sim}{\varphi(x)} = \int_a^{g(x)} f(z)\,dz = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F(g(x)) - F(a)},$$
což umíme derivovat dle věty o derivování složené funkce:
$$\varphi'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x).$$

Podobně (rozmyslete)
$$\psi'(x) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

Umíme tedy derivovat integrály s proměnnou horní/dolní mezí.

Dle pozorování ① víme, že pro $f \in C(\langle a,b\rangle)$ jak Newtonův tak Riemannův integrál existují a rovnají se. Platí také, že pro $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ existence obou integrálů implikuje jejich rovnost, viz následující tvrzení.

$\boxed{\text{Věta}}$ 5.9 Pokud existují $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ a $(N)\int_a^b f(x)\,dx$, pak se rovnají.

Dk • Z existence (N) integrálu plyne existence zobecněné primitivní funkce F tak, že
$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) \quad \text{a} \quad F' = f \text{ v } \langle a,b\rangle \setminus K,\ K \text{ konečná.}$$

Existence (R) integrálu naopak garantuje (pro dané (libovolné) $\varepsilon>0$) existenci dělení D' tak, že
$$(♡) \quad s(D') > (R)\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \quad \text{a} \quad S(D') < (R)\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$$

Buď D dělení vzniklé sjednocením D' a K. Pak dle Lagrangeovy VOSH
$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{kde } \xi_j \in (x_{j-1}, x_j) \quad j = 1,\dots,m.$$

Pak
$$(\bullet) \quad (N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) = \sum_{j=1}^m F(x_j) - F(x_{j-1}) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_j) \begin{cases} \le S(D) \le S(D') \\ \ge s(D) \ge s(D') \end{cases}$$

(neb D je zjemnění D')

Kombinací (♡) a (•) dostáváme:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \le (N)\int_a^b f(x)\,dx \le (R)\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$

což implikuje

$$0 \le \left|(N)\int_a^b f(x)\,dx - (R)\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon \text{, a tvrzení platí. } \blacksquare$$

Důsledkem Hlavní věty diferenciálního a integrálního počtu a vět o integraci per-partes a substituci pro primitivní funkce jsou následující dvě tvrzení.

Věta 5.10 (integrace per partes) Jsou-li $f, g \in C(\langle a,b\rangle)$ takové, že f', g' existují v (a,b), pak $\int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,dx$.

Dk Za uvedených předpokladů oba integrály, Newtonův a Riemannův, existují a rovnají se. Také fg je primitivní funkce k $f'g + fg'$ (dle věty o derivování součinu) a výraz $[fg]_a^b$ má smysl (je dokonce konečný). Tak

$$[fg]_a^b = \int_a^b [f'g + fg']\,dx \underset{\text{linearita}}{=} \int_a^b f'g\,dx + \int_a^b fg'\,dx. \quad \blacksquare$$

Věta 5.11 (o substituci) **Schéma 1** Buď $\varphi \in C^1(\langle \alpha,\beta\rangle)$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a $\varphi[\langle\alpha,\beta\rangle] \subset \langle a,b\rangle$. Pak

$$\left[\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx\right]$$

Schéma 2 Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$, $\varphi \in C^1(\langle\alpha,\beta\rangle)$, $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in \langle\alpha,\beta\rangle$, $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Potom

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)=\alpha}^{\varphi^{-1}(b)=\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dx}$$

Dk **Schéma 1** Je-li F primitivní fce k f na $\langle a,b\rangle$, pak víme (z věty o substituci pro primitivní fce), že $F\circ\varphi$ je primitivní fce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Tedy

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'\,dt = [F\circ\varphi]_\alpha^\beta = \underbrace{F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))}_{[F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Schéma 2 Protože $(f\circ\varphi)\varphi' \in C(\langle\alpha,\beta\rangle)$, tak existuje primitivní fce Φ k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Dle 2. věty o substituci pro primitivní funkce víme, že $\Phi\circ\varphi^{-1}$ je prim. fce k f na $\langle a,b\rangle$.

