

Existenční věta pro ODR 1.řádu.

Následující věta je podstatná pro řešení diferenciálních rovnic 1.řádu. Pro její důkaz jsou potřebné znalosti, které budou přednášeny později. Nicméně, myšlenky důkazů jsou jednoduché a lze je uvést i nyní. Tvzení uvádíme ve tvaru, v jakém se pro jednodušší ODR používá (jsou obecnější formulace). Později si možná dokážete tuto větu pro diferenciální rovnice n -tého řádu a pro soustavy diferenciálních rovnic (obyčejných). Na přednášce budete zatím používat existenci a jednoznačnost jen pro dané probírané druhy rovnic, které často vycházejí z výpočtu řešení.

Existenční věta. *Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na otevřeném obdélníku $J \times I$, pak každým bodem tohoto obdélníku prochází řešení rovnice $y' = f(x, y)$.*

Je-li navíc i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ spojitá na $J \times I$, pak toto řešení je jediné.

To znamená, že pro každé $(x_0, y_0) \in J \times I$ existuje funkce $y(x)$, definovaná na otevřeném intervalu $U \subset J$ obsahujícím bod x_0 , s hodnotami v I a taková, že $y(x_0) = y_0$ a $y'(x) = f(x, y(x))$ pro každé $x \in U$. Věta je lokálního charakteru, tj. uvádí existenci řešení jen v nějakém okolí daného bodu. Získané lokální řešení můžeme však prodlužovat, až získáme největší možný podinterval v J , na kterém takové řešení y existuje (tzv. maximální řešení). Jednoznačnost pro celý obdélník znamená, že se žádné dva grafy řešení neprotínají.

Vzhledem k uvedenému lokálnímu charakteru se různé modifikace existenční věty formulují jen pro okolí bodu (x_0, y_0) , kterým má řešení probíhat.

ODR a PDR vznikaly ponejvíce z potřeb fyziky hlavně v 18. století. Tehdy se existence řešila výpočtem dané rovnice. V 19. století se objevovaly obecnější tvrzení o existenci řešení. Zřejmě prvním byl Cauchy, který po r. 1820 dokázal výše uvedené tvrzení jen pro existenci, i když předpokládal spojitost $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Lipschitz v r. 1876 použil místo spojitosti derivace svou lipschitzovskou proměnné y funkce $f(x, y)$, tj. $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ pro nějakou konstantu k . Peano v r. 1890 dokázal existenci i bez této podmínky, proto se často existenční věta nazývá Peanovou větou, někdy i Cauchyovou-Peanovou větou. Málokdy se přidává i jméno Lipschitz.

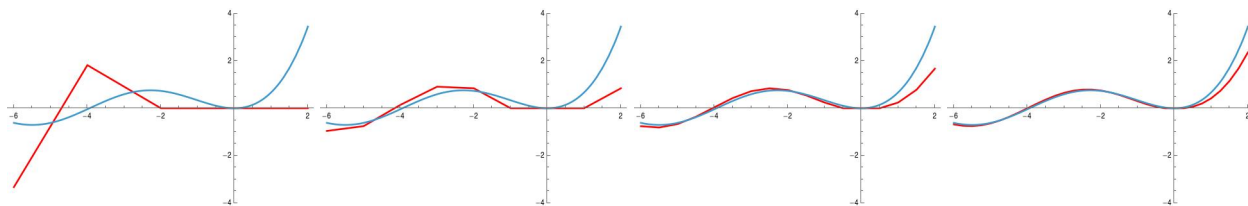
Jednoznačnost řešení poprvé dokázal Liouville v r. 1838 (i když Cauchy to asi věděl dříve). Byl to sice důkaz jen pro určité rovnice 2. řádu, ale dal se s nutnými modifikacemi přenést na obecnější případy. Jednoznačnost řešení, jak je uvedena výše, byla dokázána Pickardem a Lindelöfem v r. 1893, 1894 (s lipschitziovskou podmínkou místo spojitosti derivace). Situace s názvem věty je obdobná jako u existenční věty. Často se používá jen Pickardova věta, občas Linelöfova-Pickardova věta a málokdy se přidává jméno Liouvilla.

