

Matematická analýza II

LS 2020/21

1. zápočtový test

6.4.2021

1. (5 bodů) Nalezněte všechna y splňující

$$\begin{aligned}y' &= x\sqrt{|y-1|} & x \in \mathbb{R}, \\y(-4) &= 5, \\y(0) &= 0, \\y(4) &= 2.\end{aligned}$$

2. (5 bodů) Nalezněte obecné řešení rovnice

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = x(e^x + 1).$$

Řešení

1:

Nejdříve si všimneme, že $y = 1$ je řešení. Navíc vidíme, že y musí být neklesající pro $x > 0$ a nerostoucí pro $x < 0$. A pokud existuje vlastní derivace $y'(0)$, pak $y'(0) = 0$. Pokud $y \neq 1$, řešíme separací proměnných

$$\frac{y'}{\sqrt{|y-1|}} = x \implies 4\operatorname{sign}(y-1)(\sqrt{|y-1|})' = (x^2)'$$

A tedy pokud $y > 1$

$$\begin{aligned} 4(\sqrt{|y-1|})' &= (x^2)' \implies \sqrt{|y-1|} = \frac{x^2}{4} + C \\ \implies |y-1| &= \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 \implies y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

s podmínkou $\frac{x^2}{4} + C > 0$.

Pokud $y < 1$ pak

$$\begin{aligned} 4(\sqrt{|y-1|})' &= -(x^2)' \implies \sqrt{|y-1|} = -\frac{x^2}{4} - C \\ \implies |y-1| &= \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 \implies y = -\left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

s podmínkou $\frac{x^2}{4} + C < 0$.

Nakonec tedy sestrojíme naše řešení pomocí lepení. Víme, že $y(0) = 0 < 1$ a tedy na okolí bodu $x = 0$ má řešení tvar $y = -\left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1$ a pokud má platit $y(0) = 0$, pak nutně $C = -1$ a máme $y = -\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 + 1$. To musí platit pro všechna x splňující $\frac{x^2}{4} - 1 < 0$ a tedy pro $x \in (-2, 2)$. Obráceně, $y(4) = 2 > 1$ a tedy na okolí $x = 4$ musí platit $y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1$ a pokud $y(4) = 2$, pak $C = -3$. To platí pro všechna $x > 0$ splňující $\frac{x^2}{4} - 3 > 0$ a tedy $x \in (\sqrt{12}, \infty)$. Konečně pro $y(-4) = 5 > 1$ a tedy na okolí $x = -4$ musí platit $y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1$ a pokud $y(-4) = 5$, pak $C = -2$. To platí pro všechna $x < 0$ splňující $\frac{x^2}{4} - 2 > 0$ a tedy $x \in (-\infty, -\sqrt{8})$.

Celkem tedy

$$y = \begin{cases} 1 + \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{8}), \\ 1 & x \in [-\sqrt{8}, -2], \\ 1 - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 & x \in (-2, 2), \\ 1 & x \in [2, \sqrt{12}], \\ 1 + \left(\frac{x^2}{4} - 3\right)^2 & x \in (\sqrt{12}, \infty). \end{cases}$$

2: Nejdříve si určíme charakteristický polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = (\lambda - 1)^3 + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 + 1).$$

Máme tedy tři kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Fundamentální systém je tedy

$$FS = \{e^x, e^x \cos x, e^x \sin x\}.$$

Pravou stranu si rozepíšeme jako součet speciálních pravých stran

$$\begin{aligned}f_1 &= xe^x, \\f_2 &= x.\end{aligned}$$

Budeme tedy hledat postupně dvě partikulární řešení příslušející f_1 a f_2

$$\begin{aligned}y_{1p} &= (A_1x^2 + B_1x)e^x, & y'_{1p} &= (A_1x^2 + B_1x)e^x + (2A_1x + B_1)e^x, \\y''_{1p} &= (A_1x^2 + B_1x)e^x + 2(2A_1x + B_1)e^x + 2A_1e^x \\y'''_{1p} &= (A_1x^2 + B_1x)e^x + 3(2A_1x + B_1)e^x + 6A_1e^x, \\y_{2p} &= A_2x + B_2, & y'_{2p} &= A_2, & y''_{2p} &= 0, & y'''_{2p} &= 0.\end{aligned}$$

Dosadíme postupně do rovnic a určíme parametry

$$\begin{aligned}x &= y'''_{2p} - 3y''_{2p} + 4y'_{2p} - 2y_{2p} \\&= 4A_2 - 2(A_2x + B_2) = -2A_2x + 4A_2 - 2B_2 \implies A_2 = -\frac{1}{2}, B_2 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xe^x &= y'''_{1p} - 3y''_{1p} + 4y'_{1p} - 2y_{1p} \\&= (A_1x^2 + B_1x)e^x + 3(2A_1x + B_1)e^x + 6A_1e^x - 3((A_1x^2 + B_1x)e^x + 2(2A_1x + B_1)e^x + 2A_1e^x) \\&\quad + 4((A_1x^2 + B_1x)e^x + (2A_1x + B_1)e^x) - 2((A_1x^2 + B_1x)e^x) \\&= 2A_1xe^x + e^xB_1 \implies A_1 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = 0\end{aligned}$$

Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$y = C_1e^x + C_2e^x \cos x + C_3e^x \sin x + \frac{x^2e^x}{2} - \frac{x}{2} - 1$$