Tedy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\Phi\circ\varphi^{-1}]_a^b = [\Phi]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)=\alpha}^{\varphi^{-1}(b)=\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \quad \blacksquare$$

5.4 Věty o střední hodnotě pro integrál

Cílem této sekce je ukázat věty o střední hodnotě pro integrál a využít je ke zkoumání existence (N) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Věta 5.12 (1. věta o střední hodnotě)

- Existují-li (R) $\int_a^b g(x)\,dx$ a (R) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ a je-li g buď ≥ 0 nebo ≤ 0 v (a,b), pak existuje $c \in \left\langle \inf_{\langle a,b\rangle} f, \sup_{\langle a,b\rangle} f \right\rangle$ tak, že

(11) $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)\,dx.$$

- Je-li navíc $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že

(12) $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

- Speciálně, je-li $g \equiv 1$ dostáváme

(13) $$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

průměr neboli střední hodnota funkčních hodnot f přes interval $\langle a,b\rangle$

Pozorování: Dolní Riemannův součet $s(D,f)$ pro ekvidistantní dělení je dáno vztahem

$$s(D,f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{m} \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) = \frac{b-a}{n}\sum m_i$$

Pokud integrál na pravé straně identity (13) existuje, pak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} m_i,$$ což je průměr infim přes jednotlivé intervaly dělení.

Dk věty 5.12 Protože

$$\inf_{\langle a,b\rangle} f =: \boxed{m \leq f(x) \leq M} := \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$$

tak pro $g \geq 0$ dostaneme

$$m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Odsud

(14) $$\underbrace{m\,(R)\int_a^b g(x)\,dx \leq (R)\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\,(R)\int_a^b g(x)\,dx}$$

Je-li $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, pak z (14) plyne, že (R) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, a tvrzení platí.

Je-li $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, tak (14) implikuje

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M,$$

což implikuje (11). Je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a protože $m \leq f(x) \leq M$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$, dle Darbouxovy věty existuje $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že (12) platí. Kdyby $\xi = a$ nebo $\xi = b$ pak existuje $\xi_0 \in (a,b)$ tak, že $f(\xi_0) = f(\xi)$. V opačném případě by totiž $f(x) > f(a)$ $\forall x \in (a,b\rangle$ (nebo $f(x) < f(a)$ $\forall x \in (a,b\rangle$), což vede ke sporu s (12) neboť

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx > f(a)\int_a^b g(x) \quad \text{a (12) neplatí.}$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Věta 5.13}}$ (2. věta o střední hodnotě). Buď $f, g, g' \in C(\langle a,b\rangle)$ a g monotónní (tzn. $g' \geq 0$ v (a,b) nebo $g' \leq 0$ v (a,b)). Potom $\exists\, \xi \in (a,b)$:

$$(15) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Tvrzení (15) platí i za slabších předpokladů: $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, g je monotónní na $\langle a,b\rangle$. Tyto předpoklady implikují, že $(R)\int_a^b g(x)\,dx$, $(R)\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ existují. *)

Dk. Je-li F primitivní funkce k f, pak

$$\int_a^b \underset{F(x)}{f(x)}\,\underset{g'(x)}{g(x)}\,dx = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg' \overset{\text{V.5.12}}{\underset{\text{1. VOSH}}{=}} F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)[g(b)-g(a)]$$

$$= g(b)[F(b)-F(\xi)] + g(a)[F(\xi)-F(a)] =$$

$$= g(a)\int_a^\xi F(s)\,ds + g(b)\int_\xi^b F(s)\,ds.$$

$\blacksquare$

<u>Příklad</u> Ukážeme, že (i) $(N)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx < \infty$ (tzn. integrál konverguje)

ale (ii) $(N)\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$ (tzn. integrál diverguje).

*) Nanč lze vzít (předefinovat) pro $g \geq 0$, g klesající funkci g s $g(b) = 0$. Tak druhý člen v (15) vypadne.