Pro existenci použil Cauchy jednoduché aproximace pocházející od Eulera. Vezmeme bod $(x_0, y_0) \in J \times I$, dělení $\{x_0, \dots, x_n = b\}$ omezeného intervalu $[x_0, b] \subset J$ a definujeme rekurentně $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$. Spojením bodů (x_i, y_i) a (x_{i+1}, y_{i+1}) dostaneme lomenou čáru, graf funkce g_n . V každém bodě $x \in [x_0, b]$ posloupnost $\{g_n(x)\}$ je cauchyovská a tedy konverguje. O limitní funkci g se pomocí definice derivace ukáže, že je řešením dané rovnice (přitom je potřeba věta o záměně limit, která se probírá později). Stejně lze postupovat od bodu x_0 doleva.

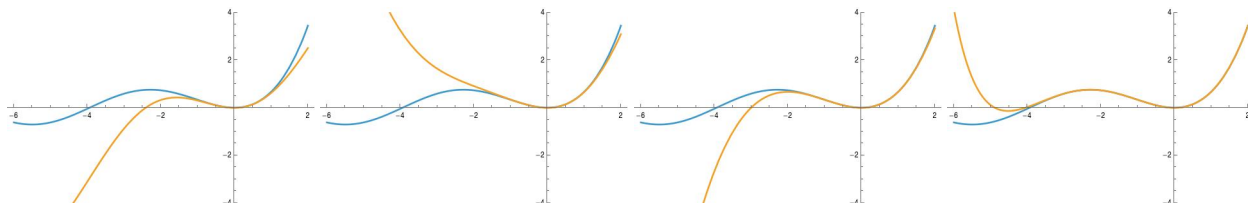
Metoda pro jednoznačnost (i existenci) řešení se asi bude probírat na přednášce, tak se o ní nebudu podrobněji zmiňovat. Jedná se zase o posloupnost funkcí, tentokrát $y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$, která bude pomocí lipschitzkovosti funkce f v proměnné y konvergovat k řešení rovnice (o tom se ukáže, že je jediné). Cauchy o této posloupnosti věděl a částečně ji použil, jednoznačnost však asi explicitně nevyvodil.

U obou metod lze popsat příslušné aproximace a tím získat přibližná řešení. Ukážeme obrázky s několika prvními aproximacemi řešení.

První Eulerova metoda pro řešení rovnice $y' = y + \sin x$, $y(0) = 0$ na intervalu $[-6, 2]$, aproximace pro rozdělení $[-6, 2]$ postupně na 4, 8, 16 a 32 částí); řešení je modře, aproximace červeně.



Druhá metoda pomocí integrálů pro řešení stejné rovnice (řešení je modře, aproximace oranžově). Jsou ukázány aproximace y_2, y_3, y_4, y_9 ze seznamu po grafech.



Příslušné aproximace pro druhou metodu:

$$y_0(x) = 0$$

$$y_1(x) = 1 - \cos x$$

$$y_2(x) = 1 + x - \cos x - \sin x$$

$$y_3(x) = \frac{1}{2}x(2 + x) - \sin x$$

$$y_4(x) = x^2/2 + x^3/6$$

$$y_5(x) = \frac{1}{24}(24 + 4x^3 + x^4 - 24 \cos x)$$

$$y_6(x) = 1 + x + x^4/24 + x^5/120 - \cos x - \sin x$$

$$y_7(x) = \frac{1}{720}x(720 + 360x + 6x^4 + x^5) - \sin x$$

$$y_8(x) = x^2/2 + x^3/6 + x^6/720 + x^7/5040$$

$$y_9(x) = 1 + x^3/6 + x^4/24 + x^7/5040 + x^8/40320 - \cos x$$