Matematická analýza II

LS 2020/21

2. zápočtový test

27.4.2021

1. **(3,5 bodu)** Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

2. **(6,5 bodu)** Buď $p \in \mathbb{R}$. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergencinásledující řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p \operatorname{arctan}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right)$$

Řešení

1: Definujme
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)!}.$$
A chceme určit $f(1)$. Poloměr konvergence této řady je $R = \infty$. Můžeme tedy derivovat člen po členu a tedy
$$f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = xe^x.$$
Pak můžeme zintegrovat a získáme
$$f(x) = \int xe^x = xe^x - e^x + C.$$
Protože $f(0) = 0$, vidíme, že $C = 1$ a tedy
$$f(x) = e^x(x-1) + 1$$
a následně také $f(1) = 1$.

2: Definujme si
$$a_n := \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right), \qquad b_n := 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right), \qquad c_n := \arctan\left(n + \frac{1}{n^{1000}}\right)$$
zaíimá nás pak řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n)^p c_n.$$
Nejdříve si heuristicky určíme chování a_n, b_n, c_n. O první posloupnosti vidíme jen to, že je omezená a asi oscilující a že pro velká n se bude chovat asi jako $\sin n$. Posloupnost b_n pak evidentně konverguje monotónně k nule. Posloupnost c_n je omezená, odražená od nuly a nesjpíše bude možná monotónní pro dost velká n.

Nejdříve se podíváme na nutnou podmínku. Evidentně, pokud $p \leq 0$, pak není splněna nutná podmínka a řada nemůže konvergovat.

Věnujme se tedy jen případu $p > 0$. Pro první člen řady použijeme naší hypotézu o chování u nekonečna a rozepíšeme
$$a_n = \sin\left(\frac{n^2}{n+1} - n + n\right) = \sin\left(n - \frac{n}{n+1}\right) = \sin n \cos\left(\frac{n}{n+1}\right) - \cos n \sin\left(\frac{n}{n+1}\right).$$
Díky tomuto rozpisu můžeme naši řadu rozepsat na řady dvě
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cos\left(\frac{n}{n+1}\right)(b_n)^p c_n - \cos n \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)(b_n)^p c_n.$$
Věnujme se nejdříve absolutní konvergneci. Použitím limity
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
vidíme, že pro dostatečně velká n platí
$$\left|\left(\sin n \cos\left(\frac{n}{n+1}\right) - \cos n \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)(b_n)^p c_n\right| \leq 2\frac{1}{n^{2p}}\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{n^{2p}}$$

Protože uvažujeme pouze kladná p, vidíme, že řada $\sum \frac{\pi}{n^{2p}}$ konverguje pokud $p > \frac{1}{2}$ a tedy absolutně konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cos\left(\frac{n}{n+1}\right)(b_n)^p c_n - \cos n \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)(b_n)^p c_n.$$

Věnujme se nyní absolutní konvergenci pro $p \in (0, \frac{1}{2}]$ a ukážeme, že řada diverguje a to pomocí odhadu (pro velká n)

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right)(b_n)^p c_n\right| \geq \frac{\pi}{4n^{2p}}\sin^2\left(\frac{n^2}{n+1}\right) &= \frac{\pi}{8n^{2p}}\left(1-\cos\left(\frac{2n^2}{n+1}\right)\right)\\ &= \frac{\pi}{8n^{2p}}\left(1-\cos\left(2n-\frac{2n}{n+1}\right)\right)\\ &= \frac{\pi}{8n^{2p}}\left(1-\cos(2n)\cos\left(\frac{2n}{n+1}\right)-\sin(2n)\sin\left(\frac{2n}{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

Řady $\sum \frac{\cos(2n)}{n^{2p}}$ a $\sum \frac{\sin(2n)}{n^{2p}}$ konvergují dle Dirichletova kritéria. Dále, protože pro velká n jsou posloupnosti $\cos\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ a $\sin\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ monotónní a omezené, konvergují dle Abelova kritéria i řady $\sum \frac{\cos(2n)}{n^{2p}}\cos\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ a $\sum \frac{\sin(2n)}{n^{2p}}\sin\left(\frac{2n}{n+1}\right)$. Na druhou stranu ale řada $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ diverguje. Celkem tedy naše řada nekonverguje absolutně pro $p \leq \frac{1}{2}$.

Nakonec ukážeme, že řada konverguje neabsolutně pro $p \in (0, 2]$. Víme, že

- posloupnost $\sin n$ ma omezenou posloupnost částečných součtů
- poslouonost b_n^p konverguje monotónně k nule
- posloupnost $\cos(n/(n+1))$ konverguje monotónně k $\cos(1)$
- posloupnost $\sin(n/(n+1))$ konverguje monotónně k $\sin(1)$
- posloupnost c_n konverguje k $\pi/2$ a ukážeme, že pro velká n dokonce monotónně. K tomu spočteme
$$(\arctan(x + x^{-1000}))' = \frac{1}{1+(x+x^{-1000})^2}(1 - \frac{1000}{x^{1001}}) \geq 0$$
pro $x \geq 2$. Posloupnost c_n je tedy rostoucí pro $n > 2$.

Nyní už tedy

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \sin n b_n^p \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} \cos n b_n^p && \text{kovergují dle Dirichletova kriteria,}\\ &\sum_{n=1}^{\infty} \sin n b_n^p \cos(n/(n+1)) \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} \cos n b_n^p \sin(n/(n+1)) && \text{kovergují dle Abelova kriteria,}\\ &\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n b_n^p \cos(n/(n+1)) - \cos n b_n^p \sin(n/(n+1)) && \text{a tedy konverguje,}\\ &\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^p c_n && \text{koverguje dle Abelova kriteria.}\end{aligned}$$