Řešení $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Protože $\frac{\sin x}{x} \in C((0,+\infty))$, tak existuje dle Věty 5.8 primitivní funkce k $\frac{\sin x}{x}$ na $(0,+\infty)$. Označme ji F (nelze ji nalézt analyticky). Protože lze dodefinovat $\frac{\sin x}{x}$ spojitě v bodě 0 hodnotou 1, tak $(N)\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty$. Pro $(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ platí:

$$(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{k\to+\infty} F(k) - F(1) = \lim_{k\to+\infty} \int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

Dle Věty o integraci per-partes dostáváme:

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^k - \int_1^k \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\cos k}{k}} - \int_1^k \frac{\cos x}{x^2}\,dx \qquad k\to\infty$$

$$\sin x \xrightarrow{i} -\cos x \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow{d} -\frac{1}{x^2}$$

Protože $|\cos x| \le 1$ v $\mathbb{R}$, tak $\left|\int_1^k \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \le 1 \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = 1 - \frac{1}{k} < +\infty$,

tak $\int_1^k \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty$. $\boxed{\text{Tedy } (N)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty.}$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Uvažujme $L(k) := \int_1^k \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. Pak platí: $k_1 \le k_2 \Rightarrow L(k_1) \le L(k_2)$. Tedy $L(k)$ je neklesající, a $\lim_{k\to+\infty} L(k)$ existuje vždy a je buď vlastní ($\in \mathbb{R}^+$) nebo $+\infty$. Ukážeme, že $\lim_{k\to+\infty} L(k) = +\infty$.

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \ge \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \sum_{i=2}^{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin x}_{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \ge \frac{2}{\pi} \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\ln(n+1) - \ln 2\right) \to +\infty \text{ pro } n\to+\infty.$$

Při nerovnostech jsme využili skutečnosti, že

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \sum_{i=2}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}. \qquad ■$$

Další strana 5/19 se liší od této (strany) v použití 2. věty o střední hodnotě a Bolzano-Cauchyho podmínky namísto věty o integraci per-partes.

Řešení $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Protože $\frac{\sin x}{x} \in C((0,+\infty))$, tak existuje dle V.5.8 primitivní funkce k $\frac{\sin x}{x}$ na $(0,+\infty)$. Označme ji F (nelze ji nalézt analyticky). Navíc lze v 0 dodefinovat $\frac{\sin x}{x}$ spojitě hodnotou 1 a tak $(N)\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx < \infty$ a pro $(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ platí:

$$(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{k\to+\infty} F(k) - F(1) = \lim_{k\to+\infty} \int_1^k \frac{\sin x}{x}dx$$

Dle 2. věty o střední hodnotě dostáváme:

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}dx \underset{g(x)=\frac{1}{x}}{=} g(1)\int_1^{\xi} \sin x\,dx + g(k)\int_{\xi}^{k} \sin x\,dx$$

$$= \cos\xi - \cos 1 + \frac{1}{k}(\cos\xi - \cos k),$$

což implikuje

$$\int_1^k \frac{\sin x}{x}dx \le 3 \quad \text{a také} \quad |F(k_1)-F(k_2)| = \left|\int_{k_1}^{k_2} \frac{\sin x}{x}dx\right| \overset{\text{2.VOSH}}{\le} 2\underbrace{\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}_{\to 0}$$

a dle B.C.-podmínky $\lim_{k\to+\infty} F(k)$ existuje vlastní.

Tedy $(N)\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} < +\infty$.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Uvažujme $L(k) := \int_1^k \frac{|\sin x|}{x} \Rightarrow [k_1 \le k_2 \Rightarrow L(k_1) \le L(k_2)]$

Tedy $L(k)$ je neklesající a $\lim_{k\to+\infty} L(k)$ existuje vždy buď vlastní nebo $+\infty$. Ukážeme, že $\lim_{k\to+\infty} L(k) = +\infty$.

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \ge \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \sum_{i=2}^{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \ge \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\pi}\int_0^{\pi} \sin x$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \ge \frac{2}{\pi}\int_2^{n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{2}{\pi}\left(\ln(n+1) - \ln 2\right) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty,$$

kde jsme využili skutečnosti, že

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x}dx = \sum_{i=2}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x}dx \le \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$$

$n!$, jeho odhad a rozšíření na funkci Gamma Γ

Nejdříve se zaměříme na odhad $\boxed{n!}$, přičemž použijeme kroky používané výše při odhadu (N) $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.
Zavedeme nejdříve dvě posloupnosti

$$\boxed{H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \quad \text{a} \quad \boxed{L_n := \sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n} \ln k}.$$

Pozorujeme:
(⊛)

$$\boxed{n! = e^{L_n}}$$

← TO JE SNADNÉ, ALE UŽITEČNÉ.

