**Matematická analýza I**

*ZS 2020/21*

# 3. zápočtový test

21.12.2020

**1. (5 bodů)** Buď $a, b > 0$ a pro $x \in \mathbb{R}$ uvažujte funkci

$$f(x) := \arctan\left(\frac{x}{a + bx^2}\right)$$

Určete parametry $a, b$ tak, aby měla funkce $f$ globální extrém v $x = 1$ a inflexní bod v $x = \sqrt{3}$. Jaké je globalní minimum a maximum takové funkce?

**2. (5 bodů)** Buď $b \in \mathbb{R}$. Určete pro která $a \in \mathbb{R}$ platí, že

$$e^{x - \sin x} - \cos(x^{\frac{3}{2}}) - bx^3 = o(x^a) \qquad \text{pro } x \to 0.$$

## Řešení

**1:**Funkce ma spojite vsechny derivace na celem $\mathbb{R}$. Spocitame tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a+bx^2}\right)^2}\left(\frac{x}{a+bx^2}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a+bx^2}\right)^2}\frac{a-bx^2}{(a+bx^2)^2} = \frac{a-bx^2}{(a+bx^2)^2+x^2}$$

Vidime nutne, ze musime zavolit $a = b$. Pak bude fuknce rostouci na $(0, 1)$ a klesajici na $(1, \infty)$ a v bode $x = 1$ bude tedy lokalni maximum. S volbou $a = b$ muzeme pocitat dal

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-2bx((a+bx^2)^2+x^2)-(a-bx^2)(4bx(a+bx^2)+2x)}{((a+bx^2)^2+x^2)^2}\\
&= \frac{2x}{((a+bx^2)^2+x^2)^2}\big(-b((a+bx^2)^2+x^2)-(a-bx^2)(2b(a+bx^2)+1)\big)\\
&\overset{a=b}{=} \frac{2xa}{((a+bx^2)^2+x^2)^2}\big(-3a^2-2a^2x^2+a^2x^4-1)\big) = \frac{2xa}{((a+bx^2)^2+x^2)^2}\big(a^2(x^2-1)^2-4a^2-1)\big)
\end{aligned}$$

Je videt, ze fce ma pro $x > 0$ pouze jeden inflexni bod. Pokud predpokladame,ze $x = \sqrt[2]{3}$ je inflexni bod, pak musi platit

$$0 = \big(a^2(x^2-1)^2-4a^2-1)\big) = \Big(a^2((\sqrt{3})^2-1)^2-4a^2-1)\Big) = -1$$

a vidime tedy, ze funkce nemuze mit inflexni bod v $x = \sqrt{3}$ pro zadnou volbu $a$. Navic, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ a tedy v $x = 1$ mame globalni maximum. Funkce je licha a tedy globalni minimum bude v bode $x = -1$.

**2:**Pouzijeme rozvoj exponencialy a cosinu

$$\begin{aligned}
e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)\\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + o(z^4)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)
\end{aligned}$$

Volbou $y := x - \sin x$ a $z := x^{\frac{3}{2}}$ mame

$$\begin{aligned}
&e^{x-\sin x} - \cos(x^{\frac{3}{2}}) - bx^3 = 1 + (x-\sin x) + \frac{(x-\sin x)^2}{2} + \frac{(x-\sin x)^3}{3!} + o((x-\sin x))^3\\
&\quad - (1 - \frac{(x^{\frac{3}{2}})^2}{2} + \frac{(x^{\frac{3}{2}})^4}{4!} + o((x^{\frac{3}{2}})^4) - bx^3\\
&= (\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + \frac{(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5))^2}{2} + \frac{(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5))^3}{3!} + o((\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5))^3) - bx^3\\
&\quad + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{4!} + o(x^6)\\
&= x^3(\frac{2}{3} - b) - \frac{x^5}{5!} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Vidime tedy, ze

$$e^{x-\sin x} - \cos(x^{\frac{3}{2}}) - bx^3 \sim x^3(\frac{2}{3} - b) - \frac{x^5}{5!}$$

pro $x \to 0$. Nutne tedy mame, ze pro $b = \frac{2}{3}$

$$e^{x-\sin x} - \cos(x^{\frac{3}{2}}) - bx^3 = o(x^a)$$

prave tehdy kdyz $a < 5$. Pro $b \neq \frac{2}{3}$ pak mame

$$e^{x-\sin x} - \cos(x^{\frac{3}{2}}) - bx^3 = o(x^a)$$

prave tehdy kdyz $a < 3$.