

Modifikace Banachovy věty o pevném bodě

Pevné body zobrazení hrají velkou roli v aplikacích, a proto existuje velký počet publikací o jejich existenci. Zmíníme se o několika modifikacích Banachovy věty o pevném bodě a tzv. Brouwerově větě o pevném bodě.

Na přednášce byla dokázána jedna modifikace: stačí předpokládat, že některá iterace daného zobrazení má pevný bod a potom už i dané zobrazení má pevný bod. Na cvičení jsme ukázali, že tvrzení platí i pro kontrakce. Často je potřeba pevný bod zobrazení $f : X \rightarrow Y$, kde $X \subset Y$. Jedním z takových případů je následující tvrzení.

Nechť B je koule v Banachově prostoru X a $f : B \rightarrow X$ je kontrakce, která zobrazuje hranici B (tj. sféru) do B . Pak f má jediný pevný bod.

Nejdříve se B posune tak, aby koule měla střed v 0. Pak se ukáže, že funkce $(f(x) + x)/2$ je kontrakce a zobrazuje $B \rightarrow B$. Pevný bod tohoto zobrazení je i pevný bod f . Důsledkem je zajímavé tvrzení (zobrazení v Banachově prostoru je liché, jestliže $f(-x) = -f(x)$):

Každá kontrakce $B \rightarrow X$ (B koule v Banachově prostoru X), která je lichá na hranici B , má pevný bod.

Obě předchozí tvrzení lze zobecnit na uzávěry některých otevřených množin v Banachově prostoru místo koule.

Místo kontrakce lze použít její zobecnění pomocí regresní funkce.

Ať (X, d) je úplný prostor a $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je neklesající funkce s vlastností $h(t) < t$ pro $t > 0$. Pak každé spojitě zobrazení $f : X \rightarrow X$, splňující $d(f(x), f(y)) \leq h(d(x, y))$ pro všechna $x, y \in X$, má pevný bod.

Ukáže se, že pro $t > 0$ je $\lim_n h^n(t) = 0$ a pak se postupuje stejně jako v důkazu Banachovy věty. Jinou možností je použít místo podmínky pro kontrakci podmínku $\text{diam}(f(A)) \leq k \text{diam}(A)$ pro nějaké $k < 1$ a libovolné $A \subset X$.

Skoro stejný důkaz jako má Banachova věta je následující tvrzení. Potřebujeme nové pojmy. Zobrazení $f : X \rightarrow X$ je kontrakce pro vzdálenosti menší než $r > 0$, jestliže podmínka kontrakce platí jen pro body x, y se vzdáleností $d(x, y) < r$. Metrický prostor (X, d) se nazývá r -řetěžitelný, jestliže pro každé dva body $x, y \in X$ existují body $x_0, \dots, x_n$ pro nějaké n , že $x_0 = x, x_n = y$ a $d(x_i, x_{i+1}) < r$ pro $i = 0, \dots, n-1$. Každý souvislý prostor je r -řetěžitelný pro libovolné $r > 0$.

Nechť X je úplný r -řetěžitelný prostor a $f : X \rightarrow X$ je kontrakce pro vzdálenosti menší než r . Pak f má pevný bod.

Brouwerova věta o pevném bodě

Místo obecných metrických prostorů a Banachových prostorů se nyní soustředíme na euklidovské prostory. Uvedeme tvrzení z jistého hlediska obecnější než jsou předchozí (bez jakékoli kontrakce), ale speciálnější, co se týká oborů zobrazení. Postupy jsou vesměs značně obtížnější než u Banachovy věty.

Nahoře uvedená věta o lichém zobrazení platí v $\mathbb{R}^n$ bez předpokladu kontrakce (stačí spojitost). To je známá Borsukova věta, která je úzce spojena s jinou Borsukovou větou:

Pro každé spojitě zobrazení hranice koule v $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ se středem v 0 existuje x , že $f(x) = f(-x)$.

Lidové vysvětlení: v každém okamžiku existuje na zeměkouli protilehlá místa se stejnou teplotou a stejným tlakem.

Slavná Brouwerova věta:

Každá spojitá funkce kompaktní konvexní množiny v $\mathbb{R}^n$ do sebe má pevný bod. Lze vzít i Hilbertův prostor místo $\mathbb{R}^n$.

Pro $n = 1$ tato věta plyne jednoduše z Bolzanovy věty, která má také jednoduchý důkaz. Tím ale jednoduchost končí a od dimenze 2 jsou už důkazy komplikované. Sice existují důkazy o několika řádcích, ale používají složitá tvrzení s komplikovanějšími důkazy.

Existují zobecnění uvedené Brouwerovy věty (např. Schauderova věta pro nekonečné dimenze, Lefschetzova věta pro nekonvexní podmnožiny $\mathbb{R}^n$). Samozřejmě mají tyto věty hodně důsledků a aplikací. Zmíníme se o jednom důsledku o tzv. učešání koule (hairy ball problem). Snadno si představíme, že vlasy na kružnici lze pěkně hladce učesat. Na kulové ploše už to nejde, vždy bude aspoň jeden vlas trčet kolmo na plochu. To dokázal Poincaré v r.1885, obecně Brouwer v r.1912. Přesná matematická formulace je pomocí tečného vektorového pole na sféře (hranici koule v $\mathbb{R}^n$), což je množina tečných nenulových vektorů, které vycházejí ze všech bodů sféry a míří ven z koule. Toto pole je spojitě, jestli je spojitě zobrazení, které přiřadí bodu sféry konec vektoru, který z bodu vychází.

Na sféře existuje spojitě tečné vektorové pole, právě když je dimenze sféry lichá.

Tato věta plyne snadno z Brouwerovy věty o pevném bodě. Je zajímavé, že naopak z uvedené věty o učešání se dá Brouwerova věta dokázat.

Další možností důkazu Brouwerovy věty je použití zobecnění Bolzanovy věty z dimenze 1 na dimenzi n . Toto zobecnění ukázal Poincaré v r. 1883 a důkaz Brouwerovy věty z tohoto zobecnění publikoval Miranda v r. 1940. Snadno si představíme, že postupy jsou značně složitější než pro dimenzi 1.