Nyní ukážeme: $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\text{(i)} \quad \ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln n$$

$$\text{(ii)} \quad n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{7}{8} \le L_n \le n\ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2}$$

Druhý vztah nám pak dá, s využitím (⊛), odhady (dolní i horní) na $n!$. Vskutku, z (ii) plyne

$$\exp\left(n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{7}{8}\right) \le n! \le \exp\left(n\ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2}\right)$$

$\Downarrow$

$$n^n e^{-n} \sqrt{n}\, e^{7/8} \le n! \le n^n e^{-n} \sqrt{n}\, e$$

$\Downarrow$

$$\boxed{e^{7/8} \le \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \le e}$$

2,399 ... 2,718

Lepší (přesnější) informaci poskytuje Stirlingův vzorec:

$$n! = (1+\theta_n)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \sqrt{2\pi} \doteq 2{,}507$$

Zbývá ověřit odhady (i) a (ii).

Dk (i) Vyjdeme ze vztahu

$$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{k},$$ ← OVĚŘTE

který využijeme 2x v následujícím výpočtu:

$$\underline{\ln(m+1)} = \int_1^{m+1}\frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{m} \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \underline{H_m} = 1+\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k}$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1} \le 1+\sum_{k=1}^{m-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} = 1+\int_1^m \frac{dx}{x} = \underline{1+\ln m} \qquad \square$$

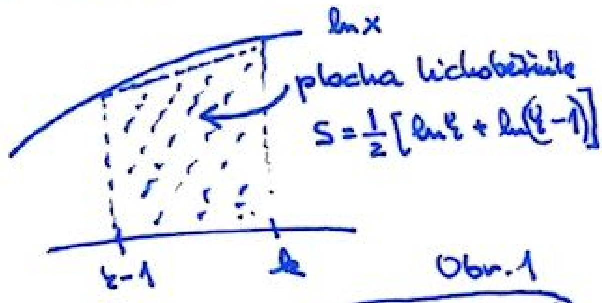
známá finta: nejdříve zavedu $m=k-1$ a pak toto m označím k

a podtržené dává tvrzení.

Dk (ii) Vyjdeme ze vztahů: $\int \ln x = x\ln x - x$ a

$$(*) \qquad \underline{m\ln m - m + 1} = \left[x\ln x - x\right]_1^m = \int_1^m \ln x\,dx = \underline{\sum_{k=2}^{m}\int_{k-1}^{k} \ln x\,dx}$$

Poslední integrál v (*) odhadneme nejdříve zdola a potom seshora.



Obr. 1

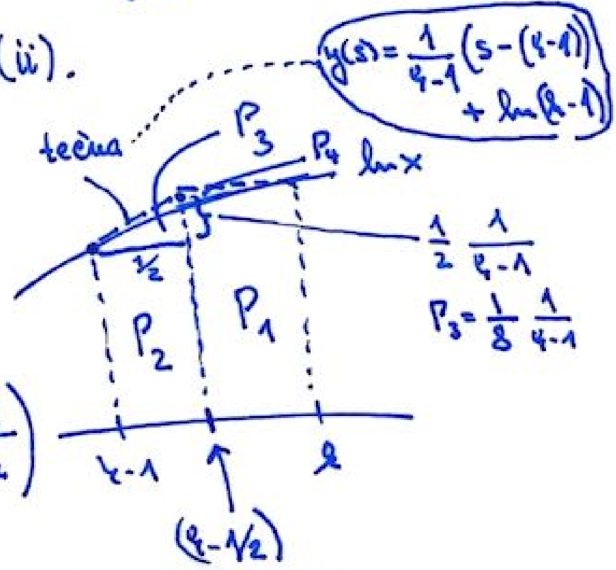
__Dolní odhad__, viz Obr. 1.:

$$\int_{k-1}^{k} \ln x\,dx \ge \frac{\ln k + \ln(k-1)}{2}, \text{ což dává}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=2}^{m}\int_{k-1}^{k} \ln x\,dx \ge L_m - \frac{\ln m}{2}$$

Odsud a z (*) plyne druhá nerovnost v (ii).



__Horní odhad__, viz Obr. 2

$$\int_{k-1}^{k} \ln x\,dx \le P_1+P_2+P_3-P_4 = \frac{\ln k}{2} + \frac{\ln(k-1)}{2} + \frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{4}.$$ Odsud

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=2}^{m}\int_{k-1}^{k} \ln x \le \sum_{k=2}^{m}\frac{\ln k + \ln(k-1)}{2} + \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

Odsud, z (*) a z definice L_m:

$$m\ln m - m + 1 \le L_m - \frac{\ln m}{2} + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \le L_m - \frac{\ln m}{2} + \frac{1}{8},$$

což dává (ii). ■

$\boxed{\text{Gamma funkce}}$ je definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt \quad , \text{kde } x > 0.$$

Platí:

(i) $\mathcal{D}_\Gamma = (0, +\infty)$

(ii) $\Gamma(1) = 1$ ← OVĚŘTE

(iii) $\Gamma(m+1) = m! = m\Gamma(m)$ ← OVĚŘTE INTEGRACÍ PER PARTES

(iv) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ← —||—

(v) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ← UŽIJTE SUBSTITUCI $\sqrt{t} = z$ A UŽIJTE VZTAH $\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(vi) $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{m!}\frac{\sqrt{\pi}}{4^m}$

↑ POMOCÍ INTEGRACE PER PARTES A (v).

(Dk) Provedeme jen (i). Ostatní sami dle návodu.

$\boxed{\text{Ad (i)}}$ $\quad \Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

Na $(0,1)$ užijeme $0 \le e^{-t} \le 1$, zatímco na $(1,+\infty)$ je $\left|t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}\right| \le C$

OVĚŘTE, PROČ ?

Tedy

$$\Gamma(x) \le \int_0^1 t^{x-1}dt + C\int_1^{+\infty} e^{-t/2}dt$$

$$= \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 + C\left[-2e^{-t/2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x} + 2Ce^{-1/2} < +\infty.$$

■

Q: Proč není Γ definována pro $x = 0$?

Dva dodatky: (D1) Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru.

(D2) π je iracionální číslo.

$\boxed{D1}$ Zbytek $R_{n+1}(x) := f(x) - T_n^{f,x_0}(x)$ umíme napsat v Lagrangeově či Cauchyho tvaru. Nyní jej pomocí integrace per partes vyjádříme ve tvaru integrálu.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $x > x_0$, a $f \in C^{n+1}(\langle a, x\rangle)$. Pak

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n^{f,x_0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

Dk: Provedeme indukcí (lze ale i přímo n-krát použitím per partes).

Pro $\boxed{n=0}$ $\quad R_1(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$ ✓

Pro $\boxed{n=1}$ $\quad R_2(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt - f'(x_0)(x-x_0)$

$$\overset{\text{per partes}}{=} \int_{x_0}^{x} \underset{\substack{\downarrow\int \\ t}}{1} \; \underset{\substack{\downarrow d \\ f''(t)}}{f'(t)}\,dt - f'(x_0)(x-x_0) = \left[t f'(t)\right]_{x_0}^{x} - f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\,dt$$

$$= x f'(x) - x_0 f'(x_0) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\,dt = x\int_{x_0}^{x} f''(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt, \quad \text{q.e.d.}$$

Předpokládejme, že vztah platí pro $\boxed{n}$. Dokažme jej pro $\boxed{n+1}$. Pak

$$R_{n+1}(x) = \underbrace{f(x) - P_{n-1}^{f,x_0}(x)}_{R_n(x)} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} \underset{\substack{\downarrow d \\ f^{(n+1)}(t)}}{f^{(n)}(t)} \underset{\substack{\downarrow\int \\ -\frac{(x-t)^n}{n}}}{(x-t)^{n-1}}\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

∎

$\boxed{\text{Tvrzení D2}}$ $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (π je iracionální)

Dk: Sporem. Nechť π je racionální, tzn. $\exists\, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} : \pi = \frac{p}{q}$.

Definujme funkci $\underbrace{f(x) := \frac{1}{n!} x^n (p-qx)^n}$. Pak vidíme:

(1) • f je polynom stupně $2n$

(2) • f lze psát ve tvaru $\underbrace{f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k}$, kde $c_k \in \mathbb{Z}$ ← celá čísla

(3) • odsud plyne $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k < n$

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k \in \mathbb{Z} \text{ pro } k \geq n$$

(4) • $f\left(\frac{p}{q} - x\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{p-qx}{q}\right)^n \left(p - q\left(\frac{p-qx}{q}\right)\right)^n = \frac{(p-qx)^n}{n!\, q^n} q^n x^n = f(x)$

a tedy $f(\pi - x) = f(x) \overset{(3)}{\Longrightarrow} f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ pro $0 \leq k \leq 2n$.

Dále definujme

$$\boxed{F(x) := f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)}$$

Pak dle (3), (4): $\boxed{F(0), F(\pi) \in \mathbb{Z}.}$

Navíc: $\left(F'(x) \sin x - F(x) \cos x\right)' = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = \underline{f(x) \sin x}$,

což implikuje

(*) $\boxed{\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = \left[F'(x) \sin x - F(x) \cos x\right]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.}$

Avšak $f(x) > 0$ na $(0, \pi)$, $f \in C^\infty(0, \pi)$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.

a $\max_{x \in \langle 0, \pi \rangle} f(x) = f\left(\frac{p}{2q}\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{p}{2q}\right)^n \left(\frac{p}{2}\right)^n < \frac{1}{n!} \pi^n p^n$

PROČ?

Tedy $0 \leq f(x) \sin x < \frac{1}{n!} \pi^n p^n \Rightarrow \left[0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < \frac{\pi}{n!} \pi^n a^n < 1\right]$

pro n dostatečně velké (víme $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$)

což dává spor s (*).

∎

Kapitolu o Newtonově a Riemannově integrálu zakončíme následující fyzikální úlohou, kterou budeme řešit nejdříve "newtonsky" a pak "riemannovsky".

<u>Úloha</u> Uvažujme tyč konstantního průřezu A délky $b-a$. Nechť $\varrho(x)$ označuje hustotu tyče v $x \in (a,b)$ a $m(x)$ je hmotnost části tyče od konce a k bodu x. Je-li $\varrho(x) = \varrho_0 > 0$ pro $\forall\, x \in (a,b)$, pak celková hmotnost tyče $M = \varrho_0 A(b-a)$. Náš úkol je zjistit hmotnost tyče pro ϱ nekonstantní.

<u>Řešení</u> (a) Pro $a < x < y < b$, je $m(y) - m(x)$ hmotnost tyče mezi body x a y a tedy

$$\frac{m(y)-m(x)}{(y-x)A}$$ je průměrná hustota tyče mezi x a y

Přechodem k $\lim_{y\to x}$ dostaneme

$$m'(x) = \lim_{y\to x} \frac{m(y)-m(x)}{y-x} = A\varrho(x)$$ tj. A násobek hustoty v bodě x.

Odsud

$$M = m(b) - m(a) = A\int_a^b \varrho(x)\,dx = A\left[R\right]_a^b,$$ kde R je prim. fce k ϱ na (a,b).

Toto bylo řešení ve smyslu Newtonova int.

(b) Rozdělme tyč na n-dílků $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1,\dots,n$, stanovme "střední" hodnotu hustoty $\overline{\varrho}_i$ ($\overline{\varrho}_i$ může být $\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} \varrho(x)$, $\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} \varrho(x)$, $\frac{\varrho(x_i)+\varrho(x_{i-1})}{2}$, či hodnota $\varrho(\xi)$ v jakémkoliv bodě $\xi \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.) a pro $m_i := \overline{\varrho}_i A(x_i - x_{i-1})$ a pro

Pak lze předpokládat, že pro dostatečně velké n bude platit

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \overline{\varrho}_i A(x_i - x_{i-1})}_{\sigma_n(\varrho)}$$

Bude-li $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\varrho)$ existovat, pak nazveme tuto limitu (Riemannův) integrál $A\varrho(x)$ od a do b, tj. $M = (R)\int_a^b A\varrho(x)\,dx$.

■